解读国内外初中数学竞赛试题

主　编　刘明玉
副主编　张晓玲　彭爱民
顾　问　张　垚　吴天锡

广西民族出版社

图书在版编目（CIP）数据

解读国内外初中数学竞赛试题/刘明玉主编. —南宁：广西民族出版社，2006. 5
ISBN 7-5363-5107-0

Ⅰ. 解… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 数学课—初中—解题 Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 022259 号

解读国内外初中数学竞赛试题

刘明玉　主编

出版发行	广西民族出版社 （地址：南宁市桂春路 3 号　邮编：530021）
发行电话	（0771）5523216　5523226　5523246（传真）
E-mail	CR@gxmzbook.cn
责任编辑	黄玉群
特邀编辑	黄晓鸣
封面设计	何世春
版式设计	林武圣
责任校对	苏兰清
责任印制	余秀玲
印　　刷	广西教育考试印刷厂
开　　本	890×1240　　1/32
印　　张	10
字　　数	258 千
版　　次	2006 年 5 月第 1 版
印　　次	2006 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	1—3500 册

ISBN 7-5363-5107-0/G·2023　　定价：18. 00 元

前　　言

数学是锻炼思维的体操，特别是解数学竞赛题那种严密的逻辑推理、灵活多变的方法和技巧更是对思维的一种特殊锻炼. 这种锻炼能使人真正体验到成功的愉悦感和数学美感.

长期的教学实践表明,具有一定数学解题经验积累的学生,特别是具有解数学竞赛题的技巧、方法、思维积累的学生,都能轻松地愉悦地完成高中学业而进入重点大学,继续学习. 当然,也有不少学生对解竞赛题有一种畏惧心理. 究其原因,是他们面对竞赛题,不知从何着手,很难找到解题切入点,也找不出思维受阻的原因,从而游离于竞赛题这座五彩斑斓的数学王国之外,无法体验解竞赛题那种特有的快乐. 基于此,我们在广西民族出版社黄玉群老师指点下编写了《解读国内外初中数学竞赛试题》,作为训练学生数学思维,提高学生数学解题能力的辅导读物.

本书精选近几年国内外的部分数学竞赛试题约380道,按初中数学教科书的知识内容、顺序来分类,并对每一道题进行了详细的分析、解答和点评. 特别值得提醒的是,读者在读此书时,最好先不要看分析解答,应独立思考做题,当在做的过程中思维受阻或自己得出答案后,再与书中对应的解答进行比较,这样有助于启发、提高自己的思维能力. 数学家波利亚说过:“没有任何一道题是可以解答得十全十美的,总剩下些工作要做. 经过充分的探讨总结,总会有点滴发现,总能改进这个答案,而且在任何情况下,至少我们能提高自己对这个解答的理解水平.”

本书得以付梓出版，除感谢广西民族出版社编辑同志的辛勤

劳动外,万分感谢我的老师、长期从事数学奥林匹克研究的资深专家、中国数学奥林匹克高级教练、湖南省数学奥林匹克主教练张垚教授在百忙中抽时间为本书作序. 这既是对我们的鼓励和鞭策,也是对本书读者的一种期望. 同时感谢在本书编写过程中给予极大关心、鼓励的赵树琴、吴天锡、张大庆等领导和湘西自治州教科院李文英、李代凤及保靖民族中学数学教研组彭一慧、陈新华、龙清平、向宏江、吴良刚、彭司清、王顺序等老师的鼎力支持.

限于我们的水平,书中疏漏之处在所难免. 敬请读者赐教,倘若读者能从书中略受裨益,我们便不甚欣慰.

编　者

2006年3月23日

序

目前,各种层次的数学竞赛已经成为大家非常关注的事情,它不仅吸引广大师生积极地参与，而且也日益得到全社会的重视.实践证明,数学竞赛活动在激发学生学习数学的兴趣,开发学生智力,培养学生钻研精神,增强学生探索能力和创造能力等方面有着积极的作用. 通过数学竞赛活动,不仅有利于培养和发现优秀学生,而且有利于学有余力的学生加强数学基础知识,开阔视野,扩大知识面,促进思维发展,提高分析问题和解决问题的能力. 同时,教师通过参与竞赛培训活动,有利于提高自身的教学能力和科研水平,促进数学课程的改革.

