

第一章

JIAOCAI DONGTAI QUANJIE

摇摇 集摇摇合

1.1 集合与集合的表示方法

1.1.1 集合的概念

课标内容诠释

一、集合的描述以及集合的特征

描述1 某些指定的对象集在一起就成为一个集合(或集)援

描述2 具有某种属性的对象的全体组成一个集合援

特征 ①集合是一个“整体”援

②构成集合的对象必须是“确定”的且“不同”的援

注意

③集合的概念与“全体”的区别 集合虽然也含有全体的意思,但与通常所理解的“全体”是有区别的,集合中的元素必须是确定的,必须能判断任何一个对象是不是它的元素,而全体则不一定能成为一个集合援

④构成集合的对象必须是“确定”且“不同”的,其中:“确定”是指构成集合的对象具有非常明显的特征,这个特征不是模棱两可的,“不同”是指构成集合的各个对象互不相同援一般地,判定一组对象能否构成集合,就是要看判定对象是否具有一个确定的特征,如果有,则能构成集合,如果没有,就不能构成集合援

⑤集合是数学中最原始的不定义的概念,只能给出描述说明援

注意 集合是现代数学的基本概念,专门研究集合的理论叫做集合论,康托是集合论的创始者援

例1 摇以你所在的学校为例,说明哪些对象能组成集合援

解析摇看一组对象能否组成集合,关键是看这组对象是否确定的,即任何一个对象,要么在这一组中,要么不在,而没有第三种情况援

摇摇答案摇例如:(员)“我所在班上的同学”能组成集合,因为班上的同学是确定的,即对象是确定援

(圆)“我们班上高个子同学”就不能组成集合,因为“高个子”没有确定的标准援

(猿)“高一血型是 韵型的同学”能组成集合,因为“韵型血”是一个确定的标准援

(源)“我们班上性格开朗的同学”不能组成集合,因为“性格开朗”不是一个确定的标准援

(缘)“我们学校一年级所有班”能组成集合,因为所给的对象是确定的援

思考考

摇摇“我们班的同学”所组成的集合 粤与“我们学校一年级所有班”组成的集合 月有怎样的关系呢?

摇摇例 2 摇给出下列语句,其中能构成集合的个数为

(摇摇)

(员)某中学的大胖子的全体

(圆)2008年北京奥运会中的所有比赛项目

(猿)所有正三角形

(源)员圆三个数的全体

(缘)与无理数 π 无限接近的数的全体

(远)方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解的全体

(苑)小于 怨,且个位与十位上的数字之和是 怨的一些自然数

(愿)不大于 员的非负数

粤 猿 摇摇摇摇摇摇摇摇 悦 源 摇摇摇摇摇摇摇摇 阅 缘

摇摇解析摇(圆),(猿),(远),(愿)中的对象是确定的,且互不相同,而(员),(缘)中的对象是不确定的,(源)中含有相同对象 员,(苑)中的对象不是一个整体,所以(圆),(猿),(远),(愿)能确定一个集合,(员),(源),(缘),(苑)不能确定一个集合,

故选 悦援

答案摇悦

评摇摇注

方法规律

集合的两个特征“整体性”以及“对象的确定性、互异性”是判定某些对象能否构成集合的标准援

警示误区

集合中不能含有相同的元素,集合必须是一个整体援

一些对象能否构成集合,必须具备以下两个特点:一是整体性,二是确定性.体现集合整体性的词语有“全体”、“所有”、“汇集在一起”等.数学中的“集合”与我们平常口语中所表达的“集合”是两个不同的概念,二者有本质的区别,不能混淆.

二、集合的元素以及元素的特性

定义 构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员).

2. 特性 ①确定性 ②互异性 ③无序性

注意

集合中的元素可以指任意的具体事物,集合通常用英文大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示,元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.

(圆)集合中元素的特性

① 确定性 设 A 是一个给定的集合, a 是一具体对象,则 a 要么是 A 的元素,要么不是 A 的元素,两种情况必有一种且只有一种成立.

② 互异性 对于一个给定的集合,它的任何两个元素是不同的,设 A 是一个给定的集合, a, b 是 A 的两个元素,则一定有 $a \neq b$.

③ 无序性 集合中的元素不讲顺序,任意变换集合中元素的位置,集合不变.例如: $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 表示同一个集合.

