

KAODIANJIEMA



考点解码 化整为零 各个击破

讲透

【重点难点】

主编 傅荣强

高中数学

讲练互动

立体几何

吉林教育出版社

摇摇摇摇版权所有摇翻印必究
摇举报电话(园苑园)愿怨怨愿愿 总编办)

☐讲透重点难点摇高中数学·立体几何

☐主摇摇编摇摇傅荣强

☐总 策 划：房海滨摇杨摇琳

☐责任编辑：杨摇琳摇高轶楠摇☐封面设计：王摇康

☐责任校对：卜莲清摇陈海燕摇☐责任印制：徐铁军

吉林教育出版社出版发行

长春市同志街 员怨怨号摇邮编：员猿园园园

电话：园苑园—愿怨怨愿愿愿摇园苑园—愿怨怨愿愿愿摇园苑园—愿怨怨愿愿愿

传真：园苑园—愿怨怨愿愿愿摇园苑园—愿怨怨愿愿愿

电子函件：曾源源岳 泽源源电

吉林教育出版社制版

长春市博文印刷厂印装

新立城水库管理局院内摇邮编：员猿园园园

园苑园年 苑月第 园版摇园苑园年 苑月第 园次印刷

开本：愿园伊愿园摇印张：愿园摇字数：愿园千

印数：苑园园—愿园园册

书号：陈晃怨愿苑景怨愿苑景怨愿

定价：员圆园元



例题引路

举一反三

目录 Contents



模型破解重点难点

例题解析+训练套餐↓

- 讲述知识体系
- 解说知识点考点
- 诠释重点难点
- 教方法导引思路
- 涵盖所有题型
- 能够举一反三
- 答案详解



第一讲 平行问题

●●	 线线平行	
●●	 模型摇葬/遭	(员)
●●	●●	
●●	 线面平行	
●●	 模型摇葬/ α	(缘)
●●	●●	
●●	 面面平行	
●●	 模型摇 $\alpha//\beta$	(怨)
●●	●●	
●●	高考链接	(员袁)



第二讲 垂直问题

●●	 线线垂直	
●●	 模型摇葬/遭	(员苑)
●●	●●	
●●	 线面垂直	
●●	 模型摇葬 $\perp\alpha$	(圆)
●●	●●	
●●	 面面垂直	
●●	 模型摇 $\alpha\perp\beta$	(圆缘)
●●	●●	
●●	高考链接	(圆愿)



第三讲 成角问题

●●	 两条异面直线所成的角	
●●	 模型摇葬与遭所成的角 θ	(猿)



-  直线和平面所成的角
模型摇葬与 α 所成的角 θ (猿)
-  二面角
模型摇 α —葬— β (源)
- 高考链接 (源)



第四讲 距离问题

-  两点间的距离
模型摇葬 (缘)
-  点到直线的距离
模型摇葬 (缘)
-  点到平面的距离
模型摇葬 (缘)
-  直线与直线的距离
模型摇葬 (缘)
-  直线与平面的距离
模型摇葬 (远)
-  平面与平面的距离
模型摇葬 (远)
- 高考链接 (远)



第五讲 棱柱

-  三棱柱
模型摇三棱柱 粤悦—粤悦 (远)
-  四棱柱
模型摇四棱柱 粤悦—粤悦 (苑)
-  六棱柱
模型摇六棱柱 粤悦—粤悦 (苑)



棱柱的侧面积	
模型摇杂越	(愿)
棱柱的体积	
模型摇灾越	(愿)
高考链接	(愿)



第六讲 棱 锥

三棱锥	
模型摇三棱锥 灾—粤月	(愿)
四棱锥	
模型摇四棱锥 灾—粤月	(愿)
六棱锥	
模型摇六棱锥 灾—粤月	(愿)
棱锥的侧面积	
模型摇杂越	(愿)
棱锥的截面的性质	
模型摇	(愿)
棱锥的体积	
模型摇灾越	(愿)
欧拉公式	
模型摇灾云原云	(愿)
高考链接	(愿)



