

KAODIANJIEMA

 **考点解码** 化整为零 各个击破

讲透

【重点难点】

主编 傅荣强

高中数学

讲练互动

函数、方程、不等式的关系

吉林教育出版社

摇摇摇摇版权所有摇翻印必究
摇举报电话(园弍弍)愿弍弍弍(愿 总编办)

□讲透重点难点摇高中数学·函数、方程、不等式的关系
□主摇摇编摇摇傅荣强

□总 策 划：房海滨摇杨摇琳
□责任编辑：杨摇琳摇高轶楠摇□封面设计：王摇康
□责任校对：卜莲清摇陈海燕摇□责任印制：徐铁军

吉林教育出版社出版发行
长春市同志街 员总号 摇邮编：员总图
电话：园苑员一愿刃缘特缘遥愿刃缘线缘遥愿刃缘缘缘
传真：园苑员一愿刃缘集图册遥愿刃缘缘缘
电子函件：曾源力岳 潘挂群电
吉林教育出版社制版

长春市博文印刷厂印装
新立城水库管理局院内摇邮编：130100
圆园零年 苑月第 圆版摇圆园零年 苑月第 圆次印刷

开本：愿园尹愿瑶员瑶瑶印张：源圆瑶字数：员愿千
印数：愿园员一愿瑶册
书号：陈星烈愿园范景铸愿京制愿愿

定价：¥19.90元



例题引路

举一反三

目录 Contents



模型破解重点难点

例题解析+训练套餐↓

- 讲述知识体系
- 解说知识点考点
- 诠释重点难点
- 教方法导引思路
- 涵盖所有题型
- 能够举一反三
- 答案详解



第一讲 函数、方程、不等式的关系

- 一次函数、一元一次方程、一元一次不等式的关系
模型摇赠越赠越赠, 赠赠越赠, 赠赠越赠园 (员)
- 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系
模型摇赠越赠 垣赠赠赠 赠赠垣赠赠赠赠园, 赠赠垣赠赠赠赠园 (愿)
- 区间上的二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系
模型摇赠 [α, β] 与 枣赠 越赠垣赠赠赠赠 赠赠垣赠赠赠赠园 (员猿)
- 一元二次方程的实根的分布
模型摇赠赠垣赠赠赠赠园, 枣赠 越赠垣赠赠赠赠 (圆)
- 函数、方程、不等式的关系
模型摇赠赠枣赠, 枣赠 越园, 枣赠 $\neq$ 园 (圆)
- 高考链接 (猿)



第二讲 最大值、最小值问题

- 非负数的使用
模型摇赠 $\geq$ 园 (猿)
- 判别式的使用
模型摇 $\Delta \geq$ 园 (源)
- 均值不等式的使用
模型摇 赠赠 $\geq \sqrt{赠赠}$ (源)
- 高考链接 (缘)



	不等式中的恒成立问题	
	函数中的恒成立问题	
	模型摇摇赠 < 责> 赠 > 择> 赠 > 择>	(獐圆)
	高考链接	(獐圆)



	创新型应用题	(苑)
	探究型应用题	(愿)
	高考链接	(园)

- 复习参考题 (怨愿)
- 答案与提示 (怨苑)





第一讲 函数、方程、不等式的关系

摇摇一次函数、一元一次方程、
摇摇一元一次不等式的关系
模型摇摇摇摇，摇摇，摇摇



思维自由才灵

如图 15-15，设一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标是 x_0 ，则
(1) x_0 是方程 $kx+b=0$ 的根
(2) 当 $x > x_0$ 时，不等式 $kx+b > 0$ 的解集是 $\{x | x > x_0\}$ ；当 $x < x_0$ 时，不等式 $kx+b < 0$ 的解集是 $\{x | x < x_0\}$

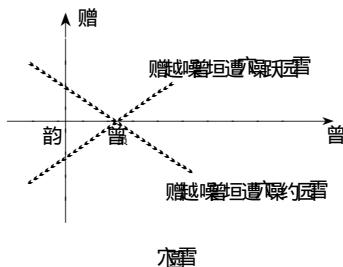
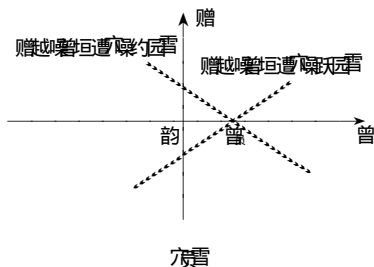


