解题思维导航

初二数学

主编摇刘颖丽

新时代出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 [illegible]号）
（邮政编码摇[illegible]）

印刷摇
规格摇[illegible]
印张摇摇
字数摇摇摇摇千字
版次摇[illegible]年 苑月第 员版
印次摇[illegible]年 苑月北京第 员次印刷
书号摇[illegible]
定价 摇摇元

《解题思维导航》
丛书（初中版）编委会

把握思维航向摇摇驶向胜利彼岸
——《解题思维导航》丛书(初中版)序

我国中学生在全面实施素质教育中,经过数年的探索和实践,已初步积累和总结出了一些成功的经验。夯实学生的基础,启迪学生的思维,拓展学生的思路,提高学生的思维能力,是我国素质教育和中、高考改革向我们提出的时代要求,也是考查教育质量和学业成绩的主要内容。根据中学教育发展的新形势,我们从广大中学生的实际需要出发,以素质教育的基本理论为指导,以提高解题思维能力为宗旨,精心编写了这套高品位、高质量的解题指导用书。

这套丛书立意深刻,栏目新颖,例题典型,讲法创新。总结解题思维规律,发掘解题思维潜能,提升解题思维能力,走出解题思维误区,是这套丛书的编写思想和编者的执著追求。这套丛书有别于其他教辅图书的显著特点是:

灵郾以思维为核心,以能力为目标,注意打好科学思维基础。

圆郾以演练为主线,以练带讲,适度拓展,点拨要害。

猿郾紧贴教改要求,瞄准中、高考,使平日的学习与中、高考接轨。

这套丛书与人教社最新教材同步到章或节。各册以章或节为编写单元,每章或节按以下四个栏目编写:思维基石、思维范例、思维升级、思维训练。

在“思维基石”中,从思维的角度画龙点睛地精析“三基”(基础知识、基本技能、基本思维方法),并予以适当迁移和拓展,特别提出重点、难点、考点和误点。把握思维基石就可以提高思维策略和思维品质,产生认识上的质的飞跃。在“思维范例”中,根据中学生的思维特点,以典型题开路,强化思维方法的培养和思维能力的提升。从每道例题可以学到发散思维方法和运用这些

方法解决实际问题的本领。在“思维升级”中，分两部分精析：归纳和运用思维技巧；剖析和避开思维误区。在第一部分中，分析、综合、归纳和拓展本章或本节的重点和难点，特别是结合难度较高的新颖综合题，归纳出思维技巧，使学生摆脱题海战术，真正做到举一反三，触类旁通。在第二部分中，结合实例，剖析典型的思维误区，并给出避开思维误区的有效途径。在“思维训练”中，以滚动训练的形式，帮助学生理解和掌握新课，巩固和加深旧课，起到串讲知识点和综合训练的作用。题目设计典型、新颖，并展示了一些宝贵的新题。

要编写好这套富有创意的丛书是有较大难度的。以具有员园园多年辉煌历史的济南五中（其前身是齐鲁中学）为基础，组织一大批辛勤耕耘在教学第一线的优秀教师，在繁忙的教学中精心编写，反复修改，力求完善。书中若有不当之处，谨请各位读者在使用中提出宝贵意见，以便我们修订再版时改正。

祝愿中学生朋友们健康成长为喜欢动脑、善于解题的小灵通！

《丛书》编委会主任摇陈仕学

圆园园园年 源月

前摇摇言

[与耕缘云] 随着我国加入宰耘韵,大步走向经济全球化,飞速发展的新形势向我国的基础教育提出了更高的要求。夯实学生的学业基础,提高学生的综合思维能力,是基础教育的重要任务和时代要求。

数学是一门思维的科学,数学活动是一项思维的运动。数学在提高人的推理能力、抽象思维能力和创造能力方面有着独特的作用。同时,数学为其他科学提供了语言、思想和方法,是一切重大技术发展和突破的基础。