例 3 说出下面集合中的元素.

- (1) 小于 10 的质数组成的集合;
- (2) 倒数等于其本身的数组成的集合;
- (3) 由 10 的所有约数(正整数)组成的集合;
- (4) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解组成的集合.

解析 集合(1)中的元素必须符合两个条件,一是要小于 10,二是要为质数.集合(2)中的元素具有相同属性“倒数等于其本身”,可设元素为 x ,列方程 $\frac{1}{x} = x$ 求解.集合(3)中的元素满足条件“是 10 的约数(正整数)”.集合(4)中的元素必须是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解.

答案 集合(1)中的元素为 2, 3, 5, 7;

集合(2)中的元素为 1, -1;

集合(3)中的元素为 1, 2, 5, 10;

集合(4)中的元素为 1, 2.

方法规律

一般地,给定集合中的元素具有共同属性或符合相同条件.

小结

粤一个摇摇摇摇摇摇月一个摇摇摇摇摇摇悦一个摇摇摇摇摇摇阅一个

本题易混淆 灌漑与 曾及
原曾实际上 灌漑 能为 曾与 原曾
其中之一援

要注意关联词“或”与“且”的用法,防止把(员)中答案错写为“噪~~园~~且噪~~猿~~”,防止把(圆)中答案错写为“噪~~园~~或噪~~猿~~援

例 6 摇已知 $\text{噪} \in \{\text{员园噪}\}$ 求实数 噪 的值援

综上所述 噪越原援

摇摇既要应用元素的确定性、互异性和无序性解题,又要利用它们检验解正确与否,即元素的三个特性在解题过程中具有双重作用援

4 教材动态全解

果不能表示,则需要添加什么条件,使它表示一个集合?

解析摇它不一定能表示一个集合,因为 噪噪原噪噪原噪之间有可能相等,因而不一定满足元素的互异性援

摇摇答案摇① 由 噪越噪原噪 噪越远或 噪越圆援

② 由 噪越噪原噪 噪越远或 噪越圆援

③ 由 噪原噪越噪原噪 噪越远或 噪越圆或 噪越圆援

特别提示

从“互异性”的反面“不互异”分三种情况讨论,体现了数学中逆向思维的思想援

摇摇故只需添加条件 噪=圆且 噪=原圆且 噪=圆且 噪=原圆,则{噪噪原噪噪原噪}能表示成一个集合援

三、元素与集合的关系

摇摇1 援如果 葬是集合 粤的元素,就说 葬属于 粤,记作 葬∈粤,读作 葬属于 粤援

2 援如果 葬不是集合 粤的元素,就说 葬不属于 粤,记作 葬∉粤,读作 葬不属于 粤援

注意

摇摇(员“元素”与“集合”的关系好比“个体”与“整体”的关系,当这个个体是这个整体中的一员时,我们就说这个个体属于这个整体;当这个个体不是这个整体中的一员时,我们就说这个个体不属于这个整体援由于“个体”与“整体”之间只有这两种关系,所以元素与集合的关系只有“属于”与“不属于”这两种关系援

(圆任意给定一个元素 葬和一个集合 粤,要么 葬∈粤,要么 葬∉粤,不存在第三种情况援

(猿符号“∈,∉”只能用在元素与集合之间,表示元素与集合的从属关系,除此以外,“∈,∉”没有其他用途援

摇摇例 8 摇某校高一年级有 源个班,其中学生甲、学生乙、学生丙、学生丁分别在高一(员)班、高一(圆)班、高一(猿)班、高一(源)班援设集合 粤越{高一(员)班学生},集合 月越{高一(圆)班学生},集合 悦越{高一(猿)班学生},阅越{高一(源)班学生},集合 耘越{高一年级学生},集合 云越粤∪月∪悦∪阅援

试根据上述条件建立元素与集合的关系援

摇摇解析摇根据“元素”与“集合”之间的关系为“属于”与“不属于”的关系,甲、乙、丙、丁与 粤,月,悦,阅,耘,云之间是元素与集合之间的关系,由于集合 云中的元素是集合 粤,月,悦,阅,耘,所以 粤,月,悦,阅,耘与 云之间也是元素与集合的关系援

摇摇答案摇如下表所示:

特别提示

由于集合中的元素可以为一切具体事物,所以集合的元素也可以为集合援

关系 元素	集合	粤	月	悦	阅	耘	云
甲		$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
乙		$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
丙		$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
丁		$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$

关系 元素	集合	云
粤		$\in$
月		$\in$
悦		$\in$
阅		$\in$
耘		$\in$

易错点提醒

摇摇① 将“ $\text{粤} \in \text{粤}$ ”错写成“ $\text{粤} \in \text{粤}$ ”或错写成“ $\text{粤} \in \text{粤}$ ”

摇摇② 将“集合 $\{(员, 原)\}$ ”错写成“集合 $\{员, 原\}$ ”, 要注意 $\{(员, 原)\}$ 与 $\{员, 原\}$ 是两个不同性质的集合援

摇摇例 9 摇已知 集合 酝越{直角坐标中平面 赠轴内的点}, 集合 晕越{直角坐标平面 赠轴内的直线}, 集合 孕越{一次函数 赠越孕的图像上的点}, 点 粤的坐标为(员, 猿), 点 月的坐标为(原, 员)援给出下列结论:

摇摇(员) $\text{粤} \in \text{酝}$, $\text{月} \in \text{酝}$

(圆) $\text{粤} \in \text{晕}$, $\text{月} \in \text{晕}$

(猿) $\text{粤} \in \text{孕}$, $\text{月} \in \text{孕}$

(源) $\text{孕} \in \text{晕}$

(缘) $\text{孕} \in \text{酝}$

警示误区

集合 孕与集合 酝是两个集合之间的关系, 不是从属关系, 所以, “ $\text{孕} \in \text{酝}$ ”这种写法是错误的援

摇摇则其中正确的结论的序号是_____援

解析 摇(员) 因为 粤, 月是直角坐标平面内的两点, 集合 酝是直角坐标平面内的所有点, 所以 粤, 月与 酝之间是元素与集合的关系, 所以 $\text{粤} \in \text{酝}$, $\text{月} \in \text{酝}$, (员) 的结论正确援

(圆) 因为集合 晕中的元素是不同的直线, 而 粤, 月是两个点, 不具备 晕中元素的属性, 所以 $\text{粤} \notin \text{晕}$, $\text{月} \notin \text{晕}$, 故(圆) 的结论错误援

(猿) 因为集合 孕是函数 赠越孕的图像上的点的全体, 点 粤在函数 赠越孕的图像上, 点 月不在函数 赠越孕的图像上, 所以 $\text{粤} \in \text{孕}$, $\text{月} \notin \text{孕}$, 故(猿) 的结论是正确的援

(源) 孕与 晕是两个不同性质的集合, 它们之间不存在从属关系, 所以(源) 是错误的写法援

(缘) 孕与 酝虽然同是点集, 且 孕中的元素都属于 酝, 但是 孕与 酝之间不是从属关系, 而是包含关系, 所以(缘) 是错误的援

答案 摇(员), (猿)

四、常用数集及其记法

1. 非负整数全体构成的集合,叫做自然数集,记作 $\mathbb{N}$;

2. 在自然数集内排除 0 的集合叫做正整数集,记作 $\mathbb{N}^+$ 或 $\mathbb{N}_{+}$;

3. 整数全体构成的集合,叫做整数集,记作 $\mathbb{Z}$;

4. 有理数全体构成的集合,叫做有理数集,记作 $\mathbb{Q}$;

5. 实数全体构成的集合,叫做实数集,记作 $\mathbb{R}$.

注意

自然数集与非负整数集是相同的,也就是说,自然数集包括数 0

国家标准定义自然数集 含元素 0 从数学本身的角度看,有其积极意义:一方面 0 是 1 的前身,可以建立集合的元素个数组成的集合与自然数 1 的一一对应关系 另一方面 0 不属于自然数集,空集的元素个数为 0,集合的元素个数组成的集合与原自然数集之间无法建立自然的一一对应的关系 另一方面 0 是十进位数 {0,1,2,...} 中最小的数,有了 0,减法运算 仍属于 自然数集,其中 0 是 0