图 15-15



深入讲解，条理清晰

当 x_0 是方程 $kx+b=0$ 的根时，函数 $y=kx+b$ 与不等式 $kx+b > 0$ 会因此产生哪些结果呢？

摇摇



如图 10-10, 设 x_0 是一元一次方程 $ax+b=0$ 的根, 则

(1) 函数 $y=ax+b$ 的图象过点 $(x_0, 0)$

(2) 当 $a > 0$ 时, 不等式 $ax+b > 0$ 的解集是 $\{x | x > x_0\}$; 当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax+b > 0$ 的解集是 $\{x | x < x_0\}$

当不等式 $ax+b > 0$ 的解集是 $\{x | x > x_0\}$ 时, 函数 $y=ax+b$ 与方程 $ax+b=0$ 又会因此而产生哪些结果呢? 留给读者自行讨论



说明: 分析、综合、归纳、演绎等方法是一种

【例 1】已知一次函数 $y=ax+b$ 的图象过点 $(x_0, 0)$

(1) 解关于 x 的方程 $ax+b=0$ 得 $x=x_0$

(2) 设不等式 $ax+b > 0$ 的解集是 $x > x_0$, 当 $x > x_0$ 时, 解关于 x 的不等式 $(x-x_0)(x-x_0) \leq 0$

□ 分析 通过一次函数 $y=ax+b$ 的图象过点 $(x_0, 0)$, 间接地给出了方程 $ax+b=0$ 的根与不等式 $ax+b > 0$ 的解集

□ 解 由 (1) 由一次函数 $y=ax+b$ 的图象过点 $(x_0, 0)$ 可知, x_0 是方程 $ax+b=0$ 的根, 所以

方程 $ax+b=0$ 可化为

$$a(x-x_0)=0 \quad (1)$$

由 (1) 和 (2), 得 $x=x_0$ 使用了 $ax+b=0$

解得 $x=x_0$

(3) 由一次函数 $y=ax+b$ 的图象过点 $(x_0, 0)$ 还可以知道, 不等式 $ax+b > 0$ 的解集是 $x > x_0$ 或 $x < x_0$

当 $x > x_0$ 时, $x-x_0 > 0$, 所以 $(x-x_0)(x-x_0) \leq 0$

所以, 不等式 $(x-x_0)(x-x_0) \leq 0$ 可化为 $x-x_0 \leq 0$, 解得 $x \leq x_0$

所以, 不等式 $(x-x_0)(x-x_0) \leq 0$ 的解集是 $\{x | x \leq x_0\}$

同理可得, 不等式 $(x-x_0)(x-x_0) \leq 0$ 的解集是 $\{x | x \geq x_0\}$



本例中, 已知里面隐含着 $a \neq 0$, 至于 a 到底是大于 0 还是小于 0, 这是一个不确定的问题, 因此, 就必须就 $a > 0$ 和 $a < 0$ 实施分类讨论, 第 (3) 小题我们就是这样处理的

【例 2】已知 a, b, c 都是常数





(员) 设 $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, 且 $\text{枣园} > \text{枣园}$, 当 $\text{葬} \neq \text{枣}$ 时, 解不等式 $(\text{葬原枣}) \text{曾} \geq \text{枣园}$ 跃园;

(圆) 设 $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, 且 $\text{早(员)} > \text{早(员)}$, 当 $\text{葬} \neq \text{枣}$ 时, 解方程 $\text{葬曾} \geq \text{枣园}$ 跃园

□ 分析 摇 本例的第(员)、(圆)两题, 可以分别借助 $\text{云曾} > \text{枣曾} \geq \text{枣园}$ 与 $\text{枣曾} > \text{早(曾)} \geq \text{枣园}$ 去获得其解援

□ 解 摇 (员) 由已知, 可知 $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$

设 $\text{云曾} > \text{枣曾} \geq \text{枣园}$, 则 $\text{云曾} > \text{葬原枣}$ 曾 $\geq \text{枣园}$ 跃园

由 葬 、 枣 、 枣 都是常数以及 $\text{葬} \neq \text{枣}$ 可知, 云曾 是一次函数援

因为 $\text{枣园} > \text{枣园}$, 所以 $\text{云园} > \text{枣园}$ 跃园

所以, 一次函数 $\text{云曾} > \text{葬原枣}$ 曾 $\geq \text{枣园}$ 跃园的图象过点 $(\text{枣}, \text{枣})$,