本书的显著特点是：

员郾以学生为主体,以思维为核心,以能力为目标,以中考为基点。

圆郾紧扣最新数学课程标准和现行教材,适度拓展,注重实践,点拨要害。

猿郾构筑了培养学生的思维能力的阶梯。栏目设置富有创意。

在“思维基石”中设立了猿个子栏目：“重要知识点精析”、“难点误点点拨”和“基本思维方法”。每个子栏目都精心编写到位。在“思维范例”中,范例新颖,不少题是近年中考试题中的优秀题目。注重展示思维过程,每道题都按思路分析、解、思维拓展猿部分编写。一题多解,一题多问,目的是开阔学生思路。在“思维升级”中,设立了两个子栏目：归纳和运用思维技巧；剖析和避开思维误区。在第一个小栏目中从逻辑思维的角度分析、归纳、综合和拓展本章或本单元的重点和难点。结合新颖综合题进行思维分析,归纳出思维技巧。在第二个小栏目中,结合实例,剖析典型的思维误区,并指出避开思维误区的有效思维途径。在“思维训练”中,强化综合思维,理解掌握新课,巩固加深旧课,起到综合练习和串讲知识点的作用。

本书由刘颖丽主编,刘凤莲副主编,参加编写的还有董晓杰、马洪全、刘晔、李龙华、刘霞、张永会、宁延国。在编写过程中,编者得到高校专家和市区教研人员的指导和帮助,不胜感谢。我们深信,本书对发展学生的思维能力

力和创新能力大有裨益。书中疏漏和不足之处,恳请读者批评指正。

主揺编

圆[illegible]年 源月

目摇摇录

初二代数

初二几何

代　　数

第八章　因式分解

思维基石

重要知识点精析

（一）因式分解的有关概念

员援因式：几个整式相乘，每个整式叫做它们的积的因式。例如 葬(葬原员)(葬亘员) 越葬 原葬 葬 葬原员和 葬亘员都是 葬 原葬的因式。

圆援公因式：几个整式公有的因式叫做这几个整式的公因式。如 皂葬 皂遭 皂糟三个整式中都有因式 皂，则 皂叫做这三个整式的公因式。

猿援因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解。

（二）因式分解的几种常用方法

员援提公因式法：如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种因式分解的方法叫做提公因式法。如 皂葬亘皂遭亘皂糟越皂(葬亘遭亘糟)。

圆援公式法：用公式进行因式分解的方法叫做公式法。

因式分解有以下公式：

(员)平方差公式：

葬圆原遭圆越(葬亘遭)(葬原遭)

(圆)完全平方公式：

葬圆依圆葬遭亘遭圆越(葬依遭)圆

有时也用到公式：

员

葬圆垣遭圆垣糟圆垣圆葬遭垣圆遭糟垣圆葬糟越(葬垣遭垣糟)圆

猿郾分组分解法 利用分组来因式分解的方法叫做分组分解法。

分组分解法有如下几种情况：

(员)分组后能直接提公因式；

(圆)分组后能直接运用公式；

(猿)展开后重新分组；

(源)添项、拆项后再分组分解。

难点误点点拨

本章的难点是分组分解法。在进行分组的时候，一定要有预见性，预见到下一步整体分解的目的能否达到。即分组之后各组之间是否有公因式，是否能用公式。因此要能纵观全局，合理分组，避免盲目性。如对多项式葬圆原圆葬遭垣遭圆原糟圆越(葬圆原圆葬遭)垣(遭圆原糟圆)的分组，虽然局部都能分解，但不能达到整体分解的目的。

误点点拨：

员郾因式分解与整式乘法互为逆变形。例如：

(葬垣遭)(葬原遭) $\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}$ 葬圆原遭圆

搞清这个关系就会避免出现因式分解走“回头路”。例如同学们常出现下面的错误：

葬圆原遭圆越(葬垣遭)(葬原遭)(葬圆垣遭圆)越(葬圆原遭圆)(葬圆垣遭圆)

圆郾找公因式的顺序：

(员)系数：各项系数的最大公约数。

(圆)字母因式：各项都有的字母的最低次幂。

(猿)多项式因式：各项都有的多项式因式的最低次幂。

按照这个顺序一般能比较准确地找出公因式，避免公因式找得不全。例如：远葬遭(葬原遭)圆原远葬遭(葬原遭)猿，找公因式时，若不按上述顺序，容易漏掉遭正确的公因式应为远葬遭(葬原遭)圆。

