解数学竞赛题的常用策略

王连笑

上海教育出版社

目　　录

写 在 前 面

一个学生，从小学到中学，再到大学，都有这样的经历：只要学习数学就离不开解题．这是因为“问题是数学的心脏”，只有通过对数学问题的解决，才能深入地学习数学．

大家天天都在解题，但是你是否想过，到底什么是解题呢？这确实是一个值得思考的问题．

前苏联数学家 C·A·雅诺夫斯卡娅指出：“解题就是把题目归结为已经解过的题．”这句话相当深刻．实际上，我们解每一道题，都是把生题转化和归结为熟题，把复杂题转化和归结为简单题．回顾我们解每一道题的全部过程大家就会体会到，解题的过程实际上就是在数学解题思想的指导下，调动数学基础知识和基本技能，采取解题策略，运用数学方法的思维过程．在解题过程中，如果我们遇到的题目不是标准化、模式化的题目，就必须发挥思维的创造性去化归题目，研究题目，这就需要采取一定的策略，因此，在解题的过程中，策略起到一个关键的作用．

那么，什么是策略呢？现代汉语词典对这一词条是这样解释的：“策略是根据形势发展而制定的行动方针和斗争方式．”根据这一解释，我们可以把数学解题策略理解为是为了实现解题目标而采取的行动方针．数学解题策略不同于数学解题方法，它是把解题思想转化为解题操作的一座桥梁，是在数学解题思想指导下，决定采取什么样的操作方法的一种总体决策．解题策略的制定可以帮助我们在解题中探讨如何入手，如何推进，如何求解，如何深入．因此，解题策略的制定是一种有目的的思维活动．首先是明确解题的总体方向，然后再按可能的方向缩小思考的范围，制定符合解题方向的解题途径，进而实现解题操作，因而，解题策略的选择又是解题目标、解题思想、解题方法和解题效果的统

一. 解题策略以其全局性的指导意义而区别于具体的解题技巧,它是解题思想转化为解题操作的桥梁. 好的解题策略可以优化解题过程,缩短解题长度,节省探究时间,减少失败次数,从而体现了数学能力和数学智慧.

解题策略有时又与解题思想分不开,如化归既是解题思想,又是解题策略,整体化,数形结合等,也都是解题思想和解题策略的统一.

下面仅就解数学竞赛题常用的策略做一些粗浅的探讨,这些策略是:

1. 特殊化策略.
2. 一般化策略.
3. 局部化策略.
4. 整体化策略.
5. 映射转移策略.

本书主要是通过对例题的研究来介绍解题策略,例题的选择主要来自各级数学奥林匹克,有不少题目有一定的难度,大部分介绍数学奥林匹克解题的书都是把题目如何解决作为重点,本书不同的是,把兴奋点放在题目的解法是如何想出来的,即如何用解题策略来分析题目,探讨解决思路,提出解题方案. 因此,我们在探索每一道例题的解法思路时,没有写出规范的解法,而是把思考这个题目解法的途径呈现在读者面前,让读者和作者一起共同经历每一道题目的思维探索过程,作者认为,这样做对于提高读者的思维水平和解决问题的能力会有益处,而每道题的规范解法留给读者自己完成.

一、特殊化策略

本质是最简单的.

——黑格尔

从最简单、最容易认识的对象开始,一点一点逐步上升到对复杂的对象的认识.

——笛卡儿

善于"退",足够地"退",退到原始而不失去重要性的地方,是学好数学的一个诀窍.

——华罗庚

在讨论数学问题时,我相信特殊化比一般化起着更为重要的作用.我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因,就在于这样的事实,即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决,这一切都有赖于找出这些比较容易的问题,并且用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们.

——希尔伯特

当我们遇到一些带有一般性的数学问题,如果感到束手无策时,有时可以采取"退"的策略,即特殊化策略.所谓"退",可以从复杂退到简单,从一般退到特殊,从抽象退到具体,从整体退到局部,从空间退到平面,正如华罗庚先生所说,退到最原始而不失去重要性的地方,把简单的、特殊的问题搞清楚了,并从这些简单的问题的解决中,或者获得解题思路,或者提示解题方向,或者发现一般问题的结论,或者得到化归

为简单问题的途径，从而再“进”到一般问题上来.

