
电子图书
信息技术的结晶
人类文明的载体
网络的基本资源

解竞赛题的钥匙

一　算谜问题
——凑凑、估估、揭谜底

算谜问题是一类趣味性较强的数学游戏，它不仅加深对小学数学基本知识的理解，对于培养学生的观察能力、分析能力、推理判断能力非常有益。1958 年开始，心理学家以算谜为例子，研究人类解决问题的思维过程。由于算谜问题构思精巧，变化多端，并且具有不同的难度层次，所以经常被智力竞赛和数学竞赛所选用。

算谜问题，一般指那些含有未知数或待定的运算符号的算式。这种不完整的算式就像“谜”一样，要我们根据运算法则和逻辑推理方法进行推理、判断把算谜“猜”出来，使不完整的算式补充完整。

我们通过一些例子来讲述解答算谜问题的思考方法和技巧。

例 1　9○13○7=100

14○2○5= □

把+、-、×、÷分别填在适当的圆圈中，并在长方形中填上适当的整数，可以使上面的两个等式都成立。这时长方形中的数是几？

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”决赛试题）

解法：先考虑第一个等式，等式右边是 100 比 9、13、7 大得多，所以等式的圆圈里首先应考虑“+”或“×”，但 9×13=117 比 100 大，所以得 9＋13×7=100。

第二个等式中，题意要求在长方形中填整数，而且只剩下减号和除号，所以得 14÷2-5=2。

即长方形中的数是 2。

例 2　在 15 个 8 之间添上+、-、×、÷，使得下面的算式成立：

8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8　= 1986

（北京市第二届小学生“迎春杯”数学决赛题）

分析：这个式子数字很大，我们先凑出与 1986 较接近的数，如：　8888÷8＋888=1999。这个数比 1986 大 13，这样原问题就转化为：能否用剩下的七个 8 经适当的四则运算得出一个等于 13 的算式呢？还是用上面的想法：11 与 13 较接近，而 88÷8=11 这样一来问题就转化为能否用剩下的四个 8 写出一个等于 2 的算式。而这是不难办到的。如：　8÷8＋8÷8＝2

解法：　8888÷8＋888-88÷8-8÷8-8÷8=1986

用上面类似的方法你能找到另外的解答吗？

以上二例是填写运算符号，例 1 是根据运算结果进行逆推，是解答算谜问题的常用方法。例 2 用逆推的方法比较麻烦，因此，我们先经过估算，凑出一个与结果较接近的数，然后凑凑、算算，使算式成立。

下面我们来讲述填补等式或竖式的算谜问题。

例 3　将 0，1，2，3，4，5，6 这七个数字填在圆圈和方格内，每个数字恰好出现一次，组成只有一位数和两位数的整数算式。问填在方格内的数是几？

○×○=□=○÷○

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”复赛试题）

解法：要求用七个数字组成五个数，根据算式，应当三个数是一位数，两个二位数，二位数应是积和被除数。

0 和 1 不宜做一位数，一位数如果是 2，则会出现 2×6＝12 （2 重复出现）， 2×5=10 （经试验不行）， 2×4＝8（7 个数中没有 8）， 2×3=6 （6 不能成为商），因此，2 也不能做一位数。

0、1 和 2 只能用来组成二位数，它可以组成 12 和 21，经验算，21 不能填在方框内，于是得到 3×4=12=60÷5。

即填在方框内的数是 12。

例 4 下面的算式里，每个方框代表一个数字。问：这 6 个方框中的数字的总和是多少？

（1991 年第三届“华罗庚金杯赛”初赛试题）

```
  □□□
 +□□□
 ─────
 1991
```

分析：解决这样的问题，我们需要认真审题，抓住式中的某些特点，寻找突破口。

这个题目的突破口在百位上，由于十位至多向百位进 1，且百位上两个□内数字之和加上十位向百位的进位等于 19，可以推出百位上两个□内数字均填 9，且十位向百位进 1；同理，由于十位上两个□内数字之和加上个位向十位的进位等于 19，可以推出十位上两个□内数字均填 9，且个位向十位进 1；由此推出个位上两个□内数字之和等于 11。