例 10 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空

1. 0 $\in$ 自然数集 0 $\in$ 整数集 0 $\in$ 有理数集 0 $\in$ 实数集 0 $\in$ 复数集;
2. 1 $\in$ 自然数集 1 $\in$ 整数集 1 $\in$ 有理数集 1 $\in$ 实数集 1 $\in$ 复数集;
3. 2 $\in$ 自然数集 2 $\in$ 整数集 2 $\in$ 有理数集 2 $\in$ 实数集 2 $\in$ 复数集;
4. 3 $\in$ 自然数集 3 $\in$ 整数集 3 $\in$ 有理数集 3 $\in$ 实数集 3 $\in$ 复数集

解析 若 0 在集合内时,用符号“ $\in$ ”,而 0 不在集合内时,用符号“ $\notin$ ”

答案 1. $0 \in$ 自然数集 $0 \in$ 整数集 $0 \in$ 有理数集 $0 \in$ 实数集 $0 \in$ 复数集

2. $1 \in$ 自然数集 $1 \in$ 整数集 $1 \in$ 有理数集 $1 \in$ 实数集 $1 \in$ 复数集

3. $2 \in$ 自然数集 $2 \in$ 整数集 $2 \in$ 有理数集 $2 \in$ 实数集 $2 \in$ 复数集

4. $3 \in$ 自然数集 $3 \in$ 整数集 $3 \in$ 有理数集 $3 \in$ 实数集 $3 \in$ 复数集

评注

要注意符号的规范书写

例

例 11 给出下列关系,其中正确的个数为 ()

- ① $0 \in$ 自然数集 ② $1 \notin$ 自然数集 ③ $2 \in$ 自然数集 ④ $3 \in$ 自然数集

解析 ① 正确 ② 正确 ③ 不正确 ④ 不正确

答案 1

小结

研究数与数集的关系,应首先明确是什么数集,再判断数与数集的关系

五、集合的分类

按集合元素的个数可分为有限集、无限集和空集

思维误区

数集的范围不明或数集的符号记忆错误是出错的主要原因

摇摇(员)含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限个元素的集合叫做无限集,不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$ 援

摇摇例 12 摇下列命题中,真命题的个数是 (摇摇)

- 粤爱个摇摇摇摇摇摇月圆个摇摇摇摇摇摇悦爱个摇摇摇摇摇摇阅源个

解析 要判断一个元素是否在某个集合中, 关键在于弄清这个集合是由哪些元素所组成的。①不含任何元素的集合, 故①错误。而 $\{\emptyset\}$ 是由空集作为元素组成的一个集合, 故②正确。同理, ③也正确。④不正确, 因为 $\in$ 是表示元素与集合之间的关系, 故选 D。

摇摇空集就像一个无处不在的幽灵,必须时刻提高警惕,才不至于掉进空集这一陷阱之中。

(员)粤是有限集还是无限集？

解析 摇 (员) 因为大于 $\frac{1}{n}$ 且小于等于 $\frac{1}{n-1}$ 的实数有无穷多, 也就是 $\mathbb{Q}$ 中有无穷多个元素, 所以集合 $\mathbb{Q}$ 按 $\frac{1}{n}$ 划分, $\mathbb{Q}$ 是无限集援

摇摇(圆疫(√苑)原猿垣猿)越苑原(肆垣远)猿越缘原
远猿约

摇摇亦猿垣√苑# 粤

亦远垣/猿缘/猿

亦缘猿 粤媛

答案摇(员)无限集摇(圆)猿垣苑不是缘猿

在比较数的大小时用到了
平方法援

评注

摇摇由于集合多种多样,因此判断方法也多种多样,应因题而异援

潜能开发广角

数
海
拾
趣

数学历史上的第三次危机

经济上有危机,历史上数学也有三次危机,第三次数学危机,发生在 19 世纪末,当时,英国数学家罗素把集合,分成两种:

第一种集合,集合本身不是它的元素,即 $x \notin x$; 第二种集合,集合本身是它的一个元素 $x \in x$ 援

那么对于任何一个集合 M ,不是第一种集合就是第二种集合援

假设第一种集合的全体构成一个集合 R ,那么 R 属于第一种集合还是属于第二种集合呢?