1.1　小球分堆问题

让我们看一个小球分堆问题.

> ［例 1.1.1］　有 n 个小球，将它们任意分成两堆，求出这两堆小球球数的乘积，再将其中一堆任意分成两堆，求出这两堆小球球数的乘积，如此下去，每次都任选一堆，将这堆任意分成两堆，求出这两堆球数的乘积，直到不能再分为止.
>
> 求证：无论怎样分堆，所有乘积的和不变.

这是一个定值问题，即所有分堆球数乘积的和与分堆方法无关，而只与球数 n 有关.

我们可以从简单入手，把 n 具体化，简单化.

最简单的，可以取 $n=1,2,3,4,5$，我们就从这里开始考虑.

为叙述方便，记这个所有乘积之和为 $f(n)$.

$n=1$ 时，只有一个球，显然，$f(1)=0$.

$n=2$ 时，两个球分成两堆，每堆一个球，就不能再分了，因此，$f(2)=1\times1=1$.

$n=3$ 时，我们用一个图来表示，③表示三个球，②和①分别表示二个球和一个球，以下类推，箭头$\longrightarrow$表示分堆的过程

$$\text{③}\longrightarrow\begin{cases}\text{①}\xrightarrow{\text{化归为 }n=1\text{ 的情形}}f(1)=0\\[2ex] \text{②}\xrightarrow{\text{化归为 }n=2\text{ 的情形}}f(2)=1\end{cases}$$

所以，$f(3)=1\times2+1=3$.

$n=4$ 时，有下面不同的分堆方法.

$$\text{④}\longrightarrow\begin{cases}\text{①}\xrightarrow{\text{化归为 }n=1\text{ 的情形}}f(1)=0\\[2ex] \text{③}\xrightarrow{\text{化归为 }n=3\text{ 的情形}}f(3)=3\end{cases}$$

所以，$f(4)=1\times3+3=6$.

另一种分堆方法是

$$④\longrightarrow\begin{cases}② \xrightarrow{\text{化归为 } n=2 \text{ 的情形}} f(2)=1\\ ② \xrightarrow{\text{化归为 } n=2 \text{ 的情形}} f(2)=1\end{cases}$$

所以，$f(4)=2\times2+1+1=6$.

因此，$f(4)=6$.

$n=5$ 时，有下面不同的分堆方法.

第一种分堆方法：

$$⑤\longrightarrow\begin{cases}① \xrightarrow{\text{化归为 } n=1 \text{ 的情形}} f(1)=0\\ ④ \xrightarrow{\text{化归为 } n=4 \text{ 的情形}} f(4)=6\end{cases}$$

所以，$f(5)=1\times4+6=10$.

第二种分堆方法：

$$⑤\longrightarrow\begin{cases}② \xrightarrow{\text{化归为 } n=2 \text{ 的情形}} f(2)=1\\ ③ \xrightarrow{\text{化归为 } n=3 \text{ 的情形}} f(3)=3\end{cases}$$

所以，$f(5)=2\times3+1+3=10$.

因此，$f(5)=10$.

以上一些特殊情况的试验，使我们能够得到什么启发呢？

以 $n=5$ 为例，我们对分堆问题进行再思考.

从题目的要求看，最终都是要分成一个球一堆，即把每一对球都被分割一次.

例如，五个球$\{A,B,C,D,E\}$，这里有 10 对球：

$$\begin{gathered}AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,\\ BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE.\end{gathered}\qquad①$$

假如第一次把它们分成 2 个一堆和 3 个一堆，设分为$\{A,\ B\}$为一堆，$\{C,\ D,\ E\}$为一堆，则相当于把

$$\{AC,\ AD,\ AE,\ BC,\ BD,\ BE\}$$

这 6 对球在拆堆的过程中被分成两堆，因此两堆球数的乘积 $2\times3=6$，

恰为被拆球对的数目.