解法：由于两个加数的十位和百位数字均为 9，两个加数的个位数字之和为 11，因此所有□内数字之和为 9×4+11=47。

例 5 右式的每个□内填入“0，1，2，3，4，5，6，7，8，9”中的某一个数字，使得该除式成立。

```
      1□
  □□)1□2
     1□
     ───
      3□
      □□
     ───
       0
```

（上海市 1988 年小学数学竞赛试题）

分析：根据除式条件，首先可知除数的十位数字是 1，第一次相除后，余数是 32，由此推出商数的个位数字只能是 2，除数的个位数字也只能是 6。

解法：

```
      1 2
 16)1 9 2
    1 6
    ─────
      3 2
      3 2
    ─────
        0
```

例 6 在□中填上适当的数字，使算式成立。

```
        □ □
  )□ □ □ 1
   □ □ 7        ………第一行
   ─────────
   □ □ □ 1      ………第二行
   □ □ 6        ………第三行
   ─────────
         0
```

分析：因为除数是三位数，并且百位数为 6，它和商的首位的乘积也是三位数，所以商的首位是 1；

因为第一行的个位数是 7，所以除数的个位数也是 7；

因为第二行的个位为 1，所以商的个位为 3。因为 3×7= 21，必须向十位进 2，所以根据十位上的 6，推知除数的十位是 8。商与除数确定后，其他数字都易于确定。

解法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1\ 3 \\
687 & 8\ 9\ 3\ 1 \\
 & 6\ 8\ 7 \\ \hline
 & 2\ 0\ 6\ 1 \\
 & 2\ 0\ 6\ 1 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

例7　$\overline{ABCD}$表示一个四位数，EFG表示一个三位数，A、B、C、D、E、F、G、代表1～9中的不同的数字。已知$\overline{ABCD}+EFG=1993$，问：乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最大值与最小值差多少？

（1993 年第三届“华罗庚金杯赛”决赛第一试试题）

分析：这是一道数字谜的最值问题，要选择好“突破口”通常从首位或未位数字入手。

解法：由已知条件

$$
\begin{array}{r}
A\ B\ C\ D \\
+\quad E\ F\ G \\ \hline
1\ 9\ 9\ 3
\end{array}
$$

首先确定 A＝1，然后再看被加数与加数的个位数字之和：D+G=3 或 13，由题意 A、D、G 代表不同的数字，于是 D＋C≥2＋3=5，因此有 D＋G=13。同理，被加数与加数的十位数字之和：C+F≤8＋9=17。这样可以断定 C＋F=8，最后可以推知，被加数与加数的百位数字之和 B＋E=9，下面考虑乘法算式$\overline{1BCD}\times\overline{EFG}$。

为了使乘积最大，显然乘数的首位数字 E 应该尽可能大，而 B＋E=9。于是 B 应该尽可能小，这样可以断定取 B =2，E=9，根据同样理由，可以确定乘数的十位数字 F 应该取 5，因为这时 C 的最小值可取 3；最后确定 C=9，$D=4$，所以乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最大值是

1234×759=936606。

类似地，为了使乘积最小，可以依次确定 B=7，E=2，C=5，F=3，D=9，$C=4$，所以乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最小值是

1759×234=411606。

936606-411606=525000。

所以，乘积 ABCD×EFG 的最大值与最小值差 525000。

例 8　在右边的算式中 A、B 代表不同的数字，若算式成立，求出 A、B。

$$
\begin{array}{r}
A\ B \\
\times\quad B\ A \\ \hline
1\ 1\ 4 \\
3\ 0\ 4\ \ \ \\ \hline
3\ 1\ 5\ 4
\end{array}
$$

（1980 美国长岛小学数学奥林匹克竞赛试题）

解法：算式中，　AB×A=114 将 114 分解因式，　114=2×3×19，然后将 114 写成一个二位数与一个一位数的积。

114=52×2=38×3=19×6，显然 38×3 符合要求，所以 A=3，B＝8。

例 9　右边乘法算式中的来参加数学邀请赛“来参加数学邀请赛”八个字各代×赛表一个不同的数字，其中赛代表来来来来来来来来来 9，来代表______，参代表______，加代表______，数代表______ ，学代表______，邀代表______，请代表______。