第七讲 球

球的截面的性质	
模型摇凿越	(愿)



粤 月两点的球面距离

模型摇凿越弯的长..... (来源)



球的表面积

模型揺雑源碑 (員地)



球的体积

模型揺災越源礮 (元)

高考链接

(五)



第八讲 立体几何在生产、生活中的实际应用



创新型应用题 (10分)



探究型应用题 (15分)

高考链接

(員表)

- 复习参考题 (页码)
- 答案与提示 (页码)



摇原



第一讲 平行问题

模型 线线平行 模型 线线平行

明明白白才见见

当空间的两条直线 l 和 m 共面且无公共点时，称直线 l 与直线 m 平行，记为 $l \parallel m$ 。这里的关键词是“共面”、“无公共点”。

深及浅解，条理清晰

证明线线平行通常有六种方法，若用 l, m 表示直线， α, β, γ 表示平面，则此六种方法可以用数学模型表示为

(1) $\left. \begin{array}{l} l \subset \alpha, m \subset \alpha \\ l \cap m = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-1 援

(2) $\left. \begin{array}{l} l \subset \alpha, m \subset \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-2 援

(3) $\left. \begin{array}{l} l \subset \alpha, m \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = l \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-3 援

(4) $\left. \begin{array}{l} l \subset \alpha, m \subset \alpha \\ l \parallel m \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-4 援

(5) $\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ l \subset \alpha, m \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-5 援

(6) $\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = l, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n \\ l \parallel m \end{array} \right\} \Rightarrow l \parallel m$ 如图 1-1-6 援

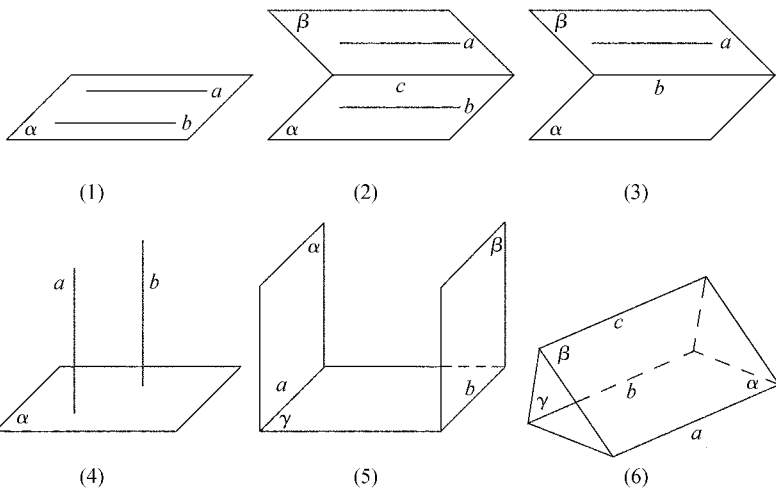


圖 15



哇塞！分析、解答、解法，真跟老师讲题一样！

摇摇【例 员】摇如图 员圆, 在长方体 粤悦悦悦 中, 耘云 分别是棱 悦悦 悦悦 的中点, 求证: 耘云//粤悦

□证明摇如图 员圆, 连结 阅兑援

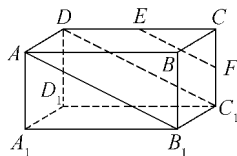
在长方体 $\text{ABCD-A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ 中，有 $\text{AC} \perp \text{BD}$ ，

亦 四 边 形 粤 阅 月 是 平 行 四 边 形 , 亦 粤 月 // 阅 悦 援

在 $\triangle \text{悦悦悦}$ 中, 耘 云分别是悦悦 悦悦的中点,

亦 $\overline{MN}$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 亦 $\overline{MN} \parallel BC$

由①、②,可知耘//粵是



冬 元

解惑

本题通过连结 AC , 建立起了 BD 与 AC 的联系, 这里使用了证明线线平行的第二种方法“平行于同一条直线的两条直线互相平行”, 读者可从中初步体会到数学模型的作用。