虽然目前各种初中数学竞赛的辅导书籍已经出版了很多,但本书的出版仍有必要,因为它有以下几个鲜明的特点.

1. **新颖性:**本书注意从近几年国内外的各类初中数学竞赛试题中精选典型的问题，使广大师生易于了解最新的命题信息和竞赛考试的基本要求.

2. **资料性:**本书从各类数学竞赛的试题中精选了约380道题，内容全面丰富，覆盖了初中数学竞赛的相关知识和最常见的各种解题方法和技巧，为广大师生开展数学竞赛活动提供了翔实的资料.

3. **启发性:**书中每个问题都给出详尽的分析和完满的解答，具有较强的启发性.

4. **实用性:**全书按照知识的内容和解题方法归类,并与教材基本同步,方便于师生结合教学进度同步使用.

因为学数学的最好方法是做数学题，故我们建议读者使用本书时,最好自己先独立思考,去探求每一个问题的解答,总结同类问题的解题规律，得出问题的解答后再与本书中的解答进行分析和比较，这样做比直接阅读更有利于提高读者的分析问题和解决问题的能力. 即使做不出来,做了以后再看,并分析自己思维受阻的原因,从中汲取经验和教训,对提高自己的思维能力也是大有好处的. 如果你能独立做出其中的某道题或几道题,那么就说明你具有一定的思维能力. 如果你对某道题目有自己独特的解法,就说明你有较好的创造能力,这是最可贵的. 我们期望读者通过使用本书后不仅能提高自己的思维能力,而且能享受到解题后的快乐.

张　垚
2006年3月20日
于湖南师范大学

目　　录

代数部分

一、实数 …………………………………………………………… (3)
(一)质数、合数、整除 …………………………………………… (3)
(二)实数的四则运算 …………………………………………… (12)
(三)二次根式的化简与求值 …………………………………… (18)
(四)绝对值与数轴 ……………………………………………… (21)
(五)实数大小的比较 …………………………………………… (28)
(六)新概念命题及其运算 ……………………………………… (34)
二、整式的运算 ……………………………………………………… (39)
三、分式的运算 ……………………………………………………… (55)
四、方程及其应用 …………………………………………………… (69)
(一)一元一次方程及其应用 …………………………………… (69)
(二)一元二次方程及其应用 …………………………………… (73)
(三)二元一次方程组及其应用 ………………………………… (89)
(四)多元方程(组)、高次方程及其解法 ……………………… (98)
(五)分式方程及其解法 ………………………………………… (108)
(六)无理方程及其解法 ………………………………………… (112)
(七)不定方程及其解法 ………………………………………… (116)
五、不等式和不等式组及其应用 …………………………………… (125)
六、函数及其应用 …………………………………………………… (133)
(一)一次函数 …………………………………………………… (133)

(二)二次函数 …………………………………………… (145)
七、实际应用 …………………………………………… (155)
(一)最值问题 …………………………………………… (155)
(二)市场经济问题 ……………………………………… (171)
(三)行程问题 …………………………………………… (185)
(四)工程问题 …………………………………………… (192)

几何部分

一、线、角及平行线分线段成比例 ……………………… (199)
(一)线、角 ……………………………………………… (199)
(二)平行线分线段成比例 ………………………………… (209)
二、三角形 ……………………………………………… (217)
(一)三角形的基本知识 …………………………………… (217)
(二)相似三角形、全等三角形 …………………………… (236)
三、四边形 ……………………………………………… (253)
(一)四边形 ……………………………………………… (253)
(二)平行四边形、长方形 ………………………………… (257)
(三)正方形、菱形 ……………………………………… (260)
(四)梯形 ………………………………………………… (273)
四、多边形 ……………………………………………… (283)
五、圆 …………………………………………………… (291)
六、图形面积的计算 …………………………………… (303)

代数部分

一、实数

（一）质数、合数、整除

1. 若 a，b，c 是 1998 的三个不同的质因数，且 $a<b<c$，则 $(b+c)^a=$__________.