（1986 年“小学生数学报”数学邀请赛试题）

解法：已知赛代表 9，赛×赛＝9×9=81，所以来代表 1，即乘积为 111111111。根据积÷一个因数＝另一个因数，可以求得被乘数 111111111÷9=123456789。从而得出：参代表 2，加代表 3，数代表 4，学代表 5，邀代表 6，请代表 7。

例 10　下面乘式中的“趣味数学”四个字各代表一个互不相同的数字，每个方框中可以填 0 至 9 任何一个数字，但最高位不能填 0，试确定算式中的每一个数字。

　　　趣 味 数 学
　×　趣 味 数 学
　　　□ □ □ □ ………… 第一行
　　□ □ □ □ ………… 第二行
　□ □ □ □ ………… 第三行
□ □ □ □ □ □ □ □ □ ………… 第四行

解法：为叙述方便，把每行中的数字从上到下称为第一行，第二行，……

从第二行看，“数”代表 0。

从第三行看，“趣”代表的数自乘后仍是一位数，所以这个数必须小于等于 3。而且当“趣”代表 3 时，“味”必须小于等于 2。

从第四行看，第三行的第一个数字必须是 9，因此“趣”代表 3。

又因“数”代表 0，如果“味”代表 1，那么第二行的第一个数“3”与第三行的第二个数“3”相加就没法进行。所以，“味”必须是 2。于是“趣”、“味”、“数”分别为“3”、“2”、“0”。

最后看第一行“学”不能大于 3，否则第一行将是五位数，又因为四个数字表示互不相同的数，所以学只能是“1”。

通过上面例题分析，解答算谜问题要注意：

1.首先要注意算式中的各个文字、字母、符号都只能取 0 至 9 中的某一个数字。

2.要认真分析已知算式中给出的各种数量关系，根据这些数量关系，选择“突破口”。

3.突破口的选择往往从确定一个数（乘数，被乘数，除数或商）的个位、首位或其他数位上的数字入手。

4.必要时要采用枚举和筛选相结合的方法，淘汰那些不合题意的解，寻找正确答案。

5.运用估算的方法，缩小枚举和试验范围以减少试验次数。

习题一

1.在 1199 之间填上适合的运算符号，使等式成立。

1199＝10

（天津市第一届小学生“我爱数学”邀请赛试题）

2.填上合适的符号，使等式成立。

4444=1

4444=2

4444=3

4444=4

4444=5

（天津市第二届小学生“我爱数学”预赛试题）

3.在下面式中填上算术运算符号、括号，使式子成立：

（1）1 2 3=1；

（2）1 2 3 4=1；

（3）1 2 3 4 5=1；

（4）1 2 3 4 5 6=1；

（5）1 2 3 4 5 6 7=1。

（1984 年重庆市小学数学竞赛试题）

4．填上适当的运算符号，使下式成立：

1　2　3　4　5＝100

（1983 年《小学生报》数学邀请赛）

5.在下面十五个 9 之间添上+、-、×、÷、（　）使下面算式成立：

9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9＝2000

6.在被除数小于 100 的情况下，在右图□内填上适当的数：

$$\square \div \begin{cases} \square = 4 \cdots\cdots 4 \\ \square = 5 \cdots\cdots 5 \\ \square = 6 \cdots\cdots 6 \end{cases}$$

（1983 年《小学生报》数学邀请赛试题）

7.在下面的□中，分别填上 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一个数字（每个只许填一次）使得带分数算式（每式只要一个填法）：

（1）$\square\square\frac{\square}{\square}-\square\square\frac{\square}{\square}$ 的值最大；

（2）$\square\square\frac{\square}{\square}+\square\square\frac{\square}{\square}$ 的值最小。

（上海第一届“从小爱数学”邀请赛试题）

8.在下面乘法竖式的□内各填上适合的数字，使算式成立：

（1）
$$\begin{array}{r} 6\ \square \\ \times\ \ 3\ 5 \\ \hline 3\ 3\ \square \\ 1\ \square\ 8\ \ \\ \hline \square\ \square\ \square\ \square \end{array}$$

（2）
$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 8 \\ \times\ \ \square\ \square \\ \hline 1\ \square\ 2\ \square \\ \square\ \square\ \square\ \ \\ \hline \square\ 9\ \square\ \square \end{array}$$