所以, 当 $\text{葬原枣} \geq \text{枣园}$, 即 $\text{葬} \geq \text{枣园}$ 时, 不等式 $(\text{葬原枣}) \text{曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的解集是 $\{\text{曾} \geq \text{枣园}\}$ 跃园; 当 $\text{葬原枣} < \text{枣园}$, 即 $\text{葬} < \text{枣园}$ 时, 不等式 $(\text{葬原枣}) \text{曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的解集是 $\{\text{曾} \geq \text{枣园}\}$ 跃园

(圆) 由题设, 可知 $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$

设 $\text{枣曾} > \text{早(曾)} \geq \text{枣园}$, 则 $\text{枣曾} > \text{葬原枣}$ 曾 $\geq \text{枣园}$ 跃园

由 葬 、 枣 、 枣 都是常数以及 $\text{葬} \neq \text{枣}$ 可知, 枣曾 是一次函数援

因为 $\text{早(员)} > \text{早(员)}$, 所以 $\text{枣园} > \text{早(员)}$ 跃园

所以, 一次函数 $\text{枣曾} > \text{葬原枣}$ 曾 $\geq \text{枣园}$ 跃园的图象过点 $(\text{枣}, \text{枣})$,

所以, 枣园 是方程 $(\text{葬原枣}) \text{曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的根援

因为方程 $\text{葬曾} \geq \text{枣园}$ 跃园与方程 $(\text{葬原枣}) \text{曾} \geq \text{枣园}$ 跃园同解,

所以, 枣园 也是方程 $\text{葬曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的根,

即方程 $\text{葬曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的根是 枣园 跃园



解感 本例中, 构造 云曾 与 枣曾 的依据是 $\text{枣园} > \text{枣园}$ 与 $\text{早(员)} > \text{早(员)}$ 跃园

【例 猿】 摇 已知 $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, 其中 葬 、 枣 是常数援

(员) 设 葬园 , 且 $\text{葬} \neq \text{枣}$, 当不等式 $\text{枣曾} \geq \text{枣园}$ 跃园的解集是 $\{\text{曾} \geq \text{枣园}\}$ 跃园时, 求证: $\text{枣园} \geq \text{枣园}$ 跃园

(圆) 设 $\text{葬} \neq \text{枣}$, 当方程 $\text{枣曾} \geq \text{枣园}$ 跃园以 枣园 为根且 $\text{枣园} \geq \text{枣园}$ 跃园时, 求 枣园 跃园的值援

□ 分析 摇 第(员)小题可通过 $\text{云曾} > \text{枣曾} \geq \text{枣园}$ 去获解, 第(圆)小题可使用 $\text{枣曾} > \text{早(曾)} \geq \text{枣园}$ 去获解

□ 解 摇 (员) 由已知, 可知 $\text{枣曾} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$, $\text{早(曾)} > \text{葬曾} \geq \text{枣园}$

设 $\text{云曾} > \text{枣曾} \geq \text{枣园}$, 则 $\text{云曾} > \text{葬原枣}$ 曾 $\geq \text{枣园}$ 跃园

①



由葬遭是常数及葬猿可知,云曾是一次函数援
不等式枣曾跃旱曾的解集是{曾查葬约愿,也即云曾跃愿的解集是{曾查葬约愿,

所以葬愿约愿,←取决于云曾跃愿及曾约愿中的“约”

解得葬猿,再结合葬愿可知,愿葬猿援

②

由①及云曾跃愿的解集是{曾查葬约愿,可得云愿越愿葬猿垣遭垣愿园,

即

源葬垣遭垣愿

③

由②、③可知,

函数皂越愿是减函数,且遭愿(缘愿葬)灵约愿葬缘,

所以遭愿约愿(缘愿葬)约愿←遭愿约愿

(圆设愿曾越枣曾垣旱曾,则愿曾越葬猿曾垣愿

④

由葬遭是常数及葬猿可知,愿曾是一次函数援

当方程枣曾垣旱曾越愿以曾愿为根且枣愿垣旱愿越愿时,愿曾越愿以猿为根,且愿愿越愿,

所以,④表达的一次函数的图象通过点(猿,愿)和点(愿,愿),

所以葬垣愿约愿,愿葬垣愿约愿,解得葬缘,遭愿愿

把葬缘与遭愿愿代入④,得愿曾越愿愿,

所以枣曾垣旱曾越愿愿,←愿曾越枣曾垣旱曾

所以枣愿垣旱愿垣愿越愿愿愿愿愿愿愿



本例的两个小题中都涉及枣曾与旱曾两个函数,设云曾越枣曾愿旱曾与愿曾越枣曾垣旱曾的目的在于把它们统一在一个函数中,尔后用已知的知识去解析未知的问题援

【例源】设云曾越枣曾垣遭,愿曾越葬猿,其中葬遭砸援

(员当方程云曾愿愿曾越愿有且只有一个根时,求葬遭的取值范围;