（第 12 届“希望杯”数学邀请赛试题）

解析：$\because$ a, b, c 是 1998 的三个不同的质因数，且 $a<b<c$，而 $1998=3^3\times37\times2$，

$\therefore$ $a=2$，$b=3$，$c=37$，

$\therefore$ $(b+c)^a=(3+37)^2=1600$.

故填：1600

点评：本题考查学生对算术基本知识的理解、掌握情况及应用能力.任何一个自然数分解成一些质因数的乘积时，这种分解是唯一的.

2. 已知正整数 p，q 是质数，且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数，试求 p^q+q^p 的值.

（1997 年湖北省荆州市数学竞赛试题）

解：由 p，q，$7p+q$，$pq+11$ 均为质数，知 p，q 不可能同为奇数，

$\therefore$ p，q 中必有一个是 2.

当 $p=2$，$q=3$ 时，$7\times2+3=17$ 是质数，

$2\times3+11=17$ 是质数.

符合题意.

当 $p=3$, $q=2$ 时, $7\times 3+2=23$ 是质数,

$3\times 2+11=17$ 是质数.

事实上,若 $p=2$, $q=3k+1$ 时,

$7p+q=2\times 7+3k+1=3k+15=3(k+5)$是合数,

故 $p=2$, $q=3k+1$ 不符合题意.

若 $p=2$, $q=3k+2$ 时,

$pq+11=2(3k+2)+11=6k+15=3(2k+5)$是合数,

故 $p=2$, $q=3k+2$ 不符合题意.

同理可证 $q=2$, $p=3k+1$,

及 $q=2$, $p=3k+2$ 不符合题意.

故 $p^q+q^p=2^3+3^2=17.$

点评: 本题考查学生对质数、偶质数概念的理解、掌握情况及应用能力、全面分析问题和观察问题的能力

3. 已知一个七位自然数 $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数,试求 $950x+24y+1$ 的值.

(第 9 届"希望杯"数学邀请赛试题)

解: $\because$ $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数, $99=11\times 9$,且 9 和 11 互质,

$\therefore$ $\overline{62xy427}$ 能同时被 9 和 11 整除,

即 $6+2+x+y+4+2+7=21+x+y$ 能被 9 整除;

$\because$ $0\leqslant x\leqslant 9, 0\leqslant y\leqslant 9$,

$\therefore$ $x+y=6$,或 $x+y=15$.

又 $\because$ $\overline{62xy427}$ 能被 11 整除,

$\therefore$ $6+x+4+7-(2+y+2)=13+x-y$ 能被 11 整除,

又 $\because$ $0\leqslant x\leqslant 9$, $0\leqslant y\leqslant 9$,

$\therefore$ $x-y=-2$ 或 $x-y=9$,

故 $\begin{cases}x+y=6,\\x-y=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=6,\\x-y=9,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=15,\\x-y=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=15,\\x-y=9.\end{cases}$

由$\begin{cases}x+y=6,\\x-y=-2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$

由$\begin{cases}x+y=6,\\x-y=9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=7.5,\\y=-1.5\end{cases}$（舍去），

由$\begin{cases}x+y=15,\\x-y=-2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=6.5,\\y=8.5\end{cases}$（舍去），

由$\begin{cases}x+y=15,\\x-y=9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=12,\\y=3\end{cases}$（舍去）.

当 $x=2$，$y=4$ 时，

$$950x+24y+1=950\times2+24\times4+1=1997.$$

点评：本题考查学生对能被 9、被 11 整除的数的特征及列二元一次方程组、解方程组、求代数式的值等数学能力.

4. 能同时表示成 9 个连续整数之和、10 个连续整数之和以及 11 个连续整数之和的最小正整数是哪一个？

（第 11 届美国中学数学邀请赛试题）

解：设所求的正整数为 A. 根据题意，得

$$A=(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+9)=9p+45, \quad ①$$

$$A=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+10)=10n+55, \quad ②$$

$$A=(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+11)=11k+66, \quad ③$$

其中 p,n,k 均为整数.