9.在下面的方框中填上适当的数字，使算式成立：

```
(1)                         (2)
          □ □                         2 □
   □7)1 9 □ □                  □□)1 □ 6 □
      □ □ 5                       1 6 □
      ---------                   ---------
          □ □                         8 □
          □ 4                         8 □
          -----                       -----
            0                           0
```

10.关于下面的算式，只知道一个数字 8，你能确定其他数字吗？

```
                □ 8 □
      □□□)□ □ □ □ □ □
          □ □ □ □
          -------------
              □ □ □ □
              □ □ □ □
              ---------
                    □
```

11.把下面除法算式中的*号填出来，成为一完整的算式。

```
             * 8 * 7
      * *)* * * * * *
          * * *
          -----------
              * *
              * *
              -------
                  * *
                  * *
                  ---
                    0
```

12.下式中不同的字母代表不同的数字，相同的字母代表相同的数字，求出这些字母各代表什么数字，算式才能成立：

```
        H  E
        H  E
(1)     H  E
     +  H  E
     --------
        A  H
```

```
(2)      A  B  C  D
      +  D  C  B  A
      --------------
      A  B  C  D  0
```

```
(3)                          (4)
     A  A  8  8  0              C  D  E  B  C
  -        B  C  B  A        -        A  B  C  D
  -----------------          -----------------
           A  B  C  B                 A  C  A  C
```

13.将下面式中的字母用数字代替，使算式成立。

```
     赛 竞 学 数 年 少 匙 钥 金
  +  8  6  4  1  9  7  5  3  2
  -----------------------------
     金 钥 匙 少 年 数 学 竞 赛
```

（1984 年上海“金钥匙”数学竞赛题）

14.下面算式中每一个字代表一个数字，不同的字代表不同的数字，当算式成立时，求每个字所代表的数字。

努 力 学 习

向 上

我 们 天 天 向 上

（1986 年北京奥林匹克学校入学试题）

15.在下面的算式中“三”、“好”、“学”、“生”四个汉字各代表一个阿拉伯数字，其中“三”代表____，“好”代表____，“学”代表____，“生”代表____。

学 生

好 学 生

三 好 学 生

1 9 8 9

（1988 年《小学生数学》报小学生数学邀请赛初赛试题）

16.在象棋算式里，不同的棋子代表不同的数字，请你想一想棋子各代表哪些数字。

兵 砲 马 卒

\+ 兵 砲 车 卒

车 卒 马 兵 卒

17.下列各题的每一个汉字代表一个数字，不同的汉字代表不同的数字，试求出下列各算式。

(1)

从 小 爱 数 学

× 4

学 数 学 小 从

(2)

1 红 花 映 绿 叶

× 3

红 花 映 绿 叶 1

(3)

蜜 蜜 蜜

× 蜜 蜜 蜜

蜜 蜂 酿 蜂 蜜

（4）优优优优优优÷学=学习

再学习

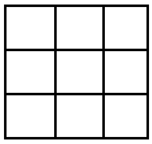
二　填数问题

——从“九宫算”谈起

在填数问题中，小学生常常采用“凑”的方法，通过几次试验来寻找解答。如果我们深挖其中的道理，就会找到一些解题规律，使认识进一步深化。在这个意义上讲，填数问题是一种很好的“锻炼思维的体操”。

我国古代人民对数学的发展作出过许多杰出贡献，著名的“九宫算”就是其中之一，最早提出的问题是：

将 1 至 9 这九个数字填在右图中九个方格里使每一横行、每一纵列和两个对角线上的数之和相等。



这种图形填数，我国古代称为“九宫算”、“纵横图”，国外叫做幻方。“九宫图”就是将 1 至 9 的九个数填在 3×3 的小格内，它是一个三阶幻方。传说大禹治水的时候，洛水中浮出一只神龟，龟背上驮了一个“洛书”图。将它译释成今日数字即为一个三阶幻方。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0014_1.bmp}

一般地，在 n×n 的方格内，既不重复又不遗漏地填上 n^2 个自然数，每个数占一格，并使每行、每列及两条对角线上 n 个自然数的和都相等，这样排成的数表称为 n 阶幻方。都相等的和叫幻和。