猿郾如果多项式的第一项系数是负数，一般先提出“原”号，在提出“原”号时，多项式的各项都要变号。其根据是添括号法则。例如：

原源皂猿垣员远皂圆原圆远皂越原(源皂猿原员远皂圆垣圆远皂)

源郾如果多项式某些项的系数为分数，可以把它提出来，不可以去分母。

例如 把$\frac{员}{圆}$曾圆原曾垣$\frac{员}{圆}$赠圆因式分解，可以化为$\frac{员}{圆}$(曾圆原圆曾垣赠圆)，不可以

化为 曾圆原圆曾赠垣赠圆。因为因式分解是恒等变形。

缘援如果多项式的某项正好是公因式，提取公因式后此项在括号内剩 员不能漏写。

远援在因式分解时，常用到以下变形：

（员）当 灶为自然数时，有

（葬原遭）圆灶越（遭原葬）圆灶

（葬原遭）圆灶垣员越原（遭原葬）圆灶垣员

（圆）（曾原皂）（赠原皂）越（皂原曾）（皂原赠）

（曾原皂）（皂原赠）越原（曾原皂）（赠原皂）

苑援用公式法因式分解的多项式，必须符合公式的形式。

（员）用 葬圆原遭圆越（葬垣遭）（葬原遭）分解的多项式，必须是二项式，且这两项的符号相反。葬、遭可表示数，亦可表示字母或代数式，每项都能写成数（或式）的完全平方的形式。

（圆）用 葬圆依圆葬遭垣遭圆越（葬依遭）圆分解的多项式，必须是三项式，且其中两项符号相同并能写成数（或式）的完全平方形式，而余下的一项是这两个数（或式）的乘积的 圆倍。如果三项中的两个完全平方项都带有负号，则应先提出负号，再运用完全平方公式分解因式。

（猿）运用公式时，一定要明确多项式的项与公式中的字母如何对应，不要出现 怨皂圆原灶圆越（怨皂垣灶）（怨皂原灶）这样的错误。

（源）运用公式法进行因式分解时，为了构建公式形式，经常用到以下一些变形。

①积的乘方法则反用，即 葬灶遭灶越（葬遭）灶。例如：

源/怨 皂圆原圆缘灶圆越（圆/猿）圆皂圆原（缘灶）圆越（圆/猿皂）圆原（缘灶）圆

②幂的乘方法则反用，即 葬圆灶越（葬灶）圆。例如：

曾源原赠圆越（曾圆）圆原（赠）圆

愿援四项式分组的方法：

（员）二、二分组，即两项一组。此种分法关键是两组之间要有公因式。

（圆）三、一分组，即其中三项一组，另一项一组。此种分法关键是两组之间要能用公式。

例如 把 曾圆垣远曾垣怨原赠圆因式分解。若分成（曾圆原赠圆）垣（远曾垣怨），因式分解就无法进行。正解的分法是（曾圆垣远曾垣怨）原赠圆。

怨援检验因式分解的结果：

（员）必须是几个整式的乘积的形式；

猿

(圆)必须分解到每个因式都不能再分解为止；

(猿)积中若有相同的因式要写成乘方的形式；

(源)对不能再因式分解的又能化简的多项式因式，要进行化简整理。

基本思维方法

本章的重点就是利用三种基本方法进行因式分解。一般按照下面的思路进行。

(员)先看多项式各项有没有公因式，若有公因式，则首先提取公因式，简称“一提”。

(圆)再看能否套用公式，简称“二套”。

(猿)四项或四项以上的多项式要考虑用分组分解法，简称“三分组”。

(源)除灵活应用上面三种基本方法外，还要注意对特殊形式的多项式要用特殊的方法进行因式分解。如展开后重新分解；添项或拆项后分组；换元法等。

源

思维范例

例 员 下列各式从左至右的变形中是因式分解的是 (　　)

粤郾葬圆垣源葬原缘越葬(葬垣源)原缘　　月郾(曾垣员)(曾原员)越曾圆原员

悦郾皂圆原圆皂原猿越皂(皂原圆原猿/皂)　　阅郾曾圆原圆曾垣员越(曾原员)圆

思路分析：粤中变形的结果不是积的形式，故不是因式分解；月中从左至右的变形是整式的乘法运算，不是因式分解；悦中右边的因式(皂原圆原猿/皂)不是整式，不是因式分解；阅中把一个多项式提公因式变成两个整式的积是分解因式。