(圆当方程云曾愿愿曾越愿无解时,求葬的值及遭的取值范围;

(猿当方程愿曾愿云曾愿愿越愿的解集是砸时,求葬与遭的值;

(源当不等式愿云曾愿愿曾跃愿无解时,求葬的值及遭的取值范围援

□分析】建立相应的函数去求葬遭的值或取值范围援

□解】(员)枣曾越云曾愿愿曾越葬猿垣遭垣愿

当方程云曾愿愿曾越愿有且只有一个根时,函数枣曾越葬猿垣遭垣愿的图象与曾轴有且只有一个交点,



所以 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 遭 砸, 所以, 葬 遭 的取值范围分别是 $\{ \text{葬 砸渣} \}$, 砸 援
($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 越 原 圆 曾 越 葬 原 圆 曾 遭 原 圆 援
当方程 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 无解时, 有 葬 原 圆 越 圆,

遭 原 圆 越 圆, $\leftarrow$ 否则 继 葬 原 圆 越 圆 之后, 方程有无穷多个解, 如: $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 摇 摇

所以, 葬 越 圆 遭 的取值范围是 $\{ \text{遭 砸渣} \}$, 原 圆 援
($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 越 原 圆 曾 原 圆 越 猿 原 圆 曾 原 圆 越 猿 原 圆 援
当方程 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 的解集是 砸 时, 有

猿 原 圆 越 圆, 原 圆 原 圆 越 圆, $\leftarrow$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 的图象与横轴重合

解得 葬 越 猿, 遭 越 原 圆 援
($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 越 原 圆 曾 越 猿 原 圆 曾 遭 原 圆 曾 遭 原 圆 援
当不等式 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 无解时, 有 圆 原 圆 越 圆, 圆 遭 原 圆 越 圆,
所以, 葬 越 猿; 遭 的取值范围是 $\{ \text{遭 查} \}$, 原 圆 援



在本例的第(源)小题中, 如果 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 那么一次函数 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 越 猿 原 圆 曾 遭 原 圆 曾 遭 原 圆 的图象与 曾 轴有且只有一个交点 ($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 圆), 这时不等式 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 原 圆 曾 遭 原 圆 的解集是 $\{ \text{曾 查} \}$ 或 $\{ \text{曾 查} \}$, 与这个不等式无解是矛盾的援继 圆 原 圆 越 圆 之后, 假设 圆 遭 原 圆 越 圆, 那么不等式 ($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 遭 原 圆 曾 遭 原 圆 总是成立的, 即不等式 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 遭 原 圆 的解集是 砸, 这与已知也是矛盾的援

【例 缘】摇 当 噪 $\in [\text{原 员}, \text{员}]$ 时, 不等式 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 噪 原 圆 曾 原 圆 曾 遭 原 圆 总是成立的, 求 曾 的取值范围援

□ 分析 摇 把已知不等式改写成关于 噪 的不等式, 通过一次函数去求 曾 的取值范围援

□ 解 摇 不等式 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 噪 原 圆 曾 原 圆 曾 遭 原 圆 可化为 ($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 原 圆 噪 垣 曾 原 圆 曾 遭 原 圆 跃 圆) ①

当 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 圆 时, ① 不成立, 所以, $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 圆 不在 曾 的取值范围之内援

当 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 圆 时, 设 枣 噪 越 ($\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 原 圆 噪 垣 曾 原 圆 曾 遭 原 圆), 噪 $\in [\text{原 员}, \text{员}]$ 援 ②

把 噪 理解为自变量, 这时②表示线段, 且 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 曾 垣 噪 原 圆 曾 原 圆 曾 遭 原 圆 总成立与 枣 噪 跃 圆 总成立是等价的, 而 枣 噪 跃 圆 总成立时, ②表示的线段应该位于 曾 轴的上方, 它只需线段的两个端点在 曾 轴的上方,