幻方曾使不少数学爱好者入迷。大数学家欧拉、著名物理学家富兰克林就曾经对幻方很感兴趣。目前，最大的幻方是 105 阶，它是由美国一位 13 岁少年作成的。

下面我们来谈谈如何填好“九宫图”。

例 1　填九宫图所表示的幻方。

解：首先应解决二个问题：

（1）每行、每列的和是多少？

（这个和叫幻和）

（2）中间位置的数应当填几？

（求幻和时几次用到了它）

为了叙述方便，我们把每个方格内要填的数字用字母表示（图 1）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0015_1.bmp}

首先求出幻和。因为 $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3=1+2+3+4+\cdots\cdots+9=45$，$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=$幻和，所以，幻和×3=45，幻和=45÷3=15。

其次，确定中心数 b2。

因为 $(a_1+b_2+c_3)+(a_3+b_2+c_1)+(a_2+b_2+c_2)+(b_1+b_2+b_3)=15\times4$

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3+3b_2=60$，

所以 $b_2=5$，即中间数应当是 5。

最后，考虑四个角上应填什么数

假设 a_1 为奇数，那么

（1）如果 a_2 也是奇数，那么 $a_1+a_2+a_3=a_1+5+c_3=a_2+5+c_2=15$。于是 a_3、c_3、c_2 也都是奇数，连同 b2=5 共有六个奇数，矛盾（如图 2）。

（2）如果 a_2 为偶数，那么 a_3、c_2 为偶数。又因为 c_3 为奇数，$a_3+b_3+c_3=c_1+c_2+c_3=15$，所以 b_3、c_1 为偶数。这样就有 5 个偶数，矛盾（如图 3）。

所以 a_1 不能为奇数。

同理可证 c_1、c_3、a_3 都不能为奇数。弄清了这一点就可填写三阶幻方（如图 4、图 5）。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 5

例 2　把 4 至 12 填在 3×3 的方格内，制成三阶幻方。

解：（1）求幻和：（4＋5＋……＋12）÷3＝72÷3=24。

（2）求中心数：∵72＋3b2=24×4，∴3b2=24，∴b2=8。（3）确定四角数：由上题九个数中有五个为奇数，中心数为奇数，四角数为偶。现在九个数中五个为偶数，中心数为偶数，猜想四角数应为奇数，经验证这个猜想是正确的，所以在四个角上填 7、5、9、11。填其余数字就容易了（如图 6）。

7	12	5
6	8	10
11	4	9

图 6

数阵是一种由幻方演变而来的数字图。数阵可以分为辐射型、封闭型、既辐射又封闭的复合型数阵。

例 3　将 1 至 7 七个数字填入图中的圈内，使每条线上的三个数的和相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0017_1.bmp}

解：首先确定中心数。不妨设中心数为 a，则 1+2+3+4+5+6+7+2a 能被 3 整除。

所以，　（28＋2a）÷3=28÷3＋2a÷3。其中，28÷3 商 9 余 1。因此，2a÷3 的余数必须是 2，那么当 a 是什么数时 2a÷3 的余数才是 2 呢？为此，我们在 1～7 六个数中试验选择如下：

当 a＝1 时，　2a÷3=2÷3 商 0 余 2；（符合要求）

当 a＝2 时，　2a÷3=4÷3 商 1 余 1；

当 a＝3 时，　2a÷3=6÷3 商 2 余 0；

当 a=4 或 7 时，余数也是 2。（符合要求）

所以，当 a=1、4、7 时，2a÷3 的余数是 2，即中心数为 1，4，7。

当 a＝l 时，（28＋2）÷3＝10，所以除中心数外，其他两个数的和是 10-1＝9，只要把 2、3、4、5、6、7 按和为 9 分成三组填入○内即可。

当 a=4 时，（28＋8）÷3=12，除中心数外其他两个数的和为 8。

当 a＝7 时，　（28＋14）÷3=14，除中心数外其他两个数的和为 7。

因此，可得三个解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0018_1.bmp}

例 4　将 1 至 6 分别填入圈内，使各边上三个○内数字和相等。

解：首先应确定三个顶点上○内的数字。

用 k 表示每边上三个○内的数字和，用 a、b、c 分别表示三个顶点○内的数字，因为三个顶点上的数在求和时多用了一次，所以 1+2+3+4+5+6+a+b+c＝3k，21+a+b+c＝3k，即 k=（21+a+b+c）÷3。