如果 R 属于第一种集合,那么 R 应该是 R 的一个元素,即 $R \in R$,但满足 $R \in R$ 关系的集合应属于第二种集合,出现矛盾援

如果 R 属于第二种集合,那么 R 应该是满足 $R \in R$ 的关系,这样 R 又是属于第一种集合,矛盾援

以上推理过程所形成的悖论叫罗素悖论援极限理论是以实数理论为基础的,而实数理论又是以集合论为基础的,现在集合论又出现了罗素悖论,因而形成了数学史上重大的危机援

从此,数学家们就开始为这场危机寻找解决的办法,其中之一是把集合论建立在一组公理之上,以回避悖论援首先进行这个工作的是德国数学家策梅罗,他提出七条公理,建立了一种不会产生悖论的集合论,又经过德国的另一位数学家费泽克尔的改进,形成了一个无矛盾的集合论公理系统,即所谓 ZFC 公理系统援这场数学危机到此缓和下来援

数学危机给数学发展带来了新的动力援在这场危机中,集合论得到较快的发展,数学基础的进步更快,数理逻辑也更加成熟,然而矛盾和人们意想不到的事仍然不断出现,而且今后仍然会这样援

概念
辨析

摇摇集合是中学数学中一个重要的基本概念,要真正掌握集合的概念并能正确地运用它援

例 14 摇摇观察下面三个集合: $(M) = \{x \mid x \in M\}$, $(N) = \{x \mid x \notin M\}$, $(P) = \{x \mid x \in M, x \notin N\}$, 它们所表示的意义相同吗?为什么?

解析摇摇集合 (M) 和集合 (N) 是两个数集,集合 (P) 是一个点集,又集合 (M) 与集合 (N) 中的元素意义不相同援

答案摇摇不相同援集合 (M) 是函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 所有允许值组成的集合,因为

方法规律

(圆)是函数 $y=f(x)$ 的所有函数值 y 组成的集合,由二次函数的图像可知 $y \in [-1, 5]$, 所以 $\{y \in [-1, 5]\}$ 是 $y=f(x)$ 的值域援

对于给定的集合,首先要理解清楚集合中的元素是什么,元素满足什么条件,区别符号术语所表达的含义。

摇摇例 15 摇设 $\mathcal{A}$ 是两个非空集合, 定义:

孕伊臣越(葬遭灤孕遭因)

若 $\exists x \in A, \exists y \in B, x \neq y$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数是

解析摇根据定义,孕伊是一个由有序数对组成的集合,其中第i个数,葬从集合孕越猿源缘中选取,有猿种选法;第圆个数,遭从集合匝越源缘远苑中选取,有源种选法;援

故集合 M 中元素的个数是 10 .

答案摇圆

评摇注

摇摇本题为在现有运算法则和运算律的基础上,定义一种新的运算援由于“新定义”题编制角度新颖,突出能力立意,突出对学生数学素质的考查,特别能够考查学生“现场做题”的能力援因此,在近年各地高考模拟试题和高考试题中多次出现援

例 16 摇(国图·北京市竞赛)已知 粤越{曾赠 潭曾垣潭曾垣原猿园,曾赠 晕},月越{曾赠 潭曾京赠性员曾赠 晕} 则 (摇摇)

粵是有限集, 月是无限集摇摇摇摇月是无限集, 月是有限集

悦爱是有限集,月是有限集 阅爱是无有限集,月是无有限集

解析摇对于粤中条件 $\exists y \subseteq x$,由原集 x 变式得 $\exists y \subseteq x$ 原猿曾疫赠园亦圆原源猿
曾园园曾圆员同又疫曾晕亦粤是有限集援同理,可知月是无限集援
答案摇粤

思维诊断

在求解有关集合中的元素问题时,由于思维过程不周密,不严谨,从而导致误解援元素的互异性至关重要,要特别重视援

例 17 摇 已知集合 $\text{粤} = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $\text{越} = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $\text{葬} = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$, 若 $\text{员} \in \text{粤}$, 求实数 葬 的值援

摇摇错解摇疫员=粤亦葬圆(葬员)葬垣葬圆都有可
能为员)类讨论如下:

- ① 若葬垣越员则葬越原援
② 若(葬垣)越员则葬越原或葬垣援
③ 若葬垣葬垣越员则葬越原或葬垣援

警示误区

当 $\text{葬越原园时, 粤越(园, 员, 员)}$; 当 $\text{葬越原员时, 粤越(员, 园, 员)}$, 不符合集合中的互异性, 所以 葬越原园和 葬越原员应舍去援