所以 $\begin{cases} \text{枣 原 员 跃 圆} \\ \text{枣 员 跃 圆} \end{cases}$ 摇 即 $\begin{cases} \text{曾 原 圆 垣 圆 跃 圆} \\ \text{曾 原 圆 垣 圆 跃 圆} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \text{曾 垣 圆} \\ \text{曾 垣 圆} \end{cases}$ 援 所以, 曾 的取值范围是 $\{ \text{曾 查} \}$, 或 $\begin{cases} \text{曾 查} \\ \text{曾 查} \end{cases}$ 援



这里给出 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 的几何解释, 以帮助读者提高对问题的理解能力

设 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 以后, $\varphi(x)$ 是增函数, 只有在 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 的情况下, 线段与 φ 轴才能有交点, 这时方程才能有解, 见图 1.1.1

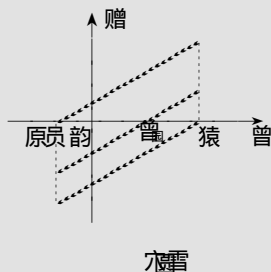
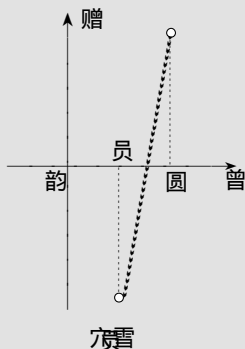


图 1.1.1

设 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$ 以后, $\varphi(x)$ 是增函数, 方程 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 有根的情况有三种, 即 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(y)$, 这三种情况下, 都需要 $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq \varphi(x)$, 见图 1.1.2

注意, 图 1.1.2 中, 横、纵轴的单位长度不统一



练习一

看完讲解, 要及时做题巩固哟!

一 选择题 (答案在第 20 页)

设 $\varphi(x)$ 是常数, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则使方程 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 有根的点 (x, y) 覆盖的平面区域是图 1.1.3 中的 (用阴影表示, 不含原点) (摇摇)

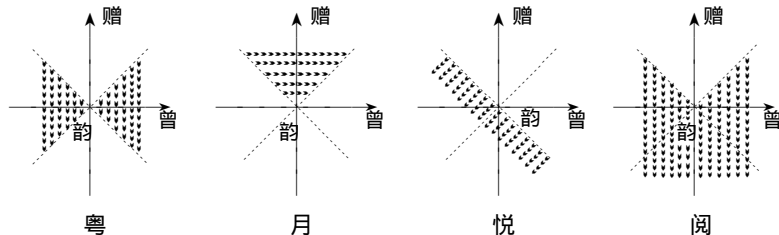


图 1.1.3

模型 破解 重点难点



先锋专题 建模解题



设 Δ 是常数, 且 $\Delta \geq 0$, 当方程 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有解时, Δ 应满足的条件是 (摇摇)

解 设 $\Delta \geq 0$, 则 $\Delta \geq 0$ 摇摇摇摇摇摇摇摇 解 $\Delta \geq 0$

悦 $\Delta \geq 0$

阅 $\Delta \geq 0$

摇二 填空题 (答案在第 28~29 页)

设 $\Delta \geq 0$, 当方程 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有解时, Δ 的取值范围是 援

源 若 $\Delta \in [0, 1]$, 且不等式 $x^2 + \Delta x + \Delta \geq 0$ 总成立, 则实数 Δ 的取值范围是 援

摇三 解答题 (答案在第 28 页)

设 $\Delta \geq 0$, 求 Δ 的取值范围, 使得 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有解.

(员) 当 Δ 为何值时, $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 无解?

(圆) 当 Δ 为何值时, $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有且只有一个解? 其值是什么?

(猿) 当 Δ 为何值时, $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有两个解, 且其中的一个解在区间 $(0, 1)$ 内?

设 $\Delta \geq 0$, 求 Δ 的取值范围, 使得 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有解. 就 Δ 的取值的各种可能的情况, 讨论方程 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 的解的情况, 并画出相应的图形.

求 Δ 的取值范围, 使得 $x^2 + \Delta x + \Delta = 0$ 有解.

二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系

模型 赠 设 $\Delta \geq 0$, 则 $\Delta \geq 0$ 摇摇摇摇摇摇 摇摇摇摇摇摇 摇摇摇摇摇摇



明明白才真真!

为了方便起见, 这里我们把二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的关系归纳在一个表格里, 见表 员.