又因为 a、b、c 可以分成七组数：1，2，3；2，3，4；3，4，5；4，5，6；1，2，6；1，3，5；2，4，6。

我们把这四组 a＋b＋c 的和与 k 的值列表如下：

a　b　c	a+b+c	k=（21+b+c）÷3
1、2、3	6	9
1、2、6	9	10
2、3、4	9	10
1、3、5	9	10
3、4、5	12	11
2、4、6	12	11
4、5、6	15	12

从表中看出，当 a＋b＋c 的最小值是 1＋2＋3=6 时，k 的最小值是 9。

当 a＋b＋c 的值最大是 4＋5＋6＝15 时，k 的最大值是 12。

1.当 a＋b＋c=6，k=9 时，a、b、C 分别是（1，2，3）、（1，3，2）、（2，1，3）、（2，3，1）、（3，1，2）、（3，2，1），那么，其余三个○内分别填 4、5、6。我们可以填出六种解法：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0019_1.bmp}

从上面答案可发现，只要把一个解中的数左右旋转或适当调换就可以得到其余的五个解。我们把第一个解叫做基本解，其余的五个解看作与基本解是同一个解。

2.当 a＋b＋c=9，k=10 时，试验如下：

（1）如果 a=1，b=2，c=6（如右图），那么在三角形底边上只有填 2，才能使底边上○内数的和是 10，但这样重复，因此无解。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0020_1.bmp}

（2）如果 a=1，b=3，c=5，那么其余三个○内分别填 2、4、6，得本题的第二个基本解。

（3）a=2，b＝3，c=4 时，无解。

3.当 a＋b＋c=12，k=11 或 a＋b＋c=15，k=12 时，用上面同样的方法得到下面的两个基本解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0020_2.bmp}

从上面分析，我们可以看到，每一个基本解可得六个解，本题共有 24 个解，但是今后解答这类问题时，只要求基本解就可以了。

例 5　把 1 至 8 八个数分别填入图中的八个○内，使每个圆周上五个数的和都等于 21。

解：设两个圆的交叉点上的两个○内各是 a、b。那么，在计算两个大圆周上 10 个数的和时，a、b 两数都多加了一次，所以 1＋2+……＋8＋a＋b 除以 2 应该是 21，即 36＋a＋b=21×2，从而得 a＋b=6。

在 1 至 8 八个数中，只有 1 和 5，2 和 4 这两组数的和是 6。

（1）如果中间两个○内分别填 1 和 5，另外三个○①内三个数的和都应当是 21-6=15，在 2，3，4，6，7，8 这六个数中，和相等的数只有 2，6，7 和 3，4，8。

（2）如果中间两个○内填 2 和 4，其他的数可分成两组 1，6，8 和 3，5，7，分别填入○中。

例 6　把 1 至 7 七个数填在右图的○内，使每条线上三个数的和都相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0021_1.bmp}

（1988 年无锡市小学生数学竞赛试题）

解：本题是例 3 的发展，设中心数为 x，其余各数分别为 a、b、c、d、e、f。根据例 3 的分析，x 可取 1、4、 7。

（1）当=1 时，则得每条线上三个数的和为 10。

a+b+c+d+e+f=28-x=-27。

但 a+c+e=10，b+d＋f＝10，

于是 a+b+c+d+e+f=20。

两种结果产生矛盾，因此，x 不能为 1。

（2）当 x＝4 时，则得每条线上三个数的和为 12。

a+b+c+d+e+f=28-x=24。

但 a+c+e＝12，b+d+f=12，

于是 a+b+c+d+e+f＝24。

两种结果一致，因此，x 可为 4。

因为 1+7+4=12，6+2+4＝12，5+3+4=12，而且 7+2+3= 12，1＋6＋5=12，所以可得解（见右图）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0022_1.bmp}