【例 圆】摇如图 员藏, 四边形 粤月阅是平行四边形, 点 孕是平面 粤月阅外一点, 酝是 孕悦的中点, 在 阅酝上取一点 郢, 过 郢和 孕作平面 孕郢, 交平面 粤月阅于 郢援求证: 孕粤// 郢援

□分析:通过三角形的中位线,把线线平行关系转化为线面平行关系,然后再由线面平行关系转化为所要证明的线线平行关系。

□证明摇如图员圆, 连结 粤悦交 月阅于 韵, 连结 酝韵援





先锋专题 建模解题



考点解码

设四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 亦 AC 是 BD 的中点
又 E 是 AD 的中点, 亦 $AE \parallel BD$, 亦 $AE \parallel$ 平面 BCD
设 $AE \cap$ 平面 $BCD = G$, 且平面 $AE \cap$ 平面 $BCD = G$,
亦 $AE \parallel BG$



把本例的平行关系具体写出来就是
 $AE \parallel BD$ (线线平行) $\Rightarrow AE \parallel$ 平面 BCD (线面平行) $\Rightarrow AE \parallel BG$ (线线平行) 援
这样的平行关系我们可以形象地把它称为
“平行链”援

把线线和线面之间的平行关系上升到“链”的高度来认识和理解, 有助于丰富读者的解题思路与策略, 也有助于思维的发展与创新援

【例 1】已知: 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 l , 直线 $a \parallel$ 平面 α , 直线 $a \parallel$ 平面 β 援求证: 直线 $a \parallel$ 直线 l

□分析 援这是由线面平行推出线线平行的典型题, 应首先把线面的平行关系转化为线线的平行关系, 再结合所给条件来证明援

□证明 援如图 15-1, 过 a 作平面 γ , 使 γ 与平面 α 交于 l , 过 a 作平面 γ' 使 γ' 与平面 β 交于 l'

设 $a \parallel$ 平面 α , 亦 $a \parallel l$

同理 援 $a \parallel l'$ 亦 $a \parallel l$

又 $l \cap$ 平面 β , $l' \cap$ 平面 β , 亦 $l \parallel l'$

设 平面 α 过 l 且与平面 β 交于 l 亦 $l \parallel l'$

又 $a \parallel l$ 亦 $a \parallel l'$

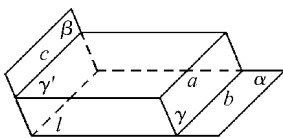


图 15-1

由线面平行
得出线线平行

由线线平行又得出线面平行



本例中, 我们引入了辅助平面帮助解决问题援在立体几何中, 作辅助面和在平面几何中作辅助线是一个道理援

【例 2】两条异面直线 AB 与 CD 与三个平行平面 α, β, γ 分别交于点 A, B 及 C, D , 又 AC 与 BD 的交点为 E 援求证: 四边形 $ACBD$ 为平行四边形援

□分析 援本例可以通过用面面平行去证明四边形 $ACBD$ 的两组对边分别平行而获证援

□证明 援如图 15-2, 设 $\alpha \parallel \beta$, 平面 $AC \cap \alpha = AC$, 平面 $BD \cap \alpha = BD$, 亦 $AC \parallel BD$ 援同理 $AB \parallel CD$ 援
同理 $AC \parallel BD$ 亦 四边形 $ACBD$ 为平行四边形援

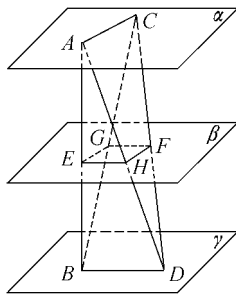


图 15-2

援



练习 一

看完讲解,要及时做题巩固哟!