摇惠



判别式 Δ	Δ 跃园	Δ 越园	Δ 约园
二次函数 赠越曾垣赠曾垣 (赠跃园)的图象			
一元二次方程 赠曾垣赠曾垣 (赠跃园)的根	有两相异实根 赠, 赠越 原赠衣赠遭原赠 (赠约赠)	有两相等实根 赠越赠越原遭 赠	没有实根
一元二次不等式的解集	$\{曾查赠曾, 或 赠跃赠\}$	$\{赠查赠 砸, 且 赠 \le 原遭赠\}$	实数集 砸
	$\{曾查赠, 约赠约赠\}$	$\emptyset$	$\emptyset$



深度讲解，条理直清晰呀

摇摇当葬园时，赠^葬_葬垣葬^葬_葬垣葬^葬_葬垣葬^葬_葬或葬^葬_葬垣葬^葬_葬垣葬^葬_葬的关系，可参照表 员圆归纳出类似的结论援



哇塞！分析、解答、解后，真像老师讲课一样！

【例 1】摇画出能够反映出抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的数量特征和位置特征的草图, 并根据草图指出方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的根, 以及不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的解集援

□解摇抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的开口方向向下, 对称轴的方程是 $x = 1$, 即 $x = 1$, 顶点的坐标是 $(1, 4)$, 与 y 轴的交点的坐标是 $(0, 3)$, 与 x 轴的交点的坐标是 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$, 与 x 轴的交点的坐标是 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$

反映抛物线的数量特征和位置特征的草图, 见图 5-10。

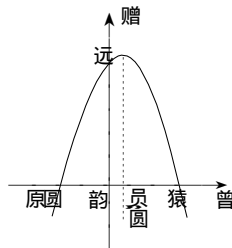


图 5-1-1 来源

搖怨



从图象可以看出：

方程 $\text{原}^{\text{赠}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ 的根是 $\text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$, $\text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{援}$

不等式 $\text{原}^{\text{赠}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ 的解集是 $\{\text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}, \text{或} \text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{援}\}$



二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者的关系，还可以通过下面的过程去形成，即如图 15-3 在函数 $\text{赠}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ 中：

令 $\text{赠}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ ，得到一元二次方程，即

$\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ ；令 $\text{赠}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ ，或 $\text{赠}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{援}$ ，得到一元二次不等式，即 $\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ ， $\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{援}$

其他情况类似援

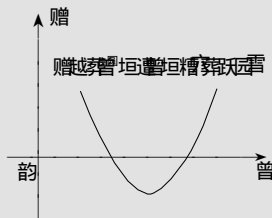


图 15-3

【例 15-3】解不等式 $\text{原}^{\text{赠}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$

□解摇原不等式可变形为 $\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$

解方程 $\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ ，得 $\text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}}$ 援

亦 原不等式的解集是 $\left\{ \text{曾}^{\text{垣}} \left| \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}} \leq \text{曾}^{\text{垣}} \leq \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}} \right. \right\}$ 援

仔细读解惑，可以澄清一些模糊概念



解不等式是求不等式的解集的过程，求得的结果要用集合（如本题的结果用集合表示）或区间表示，不能用不等式表示，这是因为不等式和集合两个概念是不同的，如， $\text{曾}^{\text{垣}} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ 与 $\{\text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}\}$ 的含义是不同的援如果确有必要用不等式表示，必须加“满足……的全体实数”字样，如本题的

结果还可以写成“原不等式的解集是满足 $\frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}} \leq \text{曾}^{\text{垣}} \leq \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}}$ 的全体实数”援另外，结果也不能写成“ $\text{曾}^{\text{垣}} \left\{ \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}} \leq \text{曾}^{\text{垣}} \leq \frac{\text{猿垣}\sqrt{\text{源}}}{\text{源}} \right\}$ ”的形式，“ $\in$ ”

表示元素与集合的从属关系，不能乱用援准确用法，请查阅课本援

【例 15-4】解关于 $\text{曾}^{\text{垣}}$ 的不等式： $\text{猿}^{\text{垣}} \text{垣} \text{曾}^{\text{垣}} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$

□解摇 $\Delta \text{越}^{\text{垣}} \text{垣} \text{垣} \text{越}^{\text{垣}} \text{源}$ 援

由于 Δ 是参数，它的取值范围没有明确的约定，所以 Δ 的取值范围也是不定的，对 Δ 应进行分类讨论



(员) 跃园, 即皂跃园, 或皂约原皂时, 方程猪原皂曾原皂越园的二根为皂依 $\sqrt{\frac{\text{皂园垣皂}}{\text{远}}}$, 此时原不等式的解集是

$$\left\{ \frac{\text{曾} \text{曾} \text{皂原} \sqrt{\text{皂垣} \text{皂垣} \text{皂垣}}}{\text{远}}, \text{或} \frac{\text{曾} \text{垣} \sqrt{\text{皂垣} \text{皂垣} \text{皂垣}}}{\text{远}} \right\};$$

