

第一章 教学观摩

“教学观摩”编写的目的，是希望读者在阅读中有如亲临“教学演示”现场，观摩一场“创意的教学”。

教师在从事教学时，以引起动机、阐述概念，以及使用适当的语言最为关键，因此特别将教学心得汇集成动机、概念、语言三个主题，每个主题各有几则实例，提供读者参考。兹介绍如下：

- 动机——强调如何有效地强化学习动机，提升学习效能。
- 概念——强调数学概念的本质与内涵，并从不同于以往的角度来探讨新的教学方式，期盼提升概念教学的品质。
- 语言——旨在提醒教师们，精准的数学语言是最佳的教学工具，并在教学中能欣赏师生互动所产生的创意语言。

期待这场“教学观摩”对读者有所启发，有所收获。

动机

教师在进行单元教学时，需要合适的教材，引发学习动机，以避免冗长而无味的教学。然而，寻找契合的教材，并采用适当的方式以引起学生学习该单元的动机，却不是件容易的事。本篇提出三个方向，并列举一些实例，供读者参考，进而触类旁通，迸发更多更美好的“点子”。

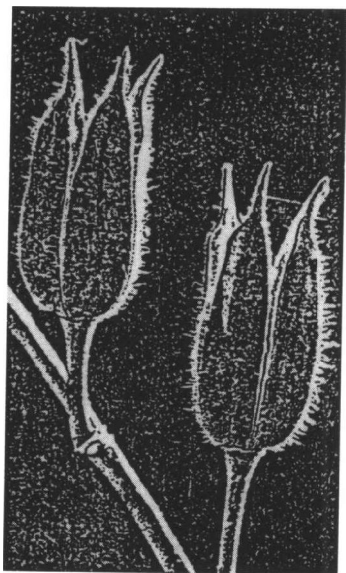
使学生觉得有趣又好玩

一张图片或一幅漫画，一个游戏或一个活动，一个问题或一个故事，经常能使得学生趣味盎然、玩味无穷，进而激荡出学习的兴趣。资料的来源很多 举凡书籍、报章杂志、媒体及电脑网站都是极佳的管道，数学教师要能配合各单元精心地涉猎搜集或设计。

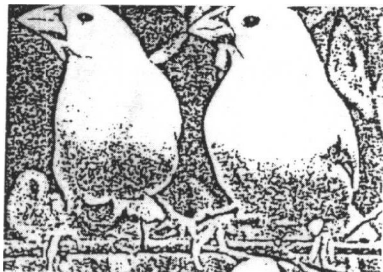
一、图片或照片展示

(一) 展示与单元名称相关而有趣的图片

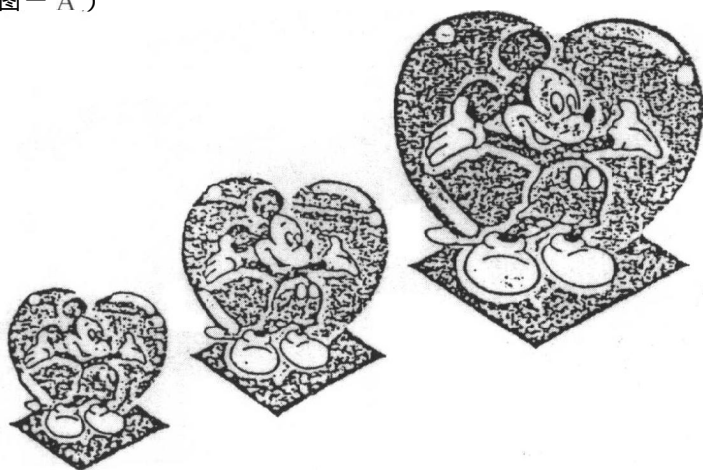
1. 例如教‘二元一次程组’时可展示如图一 A、B 二张图片 以显现所谓‘组合’之趣味。
2. 教‘比例’时可以展示如图二之图片。
3. 教‘近似值’时可以展示图三之图片。
4. 教‘不等式’时可以展示图四之图片。



(图一 A.)



(图一 B.)