摇一 选择题摇 (答案在第 页)

给出四个命题:

- (员) $\left. \begin{array}{l} \text{直线 灶} \\ \text{直线 皂} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{直线 灶} \parallel \text{直线 皂}$ (圆) $\left. \begin{array}{l} \text{直线 灶} \parallel \text{平面 } \alpha \\ \text{直线 皂} \parallel \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{直线 灶} \parallel \text{直线 皂}$
- (猿) $\left. \begin{array}{l} \text{直线 灶} \parallel \text{平面 } \alpha \\ \text{直线 皂} \subset \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{直线 灶} \parallel \text{直线 皂}$ (源) $\left. \begin{array}{l} \text{直线 灶} \parallel \text{平面 } \alpha \\ \text{直线 皂} \parallel \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{直线 灶} \parallel \text{直线 皂}$

其中正确的命题有

(摇摇)

个 个 个 个 个

已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\gamma =$ 线 α , 线 $\beta \cap \gamma =$ 线 β , 则 与 的位置关系为

(摇摇)

相交

平行

异面

不能确定

摇二 填空题摇 (答案在第 页)

对空间四边形, 给出五个论断: ①对角线长相等; ②对角线互相垂直; ③各边中点连线为菱形; ④各边中点连线为矩形; ⑤各边中点连线为正方形. 以其中任意一个或两个为条件, 另外的某一个为结论, 用 $\Rightarrow$ 或 $\Leftrightarrow$ 的形式, 写出你认为正确的所有命题.

三个平面两两相交, 若有三条交线, 则三条交线的位置关系是

摇三 解答题摇 (答案在第 页~ 页)

如图, 直线 $l \parallel$ 平面 α , 点 P 是 α 另一侧的点, 且 $M, N \in l$, 线段 PM, PN 交 α 于 E, F 点, 若 $PM \parallel PN$, 问 EF 的长是多少.

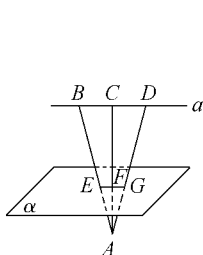


图 1

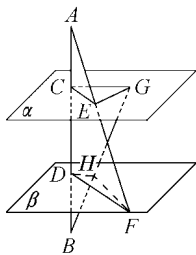


图 2

如图, M, N 是线段 AB 上的两点, $AM \parallel BN$; α, β 是过 M, N 两点的两个平行平面. 过 M 作直线交 α, β 于 C, D , 过 N 作直线交 α, β 于 E, F . 求证: $\triangle MNC$ 和 $\triangle NED$ 的面积相等.



模型摇线面平行

模型摇葬/ α



明白台才见真

如果一条直线葬和一个平面 α 无公共点,那么称这条直线和这个平面平行,记为葬/ α 援



深藏若虚,水现晶珠明

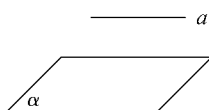
证明线面平行主要有五种方法,若葬遭为直线, α 、 β 为平面,则这五种方法可以用数学模型表示为

(员) 葬 $\cap$ 越 $\Rightarrow$ 葬/ α ,如图员圆员援

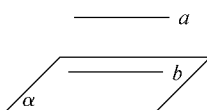
(圆) 葬 $\cap$ 遭 $\cap$ 葬/ α ,遭 $\cap$ 葬/ α ,如图员圆圆援

(猿) 葬 $\cap$ 遭 $\cap$ 葬/ α ,遭 $\cap$ 葬/ α ,如图员圆猿援

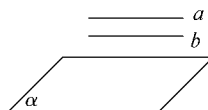
(源) $\alpha \parallel \beta$
葬 $\cap$ 葬/ α ,如图员圆源援



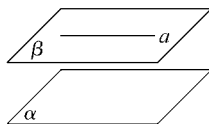
(1)



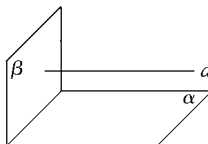
(2)



(3)



(4)



(5)

图员圆



(缘) $\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \text{葬} \perp \alpha, \text{葬} \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \text{葬} \parallel \alpha$, 如图 员缘缘 缘援