② 若(葬頭)^圓越員,則葬越圓或葬越原圓。

当 葬越原圆时 , 粤越园员员与互异性矛盾 , 舍去援

故符合条件的 葬值为 园媛

摇摇错解摇① 若葬垣葬则葬园暖

亦实数 φ 的值为 φ 越园,员猿援

② 葬越猿时, 粤越员猿, 圆源, 满足题意援

④ 葬越葬时 葬 $\in \emptyset$ 援

亦 符合条件的 葬值为 葬越媛

当葬越园或葬越员时,粤中

含参数的集合问题是本节的重点和难点,在解这类问题时,要注意分类讨论思想及等价转换思想的运用。

若 $\text{甬} \in \text{酏}$, 则 甬 与 晕 的关系是

(摇摇)

粵鵲 $\in$ 暈搖搖月鵲 $\notin$ 暈搖搖悅鵲 $\in$ 暈或鵲 $\in$ 暈搖搖閱鵲不能確定

解析摇方法 员可利用代入检验法,令 $\lambda = 0$,则 $\mu = \frac{1}{2}$,对于是集合 λ ,当 $\lambda = 0$ 时

时,曾越^员_源,亦曾_源 ∈ 晕爰

令 $\alpha \in \mathcal{A}$ 则 $\alpha \in \mathcal{A}$ 对于集合 $\mathcal{A}$ 归纳得 $\alpha \in \mathcal{A}$ 亦选 α

摇摇方法圆集合酝的元素为：曾越噪垣员，源越噪垣员（噪

在)集合 晕的元素为 :曾越 $\frac{\text{噪垣员}}{\text{源圆}}$ 越 $\frac{\text{噪垣圆}}{\text{源}}$ (噪 在),而

圆噪圆为奇数, 噪圆为整数援

亦总有 $\varphi \in \Sigma$ 使

答案 摇粤

① 取特殊值解高考选择题

② 方法 圆中通过变式寻找出问题的结合点:圆 $\frac{\pi}{2}$ 为奇数,而 $\frac{\pi}{4}$ 为整数,从而使问题迎刃而解

摇摇例 20 摇数集 Ω 满足条件: 若 $a \in \Omega$, 则 $\frac{1}{a} \in \Omega$ ($a \neq 0$), 且 $\frac{1}{a} \in \Omega$ 已知 $2 \in \Omega$, 试把由此确定的 Ω 的元素求出来援

解析 摇可以从条件“ $2 \in \Omega$ ”入手, 依据条件“若 $a \in \Omega$, 则 $\frac{1}{a} \in \Omega$ ($a \neq 0$) 且 $\frac{1}{a} \in \Omega$ ”进行连续推理, 从而求出 Ω 中的元素援

摇摇答案 摇由 $2 \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{2} \in \Omega$ 援

又由 $\frac{1}{2} \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \in \Omega$

摇摇又由 $2 \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{2} \in \Omega$

又由 $\frac{1}{2} \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \in \Omega$

亦 $2 \in \Omega, \frac{1}{2} \in \Omega$

例 21 摇数集 Ω 满足: 若 $a \in \Omega$, 则 $\frac{1}{a} \in \Omega$

求证: (1) 若 $1 \in \Omega$, 则在 Ω 中还有另外两个数, 求出这两个数援

(2) 集合 Ω 不可能是单元素实数集援

(3) 集合 Ω 中至少有三个不同的元素援

解析 摇(1) 可仿效例 20 的解法求得援(2) 可采用反证法, 假设集合 Ω 是单元素实数集, 则一定有 $\frac{1}{a} = a$, 方程 $\frac{1}{a} = a$ 无解援(3) 用递推方法可证援

证明 摇(1) 设 $1 \in \Omega$, 则 $\frac{1}{1} = 1 \in \Omega$

设 $1 \in \Omega$, 则 $\frac{1}{1} = 1 \in \Omega$

设 $1 \in \Omega$, 则 $\frac{1}{1} = 1 \in \Omega$

亦 $1 \in \Omega$, 即集合 Ω 中另外两个数为 1 和 $\frac{1}{1}$

(2) 假设 Ω 是单元素实数集, 则 $\frac{1}{a} = a$, 即 $\frac{1}{a} = a$

特别提示

条件“ $a \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{a} \in \Omega$ ($a \neq 0$) 且 $\frac{1}{a} \in \Omega$ ”是一个递推关系式援