(图二)

(二) 展示相关数学家的照片

例如教“坐标”时展示笛卡尔的照片，教“毕氏定理”时展示毕达哥拉斯的照片。依据经验，适时地呈现相关数学家的照片，可以使学生增添许多亲切感，觉得更接近该单元的内容。

二、猜谜游戏

(一) 以文字或图片为谜题

1. 例如教“函数”时，可以提出“漱口药水”的谜题，请学生们“打一数学名词”。
2. 教“乘方开方”时，可以提出“千方百计”的谜题，请学生们“打一数学等式”，此题谜底之一为“ $1000^2 = 100^3$ ”。
3. 另外，可以在教任何单元时，提出图片，请同学们猜测该单元的名称。例如前面用来展示的图片(图一~图四)都是极佳的谜题。

不论以文字或图片为谜题，都颇能引人入胜，激发学生的学习兴致。

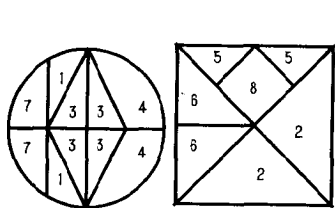
(二) 以益智题目为谜题

1. 例如教“四则运算”时，可以提出“运用 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 及括号等符号，使用五个1或五个5来表示100”的谜题，参考谜底为“ $111 - 11 = 100$ ， $(5 \times 5 \times$

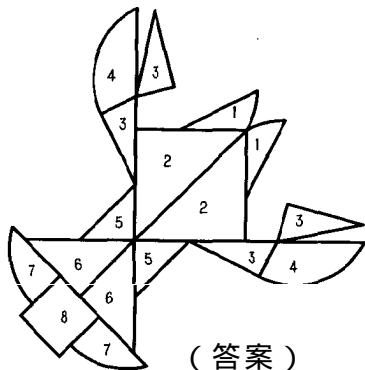
$$5) - (5 \times 5) = 100, (5 \times 5) \{5 - (5 \div 5)\} = 100"$$

2. 教‘几何图形’时可以提出“下图为一只各部位编有号码的龙虾，将它 17 个部位一一剪开，再把它重新拼成一个圆和一个正方形两部分”的谜题（参考谜底如下）。

类似的题目不胜枚举，老师只要有心，必可配合各单元穿插其间，引发高度的学习动机。



（谜题）



（答案）

三、活动设计

（一 老师与学生直接互动

1. 例如教‘质因数分解’时，可以进行‘破解秘密数字’的活动。

透过活动，学生经过理解前的惊讶与理解后的恍然大悟，老师已经成功引发学生们学习该单元的动机了。

（1）破解秘密数字”步骤

- a. 老师先请学生在心中默想一个介于 1 ~ 99 的数

字。

- b. 请学生将所想的数字乘上 67 ，记住所得之积。
- c. 请学生将积的末二位告诉老师。
- d. 老师迅速地说出每位学生的秘密数字。

建议每次参与的学生人数由少而多 最后扩至全班同学 可使效果更佳。

(2) 破解秘密数字 '原理

由于任一数乘以 201 时，其十位数字与个位数字不会改变 而 $201 = 67 \times 3$ 因此老师只要将学生告诉他的 '积的末二位数' 乘以 3 所得数的十位数字与个位数字，即为学生原来心中所想的数。举例来说，学生甲所想的数为 9 ， $67 \times 9 = 603$ 学生告诉老师的数是 03 老师将 3 乘以 3 ，所得的 9 即为学生原来心中所想的数。学生所想的数为 37 ， $67 \times 37 = 2479$ 学生告诉老师的数是 79 老师将 79 乘以 3 所得的 237 末二位 37 即为学生原来心中所想的数。

- 2. 例如教 '二元一次方程式的解' 时 可以进行 '猜测生日' 的活动。

(1) 猜测生日 '步骤

- a. 老师请学生把自己出生的月份乘以 19 ，出生

的日子乘以 5 然后加起来 记住总数。

b. 由老师点名 点到谁 谁就把总数说出来。

c. 老师迅速地说出该学生的生日。

(2) ‘猜测生日’原理

假设某同学的出生月份为 x 出生日子为 y ,总数为 A , 则 $19x + 5y = A$, 因为 $19x + 5y = 5(4x + y) - x$, 所以 $5(4x + y) - x = A$, 即 $5(4x + y) = A + x$ 因此老师只要将学生所给的总数加上最小的 x 使其成为 5 的倍数 再除以 5 可得 $4x + y$ 之值 , 将 x 值代入 即得 y 值。若 $1 < y < 31$ 即为该生正确生日 若 $y > 31$ 则将 y 值减去 19 的若干倍 使得 $1 < y < 31$, 而将 x 值跟着加上 5 的若干倍 , 即可得该生正确生日。