解：选阅。

思维拓展：正确理解因式分解概念，是学好因式分解的前提，遇到类似判断问题，要紧扣因式分解定义思考。

例 圆 下面从左至右因式分解正确的是 (　　)

粤郾赠猿垣赠圆垣赠越赠(赠圆垣赠)

月郾原缘葬猿垣员园葬圆原员缘葬越原缘葬(葬圆垣圆葬原猿)

悦郾原曾猿原远曾圆越圆曾(圆曾圆原猿曾)

阅郾葬(葬原遭)圆原(遭原葬)越(遭原葬)(遭原葬原员)

思路分析：本题考查的是用提公因式法分解因式，应先找准公因式，然

后再提取。粤中公因式找对了，但第三项提取公因式 赠后应剩下 员这里漏写了 员;月中提公因式 原缘葬后，根据添括号法则，括号里各项都应改变符号，这里第二项和第三项都没变号 ;悦中公因式没有提尽，括号里应进一步提取公因式 曾;阅中由于(葬原遭圆越(遭原葬圆，故可提取公因式(遭原葬。

解 选 阅

例 猿 把下列各式分解因式：

(员 圆葬 葬亘遭 原猿 葬亘遭

(圆 曾(曾原赠 垣赠 赠原曾

(猿(圆葬亘遭(圆葬原猿遭 垣葬 圆葬亘遭

(源 曾(曾原赠(葬原遭 原赠 赠原曾(遭原葬

思路分析 :本组题都可以看成是二项式的因式分解，(员题中有公因式 葬亘遭;(圆题中有公因式 圆葬亘遭;(猿题中变形后有公因式 曾原赠;(源题中变形后有公因式(曾原赠(葬原遭。另外需要注意变形时符号的变化 结果中若有相同的因式，一定要写成幂的形式 提公因式后，剩下的另一个因式必须加以整理 整理后若还有公因式，应继续提出，直到每个因式不能再继续分解为止。

解 :(员 圆葬 葬亘遭 原猿 葬亘遭 越(葬亘遭(圆葬原猿

(圆 曾(曾原赠 垣赠 赠原曾 越曾(曾原赠 原赠 曾原赠

越(曾原赠(曾原赠 越(曾原赠圆

(猿(圆葬亘遭(圆葬原猿遭 垣葬 圆葬亘遭

越(圆葬亘遭(圆葬原猿遭亘葬

越(圆葬亘遭(猿葬原猿遭 越猿 圆葬亘遭(葬原遭

(源 曾(曾原赠(葬原遭 原赠 赠原曾(遭原葬

越曾(曾原赠(葬原遭 原赠[原(曾原赠] [原(葬原遭]

越曾(曾原赠(葬原遭 原赠 曾原赠(葬原遭

越(曾原赠(葬原遭(曾原赠 越(葬原遭(曾原赠圆

例 源 把下列各式分解因式：

(员 $\frac{员}{圆}$葬圆(曾原圆葬圆 原$\frac{员}{源}$葬 圆葬原曾猿

(圆(葬亘曾 皂垣员(遭亘曾 灶原员 原(葬亘曾 皂(遭亘曾 灶

(猿 曾葬(曾亘赠原扎(赠亘扎原葬 垣曾圆 扎(扎原曾原赠 垣曾圆赠 扎原曾原赠(曾原扎原葬

解 :(员 $\frac{员}{圆}$葬圆(曾原圆葬圆 原$\frac{员}{源}$葬 圆葬原曾猿

越$\frac{员}{圆}$葬圆(曾原圆葬圆 原$\frac{员}{源}$葬 原(曾原圆葬]猿

缘

越员/圆葬圆(曾原圆葬)圆垣员/源葬(曾原圆葬)猿

越员/源葬(曾原圆葬)圆(圆葬垣曾原圆葬)

越员/源葬曾(曾原圆葬)圆

(圆)(葬垣曾)皂垣员(遭垣曾)灶原员 原(葬垣曾)皂(遭垣曾)灶

越(葬垣曾)皂(遭垣曾)灶原员(葬垣曾原遭原曾)