第二次如果把$\{A,B\}$拆成两堆,则相当于拆球对$\{AB\}$为两堆,即$1\times1=1$.

第三次如果把$\{C,D,E\}$拆成$\{CD\}$和$\{E\}$,则相当于拆了数对$\{CE,DE\}$,即 $2\times1=2$.

最后,把$\{C,D\}$拆成两堆$\{C\}$,$\{D\}$,则相当于拆了数对$\{C,D\}$,即$1\times1=1$.

回顾这 4 次分堆的过程,恰好是把①中的 10 对球分成 4 次拆对:

第一次:拆 AC,AD,AE,BC,BD,BE;

第二次:拆 AB;

第三次:拆 CE,DE;

第四次:拆 CD.

由以上可以看出,把 5 个球从一堆拆成一个球一堆,恰好是把 5 个球中每两个球组成的各对球都拆了一次.我们倒过来看,把"拆对"看成"组对",这 5 个球能组成 $C_5^2=10$ 对,于是,10 就是所有分堆球数乘积之和.

因此,对 n 个球,我们可以归纳出分堆球数乘积之和为

$$f(n)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

由以上对 $n=1,2,3,4,5$ 的分析,我们可以猜测出本题的结果,也可以得到本题解法的思路.

第一种解法,从拆堆入手.

由于任意一对球,一开始两个球总是在一堆中,最终两个球被拆开了,因此不管怎么分堆,总有一个时刻,这一对球被拆开,分到两堆去,而这两堆球数之积恰好是这一步拆堆中被拆开的球的对数,因为每一对球在拆堆过程中,恰恰被拆过一次,所以,所有的乘积之和恰好就是所有"球对"的数目.

由于 n 个球,每两个球组成一对球,恰有

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

种方法,所以,所有乘积之和为

$$f(n)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

这个数目不随分堆方法的改变而发生变化.

第二种解法,从特殊归纳到一般.

在我们对 $n=1,2,3,4,5$ 的分拆中,得出

$$f(1)=0,$$
$$f(2)=1,$$
$$f(3)=3,$$
$$f(4)=6,$$
$$f(5)=10.$$

以上各数恰为 C_1^2,C_2^2,C_3^2,C_4^2,C_5^2.

由此猜测,对 n 个球分堆的结论是

$$f(n)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

下面只需用数学归纳法进行证明.

当 $n=1,2$ 时,猜测是正确的.

假设当 $n\leqslant k$ 时,所有分堆乘积之和为 C_n^2.

那么,当 $n=k+1$ 时.

把 $k+1$ 个球分成两堆,一堆为 $m(m\leqslant k)$个,一堆为 $k+1-m$ 个,由题设及归纳假设,有

$$\begin{aligned}f(k+1)&=m\cdot(k+1-m)+C_m^2+C_{k+1-m}^2\\&=\frac{2mk+2m-2m^2+m^2-m+k^2-2mk+m^2+k-m}{2}\\&=\frac{k^2+k}{2}\\&=\frac{k(k+1)}{2}\\&=C_{k+1}^2.\end{aligned}$$

于是,$n=k+1$ 时,猜测成立.

由以上,对所有正整数 n,猜测成立.

由数学归纳法,所有分堆乘积之和为

$$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

第三种解法,用递推方法求解.

先把 n 个球分成 m 个球一堆,$n-m$ 个球一堆,这两堆球数的乘积为 $m(n-m)$,而把 m 个球按题意分堆的结果为 $f(m)$,把 $n-m$ 个球按题意分堆的结果为 $f(n-m)$,于是有递推公式

$$f(n)=m(n-m)+f(m)+f(n-m). \qquad (*)$$

且 $f(1)=0,f(2)=1$.

对递推公式(*),取 $m=1$,由(*)可得

$$f(n)=f(n-1)+(n-1),$$

进而有

$$f(n-1)=f(n-2)+(n-2),$$

$$f(n-2)=f(n-3)+(n-3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2)=f(1)+1$$

以上诸式相加得

$$f(n)=f(1)+1+2+\cdots+(n-1),$$

$$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

从这个题目的分析和解法中,有些什么启发呢?