举例来说 学生甲的生日为 3 月 19 日 则 $3 \times 19 + 19 \times 5 = 152$, 要使 152 成为 5 的倍数 所加的最小正整数为 3 因此可暂定为 3 , 即 $5(4x + y) = 152 + 2 = 155$, 由此式可得 $4x + y = 31$, 将 $x = 3$ 代入得 y 值为 19 , 因而获知甲生正确生日。

学生乙的生日为 12 月 31 日 , 则 $12 \times 19 + 31 \times 5 = 383$, 要使 383 成为 5 的倍数 所加的最小正整数为 2 , 因此 x 可暂定为 2 , 即 $5(4x + y) = 383 + 2$ 由此式可得 $4x + y = 77$, 将 $x = 2$ 代入得 y

值为 69 但是 $y = 69 > 31$ 将 69 减去 19 的两倍 即 $69 - 19 \times 2 = 31$,而 $x = 2 + 5 \times 2 = 12$, 同样获知了乙生正确的生日。至于为何 y 必须减去 19 的倍数, 而 x 必须加上 5 的相同倍数, 乃是因为形如“ $ax + by = c$ ”的整系数二元一次方程式, 其整数解的一般形式为

$$x = x_0 + bt$$

$$y = y_0 - at$$

其中 (x_0, y_0) 为任一组整数解, t 为变动的整数。

(二 学生分组活动

透过组内的分工、协调、合作 以及组际的观摩竞赛, 可以使学生们更喜欢学习的单元, 加深学习的印象。例如教任何单元时, 可针对该单元名称, 要同学们分组搜寻相关联的趣味图片, 或发挥想像力自行绘制。此外, 也可让学生分组报告其创意, 同时将图片或作品展示于教室, 互相观摩欣赏, 当然亦可采取分组比赛的鼓励方式。

曾经有一组学生在“多项式”的单元, 找来在大河里戏水的象群图片, 题曰“多象”; 数十对双胞胎合影的照片, 题曰“多像”; 还有一张布满巷道的迷宫, 题曰“多巷”另有一组学生在“分解因式”单元 找来许多拍摄技巧相当高明的各项运动“分解动作”照片, 相当传神。这些想法其实都充满趣味, 令人印象深刻, 只要老师愿意

提供时间与空间，稍加引导，学生总是超乎想像地会“玩”数学，借此将抽象生冷的数学单元变得较生活化，而更愿意亲近。

以下再举一个分组活动的例子，教“函数”时，不妨可以设计“猜对应规则”的活动，使学生对函数的学习充满好奇。

“猜对应规则”步骤

- a. 将同学分为若干小组。
- b. 由老师宣布对应规则形式，宜由简而繁，先规定“ $y = ax$ ”形式，再规定“ $y = ax + b$ ”形式，其中 a 与 b 先规定为正整数，次为整数，再为有理数，甚至为无理数。
- c. 选定其中一组做庄，设定对应规则，由其它各组猜测，再轮流做庄。或每两组为一活动单位，可轮流设定对应规则，由另一组猜测，亦可两组同时设定对应规则，同时由对方猜测。依照事先排定的组别，交换进行。
- d. 猜测的一方提出两个数，由设定的一方告知其分别对应的数，据此猜测对应规则。猜测的一方亦可先提出被对应之数，由设定的一方告知此数为何数所对应。同样的，提出两数之后作猜测。以最快答出正确对应规则的小组为优胜。

“猜对应规则”原理

由于对应规则“ $y = ax + b$ ”含有 a, b 两个未知数，当给定两组 x 与 y 之值即可顺利求出对应规则。举例来说甲小组设定的对应规则为“ $y = \frac{-13}{2}x + \frac{19}{2}$ ”，乙小组提问“1 对应的数是什么？”甲小组回答“3”乙小组再提问“3 对应的数是什么？”甲小组回答“-10”据此乙小组开始解方程式

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = -10 \end{cases}, \text{得到 } a = \frac{-13}{2}, b = \frac{19}{2}, \text{因而正确猜出。}$$

