

KAODIANJIE MA

 **考点解码** 化整为零 各个击破

讲透

【重点难点】

主编 傅荣强

高中数学

讲练互动

三角函数

吉林教育出版社

版权所有 翻印必究
举报电话(0431)85645968(总编办)

☐ 讲透重点难点 高中数学·三角函数

☐ 主 编 傅荣强

☐ 总 策 划: 房海滨 杨 琳

☐ 责任编辑: 杨 琳 高轶楠 ☐ 封面设计: 王 康

☐ 责任校对: 卜莲清 陈海燕 ☐ 责任印制: 徐铁军

吉林教育出版社出版发行

长春市同志街 1991 号 邮编: 130021

电话: 0431—85675379 85645959 85645965

传真: 0431—85633844 85645959

电子函件: xf8640@sina.com

吉林教育出版社制版

长春市博文印刷厂印装

新立城水库管理局院内 邮编: 130000

2008 年 7 月第 2 版 2008 年 7 月第 2 次印刷

开本: 880×1230 1/32 印张: 6.875 字数: 240 千

印数: 8001—9500 册

书号: ISBN 978—7—5383—3285—8

定价: 10.80 元



例题引路

举一反三

目录 Contents



模型破解重点难点

例题解析+训练套餐↓

- 讲述知识体系
- 解说知识点考点
- 诠释重点难点
- 教方法导引思路
- 涵盖所有题型
- 能够举一反三
- 答案详解



第一讲 角的概念的推广、弧度制

1.1	终边相同的角	
模型	$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$	(1)
1.2	弧度制	
模型	$ \alpha = \frac{l}{r}$	(7)
1.3	度数与弧度数的换算	
模型	$180^\circ = \pi \text{rad}$	(11)
高考链接		(15)



第二讲 任意角的三角函数

2.1	任意角的三角函数的定义	
模型	$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$	(18)
2.2	公式	
模型	$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$	(24)
2.3	三角函数线	
模型	$\sin \alpha = MP, \cos \alpha = OM, \tan \alpha = AT$	(28)
高考链接		(32)



第三讲 同角三角函数的基本关系式

3.1	平方关系式	
模型	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	(35)



3.2	商数关系式, 倒数关系式	
模型	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha, \tan \alpha \cot \alpha = 1$	(41)
高考链接		(48)



第四讲 正弦、余弦的诱导公式

4.1	公式	
模型	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha;$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha$	(50)
4.2	公式	
模型	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	(54)
高考链接		(59)



第五讲 两角和与差的正余、余弦、正切

5.1	两角和与差的三角函数	
模型	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	(62)
5.2	二倍角公式	
模型	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	(74)
高考链接		(86)



第六讲 正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质

6.1	正弦函数的图象和性质	
模型	$\{(x, y) \mid y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$	(89)
6.2	余弦函数的图象和性质	
模型	$\{(x, y) \mid y = \cos x, x \in \mathbf{R}\}$	(98)
6.3	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象和性质	
模型	$\{(x, y) \mid y = A \sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}\}$	(103)



- 6.4 正切函数的图象和性质
- 模型 $\{(x, y) \mid y = \tan x, x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$... (111)
- 高考链接 (117)



第七讲 已知三角函数值求角

- 7.1 已知 $\sin x$ 求 x
- 模型 $\sin x = a \Leftrightarrow x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$ (120)
- 7.2 已知 $\cos x$ 求 x
- 模型 $\cos x = a \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \arccos a$ (124)
- 7.3 已知 $\tan x$ 求 x
- 模型 $\tan x = a \Leftrightarrow x = k\pi + \arctan a$ (127)
- 高考链接 (130)



第八讲 解斜三角形

- 8.1 正弦定理
- 模型 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (132)
- 8.2 余弦定理
- 模型 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (136)
- 高考链接 (142)



第九讲 三角函数在生产、生活中的实际应用

- 9.1 创新型应用题 (145)
- 9.2 探究型应用题 (156)
- 高考链接 (162)

- 复习参考题 (165)
- 答案与提示 (169)



第一讲 角的概念的推广、弧度制

1.1 终边相同的角

模型 $S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$



内涵

明明白白才是真!

在直角坐标系中,使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,当两个角的终边位置相同时,称它们为终边相同的角.

一般地,所有与角 α 终边相同的角,连同 α 在内,可构成一个集合

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$



透析

深度讲解,条理真清晰呀!

终边相同的角,本质上是一种“同余现象”,即两角为终边相同的角,当且仅当它们的度数除以 360° 的余数相等.



举例

哇塞!分析,解答,解惑,真像老师讲题一样!

【例1】 写出与 α 角终边相同的角的集合 S , 并把集合中适合相应的不等式的元素 β 写出来. (1) $\alpha = 2005^\circ$, $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$; (2) $\alpha = 2006^\circ$, $-360^\circ \leq \beta \leq 720^\circ$; (3) $\alpha = -105^\circ$, $-90^\circ < \frac{\beta}{2} < 180^\circ$.