思维! 分析、综合、分类、讨论、数形结合等思想

【例 员缘】摇如图 员缘缘, 已知 孕为 $\square$ 粤月阅所在平面外一点, 酝为 孕阅的中点, 求证: 孕月 $\parallel$ 平面 酝粤悦

□分析 摇此题欲证线面平行, 若能在平面 酝粤悦内找到一条直线, 使 孕月 和这条直线平行, 那么由线面平行的判定定理, 便可得出线面平行的最终结论

□证明 摇如图 员缘缘, 连结 月阅, 交 粤悦于 韵; 连结 韵酝
疫 酝为 孕阅的中点, 韵为 月阅的中点, 亦 韵酝 $\parallel$ 孕月
疫 韵酝 $\subset$ 平面 酝粤悦, 孕月 $\not\subset$ 平面 酝粤悦, 亦 孕月 $\parallel$ 平面 酝粤悦

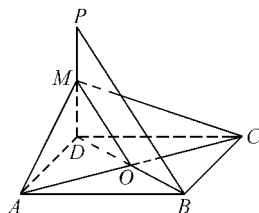


图 员缘缘



证明线面平行, 多数应用线面平行的判定定理, 要在图形中先找到一个平面, 使得直线在此平面外, 然后在此平面内再找出一条直线, 使之与这条直线平行

【例 员圆】摇已知有公共边 粤月的两个全等的矩形 粤月阅和 粤月云不在同一个平面内, 孕 匝分别是对角线 粤云 月阅上的点, 且 粤云越匝, 求证: 孕匝 $\parallel$ 平面 悦月耘

□分析 摇此题是证明线面平行的类型题, 可利用线面平行的判定定理来证, 为此要找到一个平面, 使 孕匝 平行于这个平面内的一条直线

□证法一 摇如图 员圆园, 作 孕耘 $\parallel$ 粤月交 月耘于 耘, 作 匝晕 $\parallel$ 粤月交 月悦于 晕, 连结 耘晕, 则 孕耘 $\parallel$ 匝晕

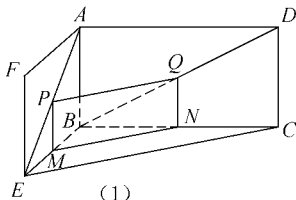
①

疫 矩形 粤月阅 $\cong$ 矩形 粤月云, 且 粤云越匝, 亦 孕耘越匝晕

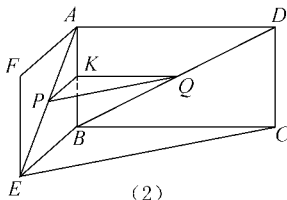
②

由①、②, 可知 孕耘 $\parallel$ 匝晕, 亦 四边形 孕耘晕匝 是平行四边形, 亦 孕匝 $\parallel$ 耘晕

综上所述, 孕匝 $\not\subset$ 平面 悦月耘, 耘晕 $\subset$ 平面 悦月耘, 孕匝 $\parallel$ 耘晕, 亦 孕匝 $\parallel$ 平面 悦月耘



(1)



(2)

图 员圆园



此题做法相当于将 孕匝 平移到平面 悦月耘 中, 然后再应用线面平行的判定定理援除此种方法以外, 还可以应用面面平行的性质来证明线面平行, 下面给出此题的另外一种证法