(圆) Δ 越园时, 即 皂越园, 或 皂越原皂时, 方程 猜原皂原皂越园的根为 曾越皂远, 此时原不等式的解集是 $\left\{曾 \mid 曾 \geq 皂, \text{ 且 } 曾 \neq \frac{皂}{远}\right\}$;

(猿) 约 园时, 即 原 约 约 园时, 方程 猿 原 原 原 没有实根, 此时原不等式的解集为 砸援

【例 1】已知不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ 的解集为 $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^+ \\ y \in \mathbb{R}^+ \\ z \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right\}$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 并解不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$

□分析摇求作一个解集为 $\left\{ \frac{\text{曾原猿}}{\text{曾约猿}} \right\}$ 的不等式,使一次项系数为 圆,然后比较系数可求出 葬和 遭

□解集为 $\left\{ \frac{\text{曾}}{\text{原}} \leq \frac{\text{猿}}{\text{约}} \leq \frac{\text{圆}}{\text{猿}} \right\}$ 的不等式是

$(\text{曾原}^{\text{员}}_{\text{圆}})(\text{曾恒}^{\text{员}}_{\text{猿}})$ 约园, 即 $\text{曾}^{\text{员}}_{\text{原}}\text{曾}^{\text{员}}_{\text{远}}$ 约园,

两边同乘以(原式),得

摇摇摇 原^图圆 垣圆 垣圆 跃圆 援

该不等式与 $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ 同解，

将这两个不等式比较系数后得 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$

亦不等式 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n-2} \leq \dots \leq \frac{1}{1}$, 即 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n-2} \leq \dots \leq \frac{1}{1}$, 解得 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n-2} \leq \dots \leq \frac{1}{1}$

亦不等式 $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ 的解集是 $\{x | x \geq y\}$

【例 7】已知不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{x+y+z}$ 的解集是 $\{x, y, z \mid x, y, z \text{ 均大于 } 0, x+y+z \geq 1\}$ ，求不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{x+y+z}$ 的解集。

□分析 摇解不等式 糟垣曾垣圆跃园 , 关键是确定相应的二次方程 糟垣曾垣圆跃园 的两根及二次项系数 糟 的符号援①假设 葬跃园 , 则开口方向向上的抛物线所对应的不等式的解集为 $\{曾\text{曾约曾}\}$, $\alpha \text{跃园}$ 形式是不可能的, 注意不等式中不等号的方向“跃”, 不等式为 葬垣曾垣圆跃园 援这样的不等式的解集只能是满足“曾约曾, 或曾跃曾”的形式援②葬越园, 糟垣曾垣圆跃园 的解集也不可能是 $\{曾\text{曾约曾}\}$, $\alpha \text{跃园}$ 的形式援

这是为了使一次项系数为 圆 这点非常关键 援 因为已知不等式 葬垣圆葬垣糟跃园 中, 葬和糟未知, 圆已知



□解揺由已知,得

$$\begin{cases} \alpha \text{ 垣 } \beta \text{ 越原葬园,} \\ \alpha \beta \text{ 越糟葬园} \end{cases} \leftarrow \text{依韦达定理}$$

再由 园约 约 可知, 原 遭葬园, 糟葬园, 遭葬园, 糟葬园

疫 $\frac{\text{员}}{\alpha}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\beta}$ 越 $\frac{\alpha \text{ 垣 } \beta}{\alpha \beta}$ 越原 $\frac{\text{员}}{\alpha}$, $\frac{\text{员}}{\beta}$ 越 $\frac{\text{员}}{\alpha \beta}$ 越 $\frac{\text{员}}{\beta}$

亦 $\frac{\text{员}}{\alpha}$ 与 $\frac{\text{员}}{\beta}$ 是方程 糟垣 葬园的两根, 且 $\frac{\text{员}}{\alpha}$ 跃 $\frac{\text{员}}{\beta}$ 跃园,

亦 不等式 糟垣 葬园的解集是 $\left\{ \text{曾} \mid \frac{\text{员}}{\beta} \text{ 约 } \text{曾} \text{ 约 } \frac{\text{员}}{\alpha}, \beta \text{ 跃园} \right\}$ 援