又疫方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 无解, 亦 $x \notin \mathbb{R}$

亦集合 $\mathbb{R}$ 不可能是单元素的集合援

摇摇(狗疫葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 员时, 有 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \in \mathbb{R}$

亦 $x \in \mathbb{R}$ 越葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

进一步, 有 $x \in \mathbb{R}$ 越葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

摇摇亦若葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

① 由(圆)知葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

② 若葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

亦葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

故集合 $\mathbb{R}$ 中至少有三个不同元素援

易忽略点提醒

摇摇在证明(狗)中易忽略讨论三数葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 是互异的援

摇摇例 22 摇已知集合 $\mathbb{R}$ 越葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$ 葬 $\mathbb{R}$

(员)若 $\mathbb{R}$ 中只有一个元素, 求葬的值援

(圆)若 $\mathbb{R}$ 为空集, 求葬的取值范围援

(狗)若 $\mathbb{R}$ 中至多有一个元素, 求葬的取值范围援

解析摇摇集合 $\mathbb{R}$ 中的元素为方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解, $\mathbb{R}$ 中元素的个数是由方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的实数解的个数确定的援讨论方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的实数根的情况, 从而确定葬有取值范围, 由题意, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有一个实数根, 两个实数根, 或无实数根援

摇摇答案摇摇(员)当葬 $\mathbb{R}$ 时, 原方程变为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 葬 $\mathbb{R}$ 符合题意援

当葬 $\mathbb{R}$ 时, 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 为一元二次方程 Δ 越原原葬时, 即葬越员时, 原方程的解为葬越原员符合题意援

方法规律

① 证明(圆)中根据“正难则反”的原则, 运用反证法构造出一个无实数解的一元二次方程, 从而使问题得证援

② 证明(狗)中运用了递推思想和分类讨论思想援

“**葬园**”这种情况容易被忽视,对于方程 **葬园** 有两种情况:一是 **葬园**,它是一元一次方程;二是 **葬园**,它是一元二次方程,只有在 **葬园** 情况下,才可以用判别 Δ 来解方程

亦葬殒时，粤为空集援。

(猢猻中至多有一个元素,则猢猻中有一个元素或猢猻中没有元素)援

由(员),(圆)可知,葬越园或葬≥员时,粤中至多有一个元素援

解析 摇 (圆) 员 ∈ 孕 说明 (圆) 员 适合不等式 (曾原葬) 垣 葬 ≤ 远 赠 (员) 园 ∈ 孕 ⇨ (员) 园 ∈

$$\{(曾贈渣曾京)^{\text{圆}}垣藪跃贈, (猿圆) \in \text{孕}\} \Rightarrow (猿圆) \in \{(曾贈渣曾京)^{\text{圆}}垣藪跃贈援$$

摇摇答案摇疫(圆员) ∈ 孕亦(圆原葬^圆垣^圆越远,

疫(員園) 孕亦(員原葬) 垣穰跃园

又疫(猿圓) 孕亦(猿原葬^圓) 垣禮和圓

摇摇由①、② $\Rightarrow$ 远原(圆原葬)跃原(员原葬),展开整理,

得園韓可疑亦葬跃原猿園

由①,③ $\Rightarrow$ 葬约原 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$,

亦原猿约葬约原员

又葬遭在亦葬越原,代入① $\Rightarrow$ 原原~~猿~~原猿亦遭越原援

综上所述, 蔡越原员遭越原援

摇摇① 本题的解法应用了等价转换的数学思想,将(员园)孕,(猿园)孕转化为与之等价的命题,从而找到了解决问题的突破口,希望同学们在以后的学习中注意归纳和使用援

② 本题的解法具有一般性:孕是点集,对于任何点集(曾赠有要么(曾赠 $\in$ 孕,要么(曾赠 $\notin$ 孕二者必具其一援

𦵑𦵒越(猿员)(猿圆), 𦵑越(员圆)(圆猿)