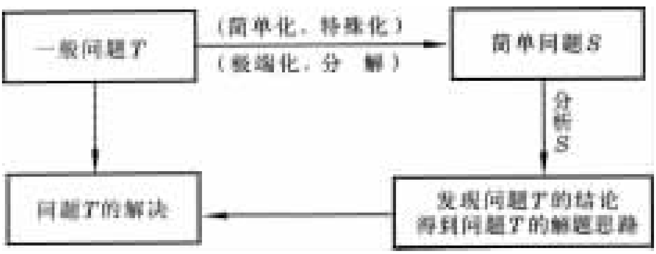
对 n 个球分堆是一个一般性题目,在思考这个题目时,我们是从简单情形入手,即 $n=2,3,4,5$ 的情形,用一一试验的方法进行探索,从中得到了对题目的本质认识,即把 n 个球分堆,一次一次地分,分得不可再分,本质上就是把这 n 个球中所有可能成为一对的球都拆开了,因此,所有分堆球数的乘积之和就是这 n 个球,每两个组成一对的所有可能的结果,即 $f(n)=C_n^2$,这种从简单情形入手的思考,不仅可以猜测出

一般结果，还可以获得解题的思路，这就是上面的解法一，解法二，而第三种解法则是把 n 个球分堆问题，化归为比 n 小的 m 个球及 $n-m$ 个球的分堆问题，即把一般情形化归为简单情形，而在从递推公式（※）推导出 $f(n)$ 的表达式过程中，我们实际上又用了对 n 的特殊分法取 $m=1$，即把 n 个球分成 1 个球一堆和 $n-1$ 个球一堆，从而建立了函数方程 $f(n)=f(n-1)+(n-1)$，再推出一般结论.

从上面对 n 个球分堆的研究中，可以看出，我们采用的是一种特殊化的解题策略，这种策略包括下面几个内容：

1. 从简单情形入手；
2. 化归为简单情形；
3. 着眼于极端情形；
4. 考虑特殊对象.

特殊化解题策略的解题思路大致是：



1.2　从简单情形入手

G·波利亚在他的名著《数学与猜想》中有这样一段叙述：

“如果我们要考察一个凸多边形的命题，那么就可以先从正多边形看起，特殊地，还可以先从正三角形看起，

如果我们要检验某个关于素数的命题，那么就可以先从一些具体的素数，例如先从 17 看起，

如果我们讨论的是一道与一切正整数 n 有关的命题，那么，最好还

是先来看 $n=2$ 和 3 的情形.”

华罗庚先生曾指出:“先足够地退到我们所最容易看清楚问题的地方,认透了,钻深了,然后再上去.”

[例 1.2.1] 在线段 AB 的两个端点,一个标以红色,一个标以蓝色,在线段中间插入 n 个分点,在各个分点上随意地标上红色或蓝色,这样就把原线段分为 $n+1$ 个不重叠的小线段,这些小线段的两端颜色不同者叫做标准线段.

求证:标准线段的个数为奇数.

我们从简单入手.

最简单的情形就是在 AB 之间不插入点,这时 AB 就是一条标准线段,即标准线段只有一条,其个数显然是奇数.

其次是在 AB 之间有一个点,这个点可能是红色,也可能是蓝色,这时三个点为(红,红,蓝)或(红,蓝,蓝),由于(红,红),(蓝,蓝)是非标准线段,不在考虑之列,当然只有一条标准线段.

再次,在 AB 之间有两个点,则四点的颜色按顺序有(红,红,红,蓝),(红,红,蓝,蓝),(红,蓝,红,蓝),(红,蓝,蓝,蓝),由于相邻两点同色时为非标准线段,可以不考虑,即可以不把它们看作线段(或叫作零线段),则以上四种情况,相应的标准线段的条数依次为 1,1,3,1.