由①、②、③，得

$$9p+45=10n+55=11k+66,$$

$\therefore\quad 9p=10(n+1)$， ④

$\therefore\quad 10n=11(k+1)$. ⑤

在④中，$p=\dfrac{10(n+1)}{9}$，

$\because\quad$ 9 和 10 互质，

$\therefore\quad n+1$ 是 9 的倍数；

在⑤中，$(k+1)=\dfrac{10n}{11}$，

$\because$ 10 和 11 互质，

$\therefore$ 知 n 是 11 的倍数，且 n 除以 9 的余数为 8，即 $n+1$ 能被 9 整除，

故 n 的最小值为 44，此时，$A=10n+55=495$.

故 495 是所求的最小正整数.

点评： 本题考查学生对连续整数、互质数的性质、整除的概念的理解、掌握情况及应用能力.

5. 已知 $N=\underbrace{222\cdots22}_{k\text{个}}$，若 N 是 1998 的倍数，那么符合条件的最小值 k 为（　　）.

A. 15　B. 18　C. 24　D. 27

（第 10 届"希望杯"数学邀请赛试题）

解析： $\because$ $1998=2\times999$，

而 $N=\underbrace{222\cdots22}_{k\text{个}}$ 是 1998 的倍数，

$\therefore$ $\underbrace{222\cdots22}_{k\text{个}}=2\times999m$，

$\therefore$ $\underbrace{11\cdots1}_{k\text{个}}=999m$，

故 $\dfrac{\overbrace{11\cdots1}^{k\text{个}}}{111}=9m$，

即 $1001001\cdots1001=9m$，

在 $1001001\cdots1001$ 中每三个数字就有一个 1，

故当 $k=27$ 时，$1001001\cdots1001$ 中有 9 个 1，此时才有

$1001001\cdots1001=9m$，

$\therefore \quad k=27.$

故选：D

点评： 本题考查学生对自然数的一般表示方法，被 9 整除的数的特征，从而培养学生变迁思维和抽象思维能力.

6. 已知质数 p，q 使得表达式$\dfrac{2p+1}{q}$及$\dfrac{2q-3}{p}$都是自然数，试确定 p^2q 的值.

（1997 年北京市数学竞赛试题）

解：（1）当 $p>q$ 时，

$$1 \leqslant \frac{2q-3}{p}=2\times\frac{q}{p}-\frac{3}{p}<2,$$

$\therefore \quad \dfrac{2q-3}{p}=1,$

即 $\quad p=2q-3,$

于是 $\quad \dfrac{2p+1}{q}=\dfrac{2(2q-3)+1}{q}$

$$=\frac{4q-5}{q}$$

$=4-\dfrac{5}{q}$ 且为自然数，

$\therefore \quad q=5$，此时 $p=7$.

（2）当 $p<q$ 时，

$$1 \leqslant \frac{2p+1}{q}=2\times\frac{p}{q}+\frac{1}{q}<3,$$

故 $\quad \dfrac{2p+1}{q}=1$ 或$\dfrac{2p+1}{q}=2.$

当$\dfrac{2p+1}{q}=1$ 时，$q=2p+1$，

于是 $\dfrac{2q-3}{p}=\dfrac{2(2p+1)-3}{p}=4-\dfrac{1}{p}$ 且为自然，

则 $p=1$（舍去，$\because p=1$ 不是质数）.

当$\dfrac{2p+1}{q}=2$时,$2p+1=2q$,

左边 $2p+1$ 为奇数,而右边 $2q$ 为偶数,

矛盾.

综上所述,只有 $p=7$, $q=5$ 符合题设的条件,

$\therefore\quad p^2q=7^2\times 5=245.$

点评: 本题考查学生对质数、自然数概念的理解、掌握情况及全面分析问题的综合探究能力.

7. 一个四位数与其各位数字之和是 1999,求这个四位数,并说明理由.