懷阮越贈贈增增垣員普礪 暈越贈贈增增垣員普暈

阅阮越(曾赠潜增愿普碑)星越赠潜增愿普碑

粵原摇摇摇摇月豫摇摇摇摇愧晃摇摇摇摇濶圆

中葬遭糟滓是集合酖的元素个数有 (摇摇)

粵 貳 个 月 貳 个 悅 貳 个 閱 貳 个

列判断正确的是 (摇摇)

粵園_≠ 酖 月圓₌ 酖 懷原_≠ 酖 閱原₌ 酖

粵 粵 曹 曹 粵

懷韓司曹 悅 懷韓司曹不属于 粵月悅中任何一个

7. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空: 援

(员)缘 粤:(圆)原圆 粤:(猿)远 粤媛

的支援

10 援知 粵越 曾^(國)垣 着垣 越曾^(國) 曾^(國) 砾^(國), 月越(曾^(國) 曾^(國)) 垣^(國) 越曾^(國) 垣^(國) 着垣^(國), 当 粵越
{圓时 求集合 月援

答案与点拨

1 援手点拨 注意区分集合中元素的性质, 题中两个集合表示两个不同的点集, 援手中集合

☞表示两个数集 根据集合中元素的无序性,☞表示同一集合

2 摇点拨 疫曾赠 在亦曾圆袁越依员,依圆,依猿,依原,依远,依圆援

3 援摇点拨 葬越圆垣员 酝遭越圆垣圆 原越圆垣员 酝糟越圆垣圆 圆 酝兑越圆垣圆 猿 酝援

4 拨 点拨:由绝对值的性质,代数式 $\frac{\text{曾}}{\text{渣}} \cdot \frac{\text{赠}}{\text{渣}} \cdot \frac{\text{扎}}{\text{渣}} \cdot \frac{\text{渣}}{\text{曾}}$ 的值为 0,依题

5 援 援 点 拨 疫 葬 粤 亦 葬 为 偶 数 援 疫 遭 月 亦 遭 为 奇 数 亦 葬 回 遭 为 奇 数 如 葬 越 原 遭 越 援
葬 回 遭 苑 月 援

6 擇₄園,原₁的一切實數搖点拨 根据元素的互异性,葬₁垣葬₂葬₃即葬₁垣葬₂園易得葬₁原₁園援

7 援员 ∉ 摇(圆) ∈ 摇(猿) ∉ 摇点拨:曾原员约/圆即 曾约员垣/圆要缘圆 跃员垣/圆,亦 缘圆 ∉ 粤,

又疫原 $\frac{1}{2}$ 與垣/圓亦原圓 $\frac{1}{2}$ 粵爰

又疫(√远^圆越远越袁^圆袁越袁^圆亘/怨(√圆^圆亘^圆越袁^圆亘^圆圆越袁^圆亘/愿,

亦(√远^圆)跃(√圆垣^圆)援

即√远跃/圆垣员,亦√远# 粤爰

8 援 原员园猿愿摇点拨 :分别令 曾越园员,原员圆,原圆猿,即得援

9 掘园{葬遭葬}员及葬园得遭葬越园即遭园从而{葬园员越葬葬园进而有葬越

员而葬^越(舍去)或葬^越原^故葬^垣垣^越越^援

10 援粵越 曾蠻垣 着可犛越 曾蠻垣 (責京) 曾犛犛 越圓援

亦方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = 1$ 由韦达定理可得

$$\begin{cases} \text{原(責原)} & \text{越圓垣圓} \\ \text{擇越圓伊圓} \end{cases} \text{摇摇解得} \begin{cases} \text{責越原猿} \\ \text{擇越原} \end{cases} \text{援}$$

亦月越 曾 曾 曾 垠 垠 垠 垠 越

{ 瞿 瞿 瞿 } 原 瞿 瞿 垣 瞿 瞿 越

{曾^{ㄗㄥˊ} 原^{ㄩㄢˊ} 璽^{ㄕㄨㄟˋ} 越^{ㄩㄝˋ}}

{ 曾 贊 越 袁 依 圓 越 }

{猿原/圆猿垣/圆}

亦集合 月中的元素有 猿原/圓和 猿垣/圓

1.1.2 集合的表示方法

课标内容诠释

一、列举法

摇摇定义 将集合中的元素一一列举出来 写在大括号内表示集合的方法叫做列举法