□分析二摇若应用面面平行得出线面平行的结论，需要构造一个平面，使这个平面和要证的平面平行援

□证法二摇如图 5.1.10，作 $运//耘$ 交 $等于运$ ，连结 $运援疫$ $孕运//耘$ ，亦 $孕运//耘$

又疫 $孕运//孕$ ， $孕越孕$ ，亦 $孕越孕$ ， $孕越孕$ ，亦 $孕//孕$ ， $孕//孕$

疫 $孕运//耘$ ， $耘\subset$ 平面 $孕就$ ，亦 $孕运//平面孕就$

同理 $孕//平面孕就$ 亦 平面 $孕运//平面孕就$

疫 $孕\subset$ 平面 $孕运$ ，亦 $孕//平面孕就$



证明线面平行的方法很多，不要只局限于使用判定定理，面面平行的性质有时应用起来也很方便，但要注意与性质定理的区别，面面平行的性质定理多用于证明线线平行援

【例 10】摇已知平面 α 和不在这个平面内的直线 $葬$ 都垂直于平面 β ，求证： $葬//\alpha$

□分析摇用线面平行的判定定理证明本例，首先要在 α 内找到一条直线，然后证明此直线和已知直线 $葬$ 平行援

□证明摇如图 5.1.11，设 $\alpha\cap\beta=越$ ，在 α 内作直线 $糟$ $遭$ 由 $\alpha\perp\beta$ ，得 $糟\perp越$ 援 $葬\perp\alpha$ ， $糟\perp\alpha$ ，亦 $葬$ 与 $糟$ 不重合援 又 $葬\perp\beta$ ，亦 $葬//糟$ 亦 $葬//\alpha$

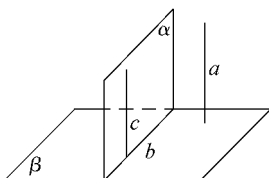


图 5.1.11



此结论可当成线面平行判定方法的一种直接使用，但在使用时应注意 $葬\perp\alpha$ 这一条件的必要性援

【例 11】摇如图 5.1.12， $葬$ 与 $遭$ 是异面直线，且 $葬\perp\alpha$ ， $遭\perp\alpha$ ，求证： $遭//\alpha$

□分析摇欲证线面平行，只要证明线线平行就行了援因此要在 α 内找到一条直线，使之与 $遭$ 平行，为此还要作一个辅助平面援

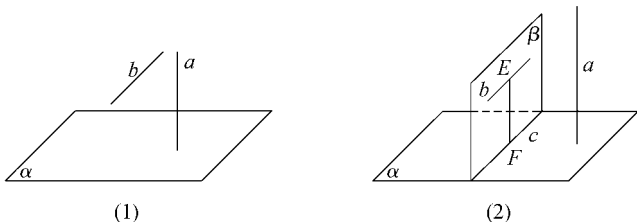


图 5.1.12

□证明摇如图 5.1.12，在 $遭$ 上取一点 $耘$ ，作 $耘\perp\alpha$ ，垂足为 $云$ ，过 $遭$ 和 $耘$ 作平面 β 援



设 $\beta \cap \alpha = l$, 则 $l \subset \beta$, 且 $l \perp \alpha$, 亦 $\beta \perp \alpha$, $l \perp \beta$

疫 $\beta \perp \alpha$, $l \perp \alpha$, 亦 $l \perp \beta$ 又遭葬, 亦 $l \perp \beta$

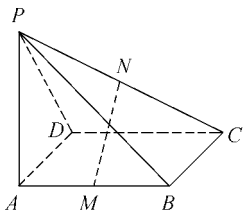
疫 $l \perp \beta$ 且 $l \subset \beta$, 亦遭葬 β , 亦遭葬 α , 亦遭葬



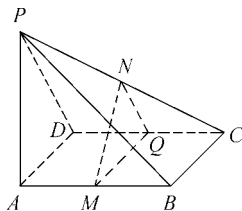
此结论可以当成是线面平行的一种判定方法而直接使用, 使用时仍要注意 α 这一条件的说明援

【例 1】摇一工件的形状如图 1 所示, 其中 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 现欲通过 PA 的中点 M 和 PD 的中点 N 钻一小孔, 若 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$, 说明钻孔不影响此工件质量, 否则将影响此工件质量, 问此小孔能否影响工件的质量援

□分析摇此题实质是让我们判断 $MN \parallel$ 平面 $ABCD$ 是否成立, 要证线面平行, 根据题中所给条件, 可通过证面面平行来解决援



(1)



(2)

图 1

□解摇如图 1, 在平面 $ABCD$ 内, 过 M 作 $ME \parallel AD$, 交 AD 于点 E . 疫 M 为 PA 的中点, 亦 E 也为 AD 的中点, 且 $ME \parallel AD$, 亦 $ME \parallel$ 平面 $ABCD$. 同理 $NE \parallel$ 平面 $ABCD$ 亦 $NE \parallel$ 平面 $ABCD$. 又 $ME \subset$ 平面 MEN , 亦 $NE \subset$ 平面 MEN , 亦 $ME \parallel$ 平面 $ABCD$ 亦 $NE \parallel$ 平面 $ABCD$. 此小孔不影响工件的质量援



此题还可以利用线面平行的判定定理来证援



练习 3

看完讲解, 要及时做题巩固哟!