越(葬垣曾)皂(遭垣曾)灶原员(葬原遭)

(猿)曾猿(曾垣赠原扎)(赠垣扎原葬)垣曾圆扎(扎原曾)(原赠)垣曾圆赠(扎原曾)(原赠)(曾原扎原葬)

越曾猿(曾垣赠原扎)(赠垣扎原葬)垣曾圆扎[原(曾垣赠原扎)]

垣曾圆赠[原(曾垣赠原扎)](曾原扎原葬)

越曾猿(曾垣赠原扎)(赠垣扎原葬)原曾圆扎(曾垣赠原扎)原曾圆赠(曾垣赠原扎)(曾原扎原葬)

越曾圆(曾垣赠原扎)[曾(赠垣扎原葬)原扎原赠(曾原扎原葬)]

越曾圆(曾垣赠原扎)(曾赠垣曾扎原葬曾原扎原曾赠垣赠扎垣赠葬)

越曾圆(曾垣赠原扎)(曾扎原葬曾原扎垣赠扎垣赠葬)

例缘 分解因式：

(员)葬圆原源遭圆 (圆)曾原曾遭圆 (猿)原员/圆灶圆垣圆皂圆 (源)员远皂源原员

思路分析：(员)题可化为葬圆原(圆遭)圆；(圆)题有公因式，应先提公因式，再用公式；(猿)题可先提一个因数原员/圆，才可用公式分解；(源)题可化为(源皂圆)圆原员，此题需要两次用公式。

解：(员)葬圆原源遭圆越葬圆原(圆遭)圆越(葬垣圆遭)(葬原圆遭)

(圆)曾原曾遭圆越曾(员原遭圆)越曾(员垣遭)(员原遭)

(猿)原员/圆灶圆垣圆皂圆越原员/圆(灶圆原源皂圆)越原员/圆(灶垣圆皂)(灶原圆皂)

(源)员远皂源原员越(源皂圆)圆原员越(源皂圆垣员)(源皂圆原员)越(源皂圆垣员)(圆皂垣员)(圆皂原员)

例远 分解因式：

(员)源(皂垣灶)圆原远(皂原灶)圆

(圆)(葬垣遭垣糟垣凿)圆原(葬原遭垣糟原凿)圆

解：(员)源(皂垣灶)圆原远(皂原灶)圆

越[苑(皂垣灶)]圆原[源(皂原灶)]圆

越[苑(皂垣灶)垣源(皂原灶)][苑(皂垣灶)原源(皂原灶)]

越(员员皂垣猿灶)(猿皂垣员员灶)

远

(圆)(葬垣遭垣糟垣凿)圆原(葬原遭垣糟原凿)圆

越[(葬垣遭垣糟垣凿)垣(葬原遭垣糟原凿)][(葬垣遭垣糟垣凿)原(葬原遭垣糟原凿)]

越(葬垣遭垣糟垣凿垣葬原遭垣糟原凿)(葬垣遭垣糟垣凿原葬垣遭原糟垣凿)

越(圆葬垣圆糟)(圆遭垣圆凿)越源(葬垣糟)(遭垣凿)

例苑 分解因式：

(员)员/源垣葬垣葬圆　　(圆)原远葬圆垣员远葬遭原遭圆

(猿)葬愿原圆葬遭垣遭杜　　(源)(责原择)圆垣员源(责原择)垣源愿

思路分析：(员)题中的葬正好是员/圆与葬乘积的圆倍；(圆)题中的各项提出负号后用公式；(猿)题中的葬愿越(葬)圆，遭杜越(遭)圆；(源)题中的员源(责原择)越圆伊苑(责原择)。

解：(员)员/源垣葬垣葬圆越(员/圆)圆垣圆伊员/圆葬垣葬圆越(员/圆垣葬)圆

(圆)原远葬圆垣员远葬遭原遭圆越原(远葬圆原员远葬遭垣遭圆)

越原(愿葬原遭)圆

(猿)葬愿原圆葬遭垣遭杜越(葬)圆原圆葬遭垣(遭)圆

越(葬原遭)圆

(源)(责原择)圆垣员源(责原择)垣源愿越(责原择)圆垣圆伊苑(责原择)垣苑圆

越(责原择垣苑)圆

例愿 分解因式：

(员)(曾垣赠)圆原源(曾垣赠)原员

(圆)(曾垣赠)圆垣源(曾原赠)圆原源(曾圆原赠圆)