从以上分析,我们可以得到本题的解法:

设 AB 之间插入 n 个点,我们再把问题简单化,即着眼于标准线段,所以只需把非标准线段适当做一些加工:因为非标准线段的两个端点同色,则把这两个端点重合,即把一切非标准线段都化为零线段,这时,线段 AB 上的所有点就成为红、蓝相间的点,而 A,B 两个端点又是一红、一蓝,所以标准线段的个数是奇数.

解这个题目时,我们首先从简单情形入手,即研究 AB 之间不插入点,插入一个点,插入两个点时标准线段的计数方法,在具体

解题时，又把问题简单化，即把非标准线段都化为零线段，从而把标准线段的计数问题化归为在线段 AB 上（包括 A，B 两点）为红、蓝相间的点，因此标准线段的个数就是红、蓝相间的线段个数，即为奇数.

［例 1.2.2］ 求证对任意非负整数 n，$19\times 8^n+17$ 是合数.

我们记 $A(n)=19\times 8^n+17$.

为了证明 $A(n)$ 是合数，就要考虑 $A(n)$ 能被哪个素数整除，从而就可以选定该素数为模进行讨论，那么，究竟选取哪个素数为模呢？还是从简单情形进行探索.

$n=0$ 时，$A(0)=19\times 8^0+17=36$，$\Rightarrow 2\mid A(0)$，$3\mid A(0)$.

当 $n\geqslant 1$ 时，$A(n)=19\times 8^n+17$ 是奇数，因此，选取以 2 为模是不现实的，还要逐一进行分析.

$n=1$ 时，$A(1)=19\times 8^1+17=169$，$\Rightarrow 13\mid A(1)$；

$n=2$ 时，$A(2)=19\times 8^2+17=1\ 233$，$\Rightarrow 3\mid A(2)$；

$n=3$ 时，$A(3)=9\ 745$，$\Rightarrow 5\mid A(3)$；

$n=4$ 时，$A(4)=77\ 841$，$\Rightarrow 3\mid A(4)$；

$n=5$ 时，$A(5)=622\ 609=13\times 47\ 893$，$\Rightarrow 13\mid A(5)$；

$n=6$ 时，$A(6)=4\ 980\ 753$，$3\mid A(6)$；

$n=7$ 时，$A(7)=39\ 845\ 905$，$5\mid A(7)$.

由以上试验可以看出，n 为偶数时，取 $\bmod 3$，n 为 $4k+1$（k 为非负整数）型的数时，取 $\bmod 13$，n 为 $4k+3$（k 为非负整数）型的数时，取 $\bmod 5$.

这样，我们就可以把复杂问题分解为几个简单问题，即只要证明

$$3\mid A(2k),13\mid A(4k+1),5\mid A(4k+3)$$

这三个小问题就可以了.

下面是本题的解法，其中的 k 为非负整数.

(1) **当** $n=2k$ **时,目标是证明** $3\mid A(2k)$.

$$A(2k)=19\times 8^{2k}+17.$$

因为目标明确,所以,我们就朝着 $A(2k)$**能被** 3 **整除的方向努力.为此把** 19 **化为** $18+1$,**把** 17 **化为** $18-1$.

$$\begin{aligned}A(2k)&=19\times 8^{2k}+17\\&=18\times 8^{2k}+18+8^{2k}-1\\&=18(8^{2k}+1)+(63+1)^{k}-1\\&\equiv 0 \qquad\qquad (\bmod 3).\end{aligned}$$

于是 $$3\mid A(2k).$$

因此 $A(2k)$**是合数.**

(2) **当** $n=4k+1$ **时,目标是证明** $13\mid A(4k+1)$.

$$\begin{aligned}A(4k+1)&=19\times 8^{4k+1}+17\\&=13\times 8^{4k+1}+6\times 8^{4k+1}+13+4\\&=13(8^{4k+1}+1)+48\times 64^{2k}+4\\&\equiv 48(65-1)^{2k}+4\\&\equiv(-1)^{2k}\times 48+4\\&=52\\&\equiv 0 \qquad\qquad (\bmod 13).\end{aligned}$$