图中当 1 的位置确定后，5 与 6 可以对换，（3 与 2 也相应的对换），因此有两种不同的形式。而 1 在外圈上有三个位置可选择，有三种不同形式，这样就有 2×3=6 种不同形式。外圈上三个数与内圈上三个数可同时交换，因此，本题有 6×2=12 种不同形式。

（3）当 x=7 时，无解。

习题二

1.在下面的方格内，每边加起来的数都是 5，总数是 12，现在请你用任何数字重新排列，每边加起来仍是 5，但总数是 13、l4。

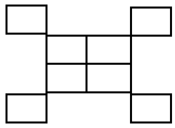
2	1	2
1		1
2	1	2

2.把 5、7、9、11、13、15、17、19、 21 分别填入下面正方形的方格里，使每行、每列、对角线上三个数的和都相等。

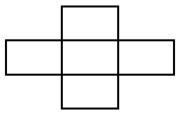
3.右图中的 A=______，B=______ ，C= ______，D=______ ，E= ______ 时，它可能构成一个三阶幻方？

19	A	14
10	B	C
D	18	E

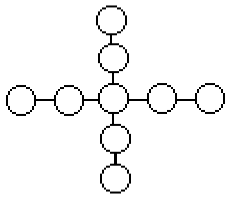
4.将 1 至 8 八个数填入右图的八个方格内，使上面四格，下面四格，右边四格，中间四格，对角线上四格和四角四格内的四个数的和都是 18。



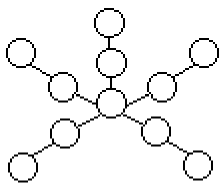
5.用 1 至 5 这五个数填入右图中使每行和每列的 3 个数的和相等。



6.将 1 至 9 这九个数分别填入右图的〇内，使每条辐射支上的三个数的和都相等。



7.将 1 至 11 这 11 个数，分别填入右图中，使每条线段上三个〇内数的和都相等。



8.在右图的每个圆圈里填上适当的质数（不得重复），使每条直线上三个数的和都相等，且均为偶数。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_1.bmp}

（安庆市首届小学数学竞赛试题）

9.请将 1 至 8 这八个数字填入右图的空方框内，使每条直线上三个数的和都为质数。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_2.bmp}

（张家口市 1990 年小学五年级数学竞赛（复赛试题））

10.把 1 至 7 七个自然数分别填入右图中的圆圈里,使每条线上三个数的和相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_3.bmp}

（1990 年济南历下区小学五年级数学竞赛试题）

11.把 20、21、22、23、24、25 这六个数分别放在图中的一个圆圈中，使这个三角形各边上的三个数之和是相等的。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_4.bmp}
（天津市第二届“我爱数学”竞赛题）
12.将 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数分别填在右图的三角形的圆圈里，使每条边上的四个数字和等于 17。
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_5.bmp}
（1983 年洛阳市小学生数学竞赛试题）
13.如图，四个小三角形的顶点处有六个圆圈。如果在这些圆圈中分别填上六个质数，它们的和是 20，而且每个小三角形三个顶点上的数之和相等。问这六个质数的积是多少？
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_1.bmp}
（1986 年“华罗庚金杯”决赛试题）
14.把 1 至 10 这十个数填入右图的十个○内，使每个正方形四个顶点上各数的和都等于 24。
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_2.bmp}
15.把 5、6、7、8、9、10、11、12、13、14 填入右图中的小圆中，使每个大圆圈中六个数的和是 55。
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_3.bmp}
（长春市 1988 年四年级数学竞赛题）
16.将 195、196、197、198、199、200、201 七个数分别填入右图的小圆圈内，使每条直线上和每个圆上的三个数的和都是 594。
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_4.bmp}
（石家庄市长安区 1989 年五年级数学复赛试题）
17.将 1 至 10 这十个数分别填入图中○内，使每条线段上四个○内数的和相等。每个三角形三个项点上○内数的和也相等。
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0026_1.bmp}

三　数列问题

——从高斯的故事谈起

高斯是 19 世纪德国的著名数学家。他从小喜欢学数学，善于思考，聪明过人。据说他在读小学三年级的时候，一次老师布置一道题目：“把从 1 到 100 的自然数加起来，和是多少？”正当同学们埋头一个数一个数加的时候，小高斯很快报出答数为 5050，这使得老师非常吃惊。