特别值得一提的 不论对方设定何种对应规则 猜测的一方只要提问“0 与 1 各对应什么数？”即可迅速地获知对应规则。此项规律希望由学生在活动中发现。

四、漫画欣赏

漫画最容易抓住人心、引人入胜，若能善加利用，则效果极佳。例如教“平行线”时 以下的四格漫画即为引起动机的绝佳素材。



五、提出有趣的问题

(一) 由虚拟的情境中提出问题

例如教“以符号代表数”单元时，教师可以提出下列问题：圣诞老人正奔驰各处发放圣诞礼物，今天来到李家，看到李家的豪华宅第，非常羡慕，想丈量一下房屋的大小，好回去向大家吹嘘，但是他没带丈量工具，请问各位同学有什么办法，能够帮圣诞老人这个忙呢？情境使问题更“迷人”，使学生更愿意学习，懂得运用有趣的、新奇的问题作引导的教师，其教学已经成功一半了。

(二) 由实际的生活中提出问题

可从日常生活中的校园、教室、住家乃至整个社会环境。例如教“简易几何图形”时，可以问问同学们：教室里现在可观察到的几何图形有哪些？教“数列”时，可以请同学们思考：“在日常生活周遭，有什么事物呈现等差及等比的情况？”这类问题，来自生活周遭，信手拈来，最能获得高度回响。近来颇受欢迎的“数学步道”就是利用校园环境来设计问题，引发学生的学习动机。

六、叙说故事

(一) 由“数学史”中找故事

喜欢听故事是人之天性，能够在适当的单元中，穿插一些“数学史”的故事，无论是某个概念的历史发展，

或者是数学家的轶事 都可为此单元添加“人情味”因而更能引发学习动机，使学生保持对数学的兴趣和热诚。

例如教几何课程中“圆”的单元时，提到符号“ π ”时，“数学史”中有下列的故事：

公元 1600 年 英国数学家威奥托兰特 (W.Oughtred, 1574 ~ 1660) 首先使用了 $\frac{\pi}{\delta}$ 表示圆周率，理由是 π 是希腊文圆周的第一个字母， δ 是直径的第一个字母；但在推圆周率的过程中，常选用直径为 1 的圆，所以 $\frac{\pi}{\delta} = \pi$ 。

公元 1705 年，英国数学家琼斯 (Jn, 1675 ~ 1749) 首先使用 π 表示圆周率，但直到 1736 年由数学家欧拉 (L. Euler) 大力提倡，才使得 π 成为圆周率的专用符号。

(二) 自行改编故事

有时为了配合学生的背景，教师可以根据相关的资料，自行编制引人入胜的故事。例如教“等比级数”单元时，可参考下列自行改编的故事：

不可思议的交易

我们不知道下面这件事是在什么时候或什么地方发生的。也许根本就没有这回事。不管是事实或只是个

传说，它都是个有趣的故事，耐人寻味。

有一位亿万富翁兴高采烈地告诉他的家人：“一个毫不显眼的家伙，要求与我做一件不可思议的交易，条件是在一个月内的每一天，他将带 1000 万元给我，而我第一天只要给他 1 元，第二天再拿到 1000 万元时，只要给他 2 元，以后的每一天拿到 1000 万元时，我只要付出前一天所付钱数的 2 倍就可以了，也就是我第三天只要付 4 元，第四天只要付 8 元，第五天只要付 16 元，一星期过去时，我总共只要付 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ 元就可得到 7000 万元，天下真有这种事，富者真是拥有一切幸运啊！这个人想必疯了，这实在荒谬得令人难以相信！无论如何，我要他坚守这一个月的协定，不能半途中止。”第二天，那个人果真到来交给富翁 1000 万元而拿走了 1 元，两个星期来，那个人按时到来，富翁算算大约只花了一万五千元，却已经得到一亿四千万，他实在太兴奋了。但是他的欢乐并没有维持多久，他渐渐发现这交易不如他想像的那么有利。15 天以后他必须开始付出数以万计的钱，不再是几块钱的事了，他必须付出的情形是：第 15 天 (16384)，第 16 天 (32768)，第 17 天 (65536)，第 18 天 (131072)，第 19 天 (262144)，第 20 天 (524288) 截至目前状况还好，他已得到了二亿元仍无损失。但第 21 天起他所付的钱必须以百万计了，到最后一天也就是第 30 天，他必须付出的是五亿三

千六百八十七万零九百一十二元，光是这一天，就远超出他 30 天来所得的总数三亿元。当完成最后一笔交易时，他垂头丧气地坐下来，算一算他总共所付出的代价是十亿七千三百七十四万一千八百二十三元，差一点就是十一亿元了，而这一切竟只是由 1 元开始，甚至那人每天给他 3000 万元，也不会损失一毛钱。