□解 (1) $S = \{\beta \mid \beta = 2005^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\because 2005^\circ = 5 \times 360^\circ + 205^\circ$, $\therefore$ 适合不等式 $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$ 的元素 β 为 $\beta = 205^\circ$.

(2) $S = \{\beta \mid \beta = 2006^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

解不等式 $-360^\circ \leq 2006^\circ + k \cdot 360^\circ \leq 720^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 得 $k = -6, -5, -4$,



$\therefore$ 适合不等式的元素 β 分别为 $\beta = -154^\circ$, $\beta = 206^\circ$, $\beta = 566^\circ$.

(3) $S = \{\beta \mid \beta = -105^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

$\because -90^\circ < \frac{\beta}{2} < 180^\circ, \therefore -180^\circ < \beta < 360^\circ$.

解不等式 $-180^\circ < -105^\circ + k \cdot 360^\circ < 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k = 0$, 或 $k = 1$.

$\therefore$ 满足条件的角为 $\beta = -105^\circ$, 或 $\beta = 255^\circ$.



在 0° 到 360° 范围内, 找与 β 角终边相同的角的问题, 实际上就是求 β 的度数除以 360° 的“正数余数”的问题.

终边相同的角, 贯穿于三角函数的全过程, 继初中锐角三角函数之后, 高中阶段对三角函数的深化就从这里开始.

【例 2】 写出第一、二、三、四象限的角的集合.

□分析 显然, 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 角 α 为第一象限的角, 因为 $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow k \cdot 360^\circ < \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ < 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$, 而角 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ$ 与角 α 是终边相同的角, 所以 β 亦为第一象限的角, 因此第一象限角的集合可表示为

$$\{\beta \mid k \cdot 360^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

同理可得到第二、三、四象限的角的集合.

□解 第一象限的角的集合为 $\{\beta \mid k \cdot 360^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;

第二象限的角的集合为 $\{\beta \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;

第三象限的角的集合为 $\{\beta \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;

第四象限的角的集合为 $\{\beta \mid k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.



如图 1-1, 第一象限的角, 就是角的终边落在第一象限内的角, 不含角的终边与 x 轴、 y 轴的非负半轴重合的角. 如, 图中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ 都是第一象限的角.

过去我们学习的锐角都是第一象限的角, 但反过来, 第一象限的角未必都是锐角, 如 $\alpha = 1^\circ$ 与 $\beta = 361^\circ$ 都是第一象限的角, α 是锐角, β 就不是锐角. 读者可仿此考虑一下第二象限的角与钝角的所属关系.

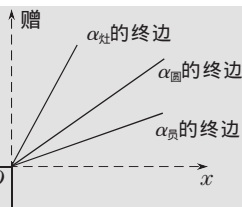


图 1-1

【例 3】 分别写出终边在 x 轴上、 y 轴上的角的集合.

□分析 终边在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 终边在 x 轴的非正半轴上的角集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以, 终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ, \text{ 或 } \alpha = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$. 又因为 $k \cdot 360^\circ = 2k \cdot 180^\circ, k \cdot 360^\circ + 180^\circ = (2k+1)180^\circ$, 其中 $2k$ 为偶数, $2k+1$ 是奇数, 所以, 终边在 x 轴上的角的集合可简写成 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$. 同理可得到终边在 y 轴上的角的集合.

□解 终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$;



终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.



终边在过原点的某一直线上的所有角的集合都可以写成 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + \beta, k \in \mathbf{Z}\}$ (其中 β 为终边在该直线上的某个角) 的形式. 例如, 终边在直线 $y=x$ 上的所有角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

将终边在过原点的某一直线上的所有角, 按由小到大的顺序排列起来, 可以构成一个“无始无终”的且公差为 180° 的“等差数列”.

【例 4】 写出终边在第一象限或第三象限的所有角的集合并化简.

□解 第一象限角的集合为 $A = \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

第三象限角的集合为 $B = \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

所以, 终边在第一象限或第三象限的所有角的集合为

$$A \cup B = \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, \text{ 或 } k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha \mid 2k \cdot 180^\circ < \alpha < 2k \cdot 180^\circ + 90^\circ, \text{ 或 } (2k+1)180^\circ < \alpha < (2k+1) \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{\alpha \mid k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

所以, 终边在第一象限或第三象限的所有角的集合可简写为

$$\{\alpha \mid k \cdot 180^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$



第一象限与第三象限关于坐标系的原点对称. 一般地, 终边在关于原点对称的区域上的所有角构成的集合均可仿此例表示.

例如, 终边在图 1-2 所示区域上的所有角构成的集合, 可表示为

$$\{\alpha \mid k \cdot 180^\circ - 45^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

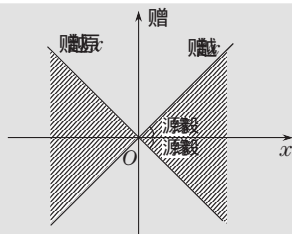


图 1-2

【例 5】 已知角 α 是第三象限的角, 判断角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的象限.