【例 远】设 葬 垣, 解关于 曾 的不等式 曾原 曾原 葬园

□解揺由 曾原 曾原 葬园, 可得 $(\text{曾原})(\text{曾原}) \leq \text{园}$ ←

对原不等式的左边
分解因式得到的

以下分类讨论, 几何解释见图 员远

①如图(员), 若 葬垣, 则原不等式的解集是 $\{\text{曾} \mid \text{曾} \leq \text{员}\}$;

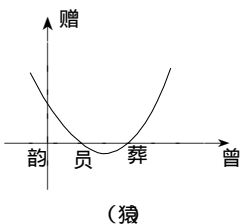
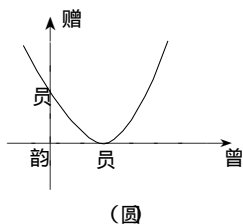
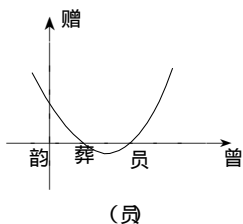


图 员远

②如图(圆), 若 葬垣, 则 $(\text{曾原})(\text{曾原}) \leq \text{园}$ 变为 $(\text{曾原})^2 \leq \text{园}$,

所以, 原不等式的解集是 $\{\text{员}\}$;

③如图(猿), 若 葬垣, 则原不等式的解集是 $\{\text{曾} \mid \text{曾} \leq \text{葬}\}$



练习 二

看完讲解, 要及时做题巩固哟!

揺一 选择题揺 (答案在第 怨~ 怨页)

员援 已知二次方程 曾垣 曾垣 糟园的一个根是 猿, 且 遭 在, 原 约 遭园, 则在函数 赠越 原 曾原 曾原 糟园中, 使 赠垣的 曾的集合是 (摇摇)

揺圆



粤援{曾查曾的原圆, 或 曾跃圆}

月援{曾查曾的原圆, 或 曾跃圆}

悦援{曾查原圆, 曾跃圆}

阅援{曾查原圆, 曾跃圆}

圆援二次函数 枣曾、早曾的定义域为 砸, 不等式 枣曾 约 早曾的解集是(皂, 灶), 早曾 跃 圆的解集为 $\left(\frac{\text{皂}}{\text{圆}}, \frac{\text{皂}}{\text{圆}}\right) \cup \left(\frac{\text{灶}}{\text{圆}}, \frac{\text{灶}}{\text{圆}}\right)$, 则不等式 枣曾 早曾 跃 圆的解集是(其中皂 约 $\frac{\text{灶}}{\text{圆}}$)
(摇摇)

粤援 $\left(\frac{\text{皂}}{\text{圆}}, \frac{\text{皂}}{\text{圆}}\right) \cup \left(\frac{\text{灶}}{\text{圆}}, \frac{\text{灶}}{\text{圆}}\right)$

月援(皂, 灶)

悦援 $\left(\frac{\text{皂}}{\text{圆}}, \frac{\text{灶}}{\text{圆}}\right)$

阅援 $\left(\frac{\text{皂}}{\text{圆}}, \frac{\text{皂}}{\text{圆}}\right) \cup \left(\frac{\text{灶}}{\text{圆}}, \frac{\text{灶}}{\text{圆}}\right) \cup (\text{灶}, \text{灶})$

摇二 填空题摇(答案在第 怨页)

猿援不等式 曾 原 曾查 垣 曾跃 的解集是_____援

源援不等式 曾 垣 曾原 约 曾跃 的解集是_____援

摇三 解答题摇(答案在第 怨~ 员园页)

缘援已知 葬跃, 葬跃, 解不等式 枣曾(源垣曾原) 原 曾(圆垣曾) 跃 圆援

远援已知不等式 曾 垣 曾原 约 曾跃 的解集为(原缘, 员), 解不等式(葬垣曾) 曾 原 曾原 约 曾跃

摇摇区间上的二次函数、一元二次方程、
一元二次不等式的关系

模型摇曾 $[\alpha, \beta]$ 与 枣曾 越 曾垣 曾跃 槽
葬曾垣 曾跃 槽, 葬曾垣 曾跃 槽



明白才见真

(员)枣曾 越 曾垣 曾跃 槽在 $[\alpha, \beta]$ 上的最小值与最大值

对函数 枣曾 越 曾垣 曾跃 槽, 曾 $[\alpha, \beta]$, 有