(1999 年重庆市数学竞赛试题)

解: 设这个四位为 $\overline{abcd}$,则

$$1000a+100b+10c+d+a+b+c+d=1999,$$

故 $a=1$,

$\therefore\quad 101b+11c+2d=998$;

$\because\quad 1\leqslant d\leqslant 9,\ 1\leqslant c\leqslant 9$,

$\therefore\quad 101b>998-99-18=881$,

故 $b=9$,

$\therefore\quad 11c+2d=89$;

又$\because\quad 0\leqslant 2d\leqslant 18$,

$\therefore\quad 11c=89-2d\geqslant 71$,

即 $71\leqslant 11c\leqslant 89$;

又$\because\quad 2d$ 为偶数,89,$11c$ 为奇数,

$\therefore\quad c$ 为奇数,即 $c=7$;

$\therefore\quad 11\times 7+2d=89$,

解之,得 $d=6$.

故所求的四位数为 1976.

点评: 本题考查学生对自然数一般表示方法及数的整除性的

掌握情况和应用能力.

8. 已知 17 个连续整数的和是 306,求紧接在这 17 个连续整数之后的 17 个连续整数之和.

(1999 年天津市数学竞赛试题)

解: 设这 17 个连续整数中最中间的一个数为 x,则这 17 个连续整数为 $x-8, x-7, \cdots, x-1, x, x+1, \cdots, x+8$. 根据题意,得

$$17x=306,$$

$$\therefore \quad x=18,$$

那么这 17 个连续整数为 10,11,…,26,后面连续 17 个整数为 27,28,…,43,

$$\therefore \quad S=27+28+\cdots+43=\frac{(27+43)}{2}\times 17=595.$$

故所求的 17 个连续整数之和为 595.

点评: 本题考查学生对连续整数的概念、解一元一次方程及等差数列求和公式的掌握情况及应用能力. 解答本题的关键是设这 17 个连续整数的中间数为未知数,使问题简洁获解.

9. 已知 $S=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2-100^2+101^2$,求 S 被 103 除的余数.

(1997 年安徽省数学竞赛试题)

解:
$$\begin{aligned}S&=(101^2-100^2)+(99^2-98^2)+\cdots+(5^2-4^2)+(3^2-2^2)+1\\&=101+100+99+98+\cdots+5+4+3+2+1\\&=\frac{101\times(1+101)}{2}\\&=51\times 101\\&=101\times 50+2\times 50+1=103\times 50+1.\end{aligned}$$

故原式除以 103 的余数为 1.

点评: 本题考查学生对有理数的运算技巧及等差数列的求和公式的掌握情况及应用能力. 解答本题的关键是把原式变形为两

数的平方差之和,从而培养了学生的变迁思维能力.

10. 有 1998 个互不相等的有理数,每 1997 个数的和都是分母为 3998 的既约真分数,则这 1998 个有理数的和为(　　).

A. $\dfrac{999}{1997}$　　B. $\dfrac{997}{1997}$　　C. $\dfrac{998}{1998}$　　D. $\dfrac{999}{1998}$

(1997 年《学习报》数学公开赛试题)

解析: 设这 1998 个互不相等的有理数为

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{1997} < a_{1998},$$

$\because$ $3998 = 2 \times 1999$,而 1999 为质数,

$\therefore$ 分母为 3998 的既约真分数为

$$\frac{1}{3998}, \frac{3}{3998}, \frac{5}{3998}, \cdots, \frac{1997}{3998}, \frac{2001}{3998}, \frac{2003}{3998}, \cdots, \frac{3997}{3998}.$$

根据题意,有

$$\begin{aligned}
&1997 \times (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{1998}) \\
&= \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + 3997}{3998} - \frac{1999}{3998} \\
&= \frac{1999^2}{3998} - \frac{1999}{3998} \\
&= \frac{1999 \times 1998}{3998} = 999,
\end{aligned}$$

$\therefore$ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{1998} = 999 \times \dfrac{1}{1997} = \dfrac{999}{1997}$.

故选:A

点评: 本题考查学生对数学概念内涵的理解及观察和分析能力. 用数学符号语言准确表达以 3998 为分母的既约真分数及每 1997 个不同有理数的和是解本题的关键.

11. 三个质数之和是 86,那么这三个质数是 ________.

(第 9 届“希望杯”数学邀请赛试题)

解析: $\because$ 三个质数之和为 86,而 86 是为偶数,故必有一个偶