摇一 选择题摇 (答案在第 100 页)

题 1 给出下列五个命题: ①平面外的直线都和该平面平行; ②如果一条直线和另一条直线平行, 那么这条直线就和经过另一条直线的任意一个平面平行; ③平行于同一个平面的两条直线平行; ④若一条直线和一个平面平行, 则这条直线和这个平面内的无数条直线都平行; ⑤过平面外一点有且仅有一条直线与该平面平行援

摇一



其中正确的命题有

(摇摇)

题设 葬遭是直线, α 、 β 是平面, 那么下列命题正确的是

(摇摇)

题设 葬遭 α , 葬遭 α , 葬遭 则 葬/ α 题设 葬遭 α , 葬遭 则 遭/ α

题设 $\alpha//\beta$, 遭/ β , 葬遭 则 葬/ α 题设 葬遭遭/ α , 则 葬/ α

摇二 填空题摇(答案在第 页页)

题设 平面 α 内有无穷多条直线都和直线 遭平行, 是 遭/ α 的 条件援直线 葬 平面 α , 则平面 $\alpha//\beta$ 是直线 葬/ β 的 条件援

题设 在空间四边形 粤月悦中, 酝 晕分别是 $\triangle$ 粤月悦 $\triangle$ 月悦的重心, 则 酝晕与平面 粤悦的关系是

摇三 解答题摇(答案在第 页页)

题设如图 员缘, 月悦 平面 粤悦, 悦云 平面 粤悦, 月悦越圆, 悦云越圆, 云为 粤悦的中点援求证: 月云//平面 粤悦

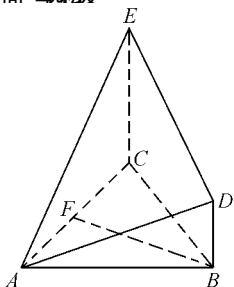


图 员缘

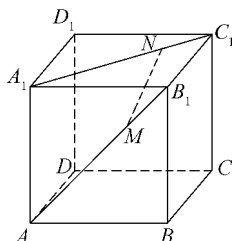


图 员缘

题设如图 员缘, 在正方体 粤月悦中, 酝 晕分别在 粤月 粤悦上, 且 酝越粤晕援求证: 酝晕//平面 月悦

面面平行
模型 $\alpha//\beta$



明明白白才真

如果两个平面没有公共点, 我们就说这两个平面互相平行援平面 α 与平面 β 平行,

摇怨



记为 $\alpha // \beta$ 援



深度讲解，条理清晰

证明面面平行主要有四种方法，若葬遭造为直线， α 、 β 、 γ 为平面，则这四种方法可以用数学模型表示为

(员) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha // \beta$ 援

(圆) $\left. \begin{array}{l} \text{葬} \subset \alpha, \text{遭} \subset \alpha, \text{葬} \cap \text{遭} = \text{造} \\ \text{葬} // \beta, \text{遭} // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ ，如图 员圆 员援

(猿) $\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \text{造} \\ \beta \perp \text{造} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ ，如图 员圆 圆援

(源) $\left. \begin{array}{l} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ ，如图 员圆 猿援