(猿)(曾圆垣员)圆原源曾(曾圆垣员)垣源曾圆

(源)远源皂圆原灶圆原(皂圆垣员远灶圆)圆

解：(员)(曾垣赠)圆原源(曾垣赠)原员越(曾垣赠)圆原源(曾垣赠)垣原

越(曾垣赠原圆)圆

(圆)(曾垣赠)圆垣源(曾原赠)圆原源(曾圆原赠圆)

越(曾垣赠)圆原源(曾圆原赠圆)垣源(曾原赠)圆

越(曾垣赠)圆原圆伊圆(曾原赠)(曾垣赠)垣[圆(曾原赠)]圆

越(曾垣赠原圆曾垣圆赠)圆越(猿赠原曾)圆

(猿)(曾圆垣员)圆原源曾(曾圆垣员)垣源曾圆

越(曾圆垣员)圆原圆(曾圆垣员)·圆曾垣(圆曾)圆

越(曾圆垣员原圆曾)圆越(曾圆原圆曾垣员)圆

越[(曾原员)圆]圆越(曾原员)源

苑

（源）远原皂圆灶圆原（皂圆垣远灶圆）圆

越（愿皂灶）圆原（皂圆垣远灶圆）圆

越（愿皂灶垣皂圆垣远灶圆）（愿皂灶原皂圆原远灶圆）

越（皂圆垣愿皂灶垣远灶圆）［原（皂圆原愿皂灶垣远灶圆）］

越原（皂垣源灶）圆（皂原源灶）圆

例 怨 如果 曾圆垣噪曾赠垣怨赠圆是一个完全平方式，那么 噪的值是______。

思路分析 本题考查完全平方式的概念。完全平方式有三项，是两个数的平方和，再加上或减去它们的积的 圆倍。这里首末两项是 曾和 猿赠这两个数的平方和，那么中间一项必为加上或减去 曾和 猿赠的积的 圆倍，即 噪曾赠越依远曾赠

解：噪的值为 远或 原远

说明：若填 噪越依猿则错，因为 曾圆依猿曾赠垣怨赠圆是非完全平方式；若填 噪越远则漏掉一个解。

例 员园 已知 葬为任一自然数，证明代数式 $\frac{员}{源}$葬原$\frac{员}{圆}$葬垣$\frac{员}{源}$葬的值一定为整数，且为一完全平方数。

证明：$\frac{员}{源}$葬原$\frac{员}{圆}$葬垣$\frac{员}{源}$葬 越$\left(\frac{员}{圆}葬\right)^{圆}$原圆伊$\left(\frac{员}{圆}葬\right)$伊$\left(\frac{员}{圆}葬\right)$垣$\left(\frac{员}{圆}葬\right)^{圆}$

越$\left(\frac{员}{圆}葬原\frac{员}{圆}葬\right)^{圆}$越$\left[\frac{员}{圆}葬（葬原员）\right]^{圆}$

疫葬为整数 亦葬与 葬原员为两个连续整数

亦葬与 葬原员中必有一偶数，则 $\frac{员}{圆}$葬（葬原员）必为整数

亦 $\frac{员}{源}$葬原$\frac{员}{圆}$葬垣$\frac{员}{源}$葬 为一完全平方数

例 员员 把下列各式分解因式：

（员）圆葬曾原远葬赠垣缘遭赠原遭曾　　（圆）曾圆垣猿曾圆原曾原员园

（猿）葬遭垣葬原遭原员　　（源）遭原葬遭垣葬遭原葬圆

思路分析 以上各题都不能直接提公因式或直接运用公式，所以应考虑用分组分解法进行分解。分组时可按系数分组，也可以按同一字母分组，这都有利于下一步提公因式。

解：（员）圆葬曾原远葬赠垣缘遭赠原遭曾

越（圆葬曾原远葬赠）原（遭曾原缘遭赠）

越圆葬（曾原缘赠）原遭（曾原缘赠）

越（曾原缘赠）（圆葬原遭）