于是 $$13\mid A(4k+1),$$

因此 $A(4k+1)$**是合数.**

(3) **当** $n=4k+3$ **时,目标是证明与** $5\mid A(4k+3)$.

$$\begin{aligned}A(4k+3)&=19\times 8^{4k+3}+17\\&=20\times 8^{4k+3}+15-8^{4k+3}+2\\&\equiv -8^{4k+3}+2\\&\equiv -512\times 8^{4k}+2\\&\equiv -2\times(65-1)^{2k}+2\\&\equiv -2(-1)^{2k}+2\\&\equiv 0 \qquad\qquad (\bmod 5).\end{aligned}$$

于是 $$5\mid A(4k+3),$$

因此 $A(4k+3)$是合数.

由(1),(2),(3)可知,对所有非负整数 n,$A(n)=19\times 8^n+17$ 是合数.

解这个题目是首先把问题简单化,通过对 $n=1,2,\cdots,7$ 的讨论,寻找合数的素约数,因而可以找到适当的模,然后又把这个问题分解为三个较为简单的问题,从而使题目得到证明.

[例 1.2.3] 求证:存在无穷多对正整数 a,b,满足

$$a\mid b^2+1,\qquad b\mid a^2+1.$$

我们先看简单情形.

从 $a=1,b=2$ 开始,这时有

$$1\mid 2^2+1,\qquad 2\mid 1^2+1.$$

由于 $2^2+1=5=1\times 5$,则还有

$$5\mid 2^2+1.$$

还可以有

$$2\mid 5^2+1.$$

于是又有一对新数(2,5).

由于 $5^2+1=26=2\times 13$,即有

$$13\mid 5^2+1,$$

那么,5 能整除 13^2+1 吗? 能!

$$5\mid 13^2+1.$$

再出现一对新数(5,13).

由于 $13^2+1=170=5\times 34$,即有

$$34\mid 13^2+1.$$

那么,13 能整除 34^2+1 吗? 能.

$$34^2+1=1\ 157=13\times 89.$$

即

$$13\mid 34^2+1.$$

这时又出现了一对新数(13,34).

同时还有

$$89 \mid 34^2+1,$$

又由
$$89^2+1=7\ 922=34\times 233,$$

于是有
$$34 \mid 89^2+1.$$

这样,又有一对新数出现(34,89).

进而可由 $233 \mid 89^2+1$ 猜想到下一对新数是(89,233),经验证有

$$89 \mid 233^2+1.$$

让我们观察上述各组数

(1,2),(2,5),(5,13),(13,34),(34,89),(89,233).

这些数我们相当熟悉,因为这些数都在斐波那契(Fibonacci)数列中出现过.

斐波那契数列$\{f_n\}$是

$\underline{1}$,1,$\underline{2}$,3,$\underline{5}$,8,$\underline{13}$,21,$\underline{34}$,55,$\underline{89}$,144,$\underline{233}$,…

我们上面研究的那些数,恰是斐波那契数列的奇数项.

由于斐波那契数列是无穷数列,其奇数项当然也有无穷项.

于是,我们可以设想,如果能够证明

$$f_{2n-1}\times f_{2n+3}=f_{2n+1}^2+1,$$

就有

$$f_{2n+1}\times f_{2n+5}=f_{2n+3}^2+1.$$

由此可以得到

$$f_{2n+3} \mid f_{2n+1}^2+1,\ f_{2n+1} \mid f_{2n+3}^2+1.$$

从而数对(f_{2n+1},f_{2n+3})就是所求的数对(a,b).这样,问题就会得到解决.

于是,本题转化为证明:对斐波那契数列$\{f_n\}$,有

$$f_{2n-1}\times f_{2n+3}=f_{2n+1}^2+1.\quad (n\in \mathbf{N}^*)$$

我们可以用斐波那契数列的通项公式和递推公式完成这个证明.

第一种证法用斐波那契数列的通项公式

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$