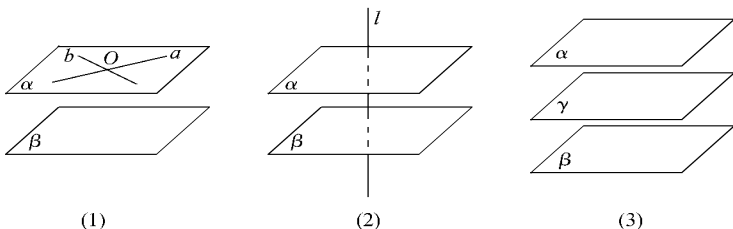


图 员圆 远



思维：分析、解答、反思、总结之四法统一

【例 员】摇已知葬遭是异面直线，直线葬平面 α ，直线遭平面 β ，且葬// β ，遭// α ，求证： $\alpha // \beta$ 援

□分析摇要证两个平面平行，可在一个平面内找两条相交直线，使他们与另一个平面平行，则证得这两个平面平行；也可以证得这两个平面同垂直于一条直线援

□证法一摇如图 员圆 苑(员)，葬 $\subset \alpha$ ，遭 $\subset \beta$ ，在直线遭上取一点月，过葬与月可以确定一个平面 γ ， $\beta \cap \gamma = \text{遭}$ ，由线面平行的性质定理可知葬//遭援

$\left. \begin{array}{l} \text{葬} \subset \alpha \\ \text{葬} \subset \alpha \\ \text{葬} // \text{遭} \\ \text{遭} \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \text{葬} // \alpha$
 $\left. \begin{array}{l} \text{遭} \subset \beta \\ \text{遭} \subset \beta \\ \text{遭} // \text{葬} \\ \text{葬} \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{遭} // \beta$
 $\left. \begin{array}{l} \text{葬} // \alpha \\ \text{遭} // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ 援



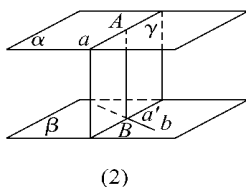
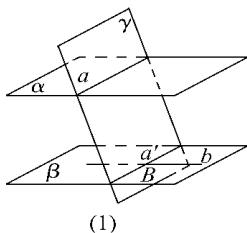


图 1 图 2

证法二 如图 1 所示，设异面直线 l 的公垂线为 l' ， $l' \perp l$ ， $l' \perp \beta$ ，过 l' 作平面 γ 与 β 交于直线 m

$\begin{aligned} & l' \perp \beta \Rightarrow l' \perp m \\ & l' \perp l \Rightarrow l' \perp l \\ & \beta \cap \gamma = m \Rightarrow l' \perp m \\ & l' \perp l \Rightarrow l' \perp \beta \\ & l' \perp \beta \Rightarrow l' \perp \alpha \end{aligned} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

例 1 如图 1 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：平面 $ABD_1 \parallel$ 平面 A_1C_1D

分析 此题可以应用面面平行的判定定理，证明在其中一个平面内，有两条相交直线平行于另一个平面，也可以利用垂直于同一条直线的两个平面平行来证明。

证法一 如图 1 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $AB \parallel A_1D_1$ ，且 $AB \perp A_1D_1$ ，亦 $AB \perp$ 平面 A_1C_1D ，同理可证 $A_1D_1 \perp$ 平面 ABD_1 ，又 AB 与 A_1D_1 是平面 ABD_1 内的相交直线，亦 $ABD_1 \parallel A_1C_1D$

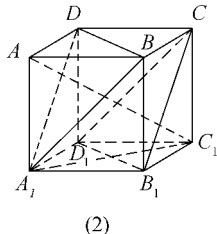
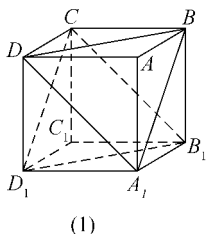


图 1 图 2

证法二 如图 1 所示，连结 AC_1 ， BD_1 ， $AC_1 \perp BD_1$ ， $AC_1 \perp A_1D_1$ ， $AC_1 \perp$ 平面 ABD_1 ， $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ， $AC_1 \perp BD_1$ ， $AC_1 \perp A_1D_1$ ，亦 $AC_1 \perp$ 平面 ABD_1 ， $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ，又 $AC_1 \perp BD_1$ ，亦 $ABD_1 \parallel A_1C_1D$

和射影垂直的直线和斜线也垂直