小高斯是采取什么办法巧妙地进行计算的呢？

先来观察一下题目，发现数字的排列是有规律的。

1+2+3+4+5+6+7+8+9+……+100。

这是按自然数排列的，后面一个数都比前面一个数大 1，好比上体育课同学们排成一队，叫做队列，这就叫做数列。请观察下面的数列：

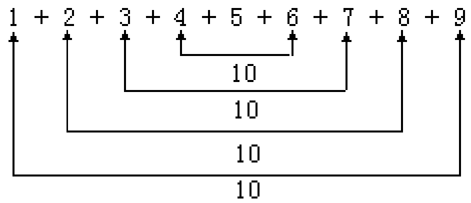
①1，3，5，7，9，11；

②2，6，　10，　14，　18，22；

③5，　10，　15，　20，　25，　30。

这些数列的两个数之间的差都是相等的，所以叫做等差数列。既然这些数列排列都有规律可找，因此可以发现许多数学问题，这些就是数列问题。

小高斯做的题目是最简单的数列问题。100 个数相加大多了。我们先用九个数来研究一下：



这样凑成 4 个 10 再加上 5，和为 45。

还有一个办法：

$$\left.\begin{array}{l}1+2+3+4+5+6+7+8+9=\text{和}\\ 9+8+7+6+5+4+3+2+1=\text{和}\end{array}\right\}2\text{倍和}$$

$$10+10+10+10+10+10+10+10+10=90$$

把数列颠倒过来相加，所得结果是和的 2 倍，只要除以 2 就得到答案：

和＝90÷2＝45。

按照这个道理，可以得到求等差数列的和的一般公式：

（首项+末项）×个数÷2

把小高斯做的题目：　1+2+3+4+5+…+100 代入公式：

（1+100）×100÷2

=101×100÷2

=10100÷2

=5050

例 1　1+2+3+…+250＝31375

（1+250）×250÷2

=251×250÷2

=62750÷2

=31375

例 2　1+3+5+7+9+…+199＝10000

这是一列奇数数列，也可代入公式

（首项十末项）×个数÷2

（1+199）×100÷2=20000÷2=10000

怎样算出连续奇数的个数，不必一个一个地数出来。只要（首项+末项）÷2，就能求出个数。

例 3　101+103+105+…+199=？

这道题和上面讲的有所不同。它虽然也是求连续奇数的和，但却不是从 1 开始的。其实也不难，只要先算出从 1 到 199 的连续奇数的和，再减去从 1 到 99 的连续奇数的和，问题就解决了。

∵1+3+5+…+99=2500，

1+3+5+…+199=10000，

∴101+103+105+…+199=10000-2500＝7500。

例 4　2+4+6+…+100=？

这道题一看就知道，是求从 2 开始连续偶数的和。同样可用上面的公式代入

（2+100）×50÷2=5100÷2=2550。

要知道从 2 开始连续偶数的个数，也不用一个一个地去数，只要把最后那个偶数除以 2 就可以了。

例 5　五个连续偶数的和是 150，这五个偶数是哪几个数？

粗看这道题目觉得很难，感到无从下手。可以先枚举几组五个连续偶数观察一下：

$$\underbrace{46 + 48 + \boxed{50} + 52 + 54}_{\text{2个50}} = \overset{\boxed{\text{5个50}}}{\downarrow\atop 250}$$

$$\underbrace{66 + \overbrace{68 + \boxed{70} + 72}^{\text{2个70}} + 74}_{\text{2个70}} = \overset{\boxed{\text{5个70}}}{\downarrow\atop 350}$$

请你仔细观察分析，就会发现规律，五个连续偶数的和，凑巧是中间数的 5 倍。中间数找到了，前后四个数就能写出来了。解例 5：

先求出五个连续偶数的中间数：150÷5=30。

所以这五个连续偶数是：26，28，30，32，34。

例 6　已知四个连续偶数的和是 84，这四个偶数是哪几个数？

这道题是四个连续偶数，没有中间数，上面的办法不适用了，要根据上题的思路重新想办法。先枚举几组题目观察一下：