□解 由角 α 是第三象限的角, 知 $180^\circ + n \cdot 360^\circ < \alpha < n \cdot 360^\circ + 270^\circ, n \in \mathbf{Z}$.

两边都除以 3, 得 $\frac{n}{3} \cdot 360^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} < \frac{n}{3} \cdot 360^\circ + 90^\circ, n \in \mathbf{Z}$. ①

对于 $m, n \in \mathbf{Z}$, n 总可以表示成如下三种形式之一:



对 灶分类

$$\begin{aligned} n &= 3m, \\ n &= 3m+1, \\ n &= 3m+2. \end{aligned}$$

灶除以 3 的余数分
别为 园员圆

(1) 设 $n=3m$.

由①, 可得 $m \cdot 360^\circ + 60^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 90^\circ$, $m \in \mathbf{Z}$;

②

(2) 设 $n=3m+1$.

由①, 可得 $m \cdot 360^\circ + 180^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 210^\circ$, $m \in \mathbf{Z}$;

③

(3) 仿(1)、(2), 对 $n=3m+2$, 有

$$m \cdot 360^\circ + 300^\circ < \frac{\alpha}{3} < m \cdot 360^\circ + 330^\circ, m \in \mathbf{Z};$$

④

由②、③、④知, $\frac{\alpha}{3}$ 是第一、三、四象限的角.



本例中对 n 进行分类的目的是将相应的不等式化为

$$m \cdot 360^\circ + \beta < \alpha < m \cdot 360^\circ + \theta$$

的形式, 由于 $m \cdot 360^\circ + \beta$ 与 β 的终边相同, $m \cdot 360^\circ + \theta$ 与 θ 的终边相同, 所以, 可以根据角 β 和角 θ 的终边位置对角 α 的终边位置作出

判断.

解此类问题还有一种图示法, 如图 1-3 所示, 把各象限均分成 3 等份(如果判断 $\frac{\alpha}{n}$ 的位置, 则均分成 n 等份), 再从 x 轴的上方起, 依次将各区域标上 I、II、III、IV. 因为 α 为第三象限的角, 所以, 标号为 III 的区域为角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所

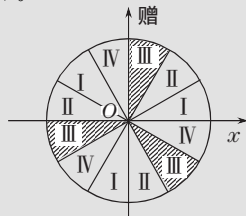


图 1-3

在的区域. 如果 α 为第二象限的角, 那么标号为 II 的区域就是角 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的区域. 你学会了吗? 将本例中的 $\frac{\alpha}{3}$ 改为 $\frac{\alpha}{2}$, 用两种方法试试.

【例 6】 写出终边在坐标轴上的角的集合.

□解 终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

$\therefore$ 终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180^\circ, \text{ 或 } \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

$\because k \cdot 180^\circ = 2k \cdot 90^\circ, k \cdot 180^\circ + 90^\circ = (2k+1) \cdot 90^\circ,$

$\therefore$ 终边在坐标轴上的角的集合可简写成, $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.



由图 1-4 知, 任意一个终边在坐标轴上的角加上 90° 的整数倍后得到的角, 终边还在坐标轴上, 0° 和 90° 的角的终边都在坐标轴上, 所以, 终边在坐标轴上的角的集合, 可以表示为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 也可以表示为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

同理, 终边在直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上的所有角的集合, 可表示为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

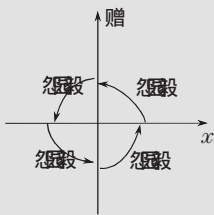


图 1-4

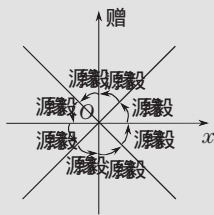


图 1-5

图 1-5 中, 角的终边分别在坐标轴和直线 $y=x$ 与 $y=-x$ 上, 你能用较简单的形式表示这些角构成的集合吗?

【例 7】若 α 和 β 的终边关于 y 轴对称, 则

()

A. $\alpha + \beta = 90^\circ$

B. $\alpha + \beta = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot 180^\circ$

C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$

D. $\alpha + \beta = (2k + 1) \cdot 180^\circ$

□解 (1) 若 α 为第一象限的角, 则 β 为第二象限的角, 存在 α' 和 β' 满足 $0^\circ < \alpha' < 90^\circ$, $90^\circ < \beta' < 180^\circ$, $\alpha = m \cdot 360^\circ + \alpha'$, $\beta = n \cdot 360^\circ + \beta'$, $m, n \in \mathbf{Z}$.
由图 1-6 可知, $\alpha' + \beta' = 180^\circ$, $\therefore \alpha + \beta = [2(m+n) + 1]180^\circ$.

(2) 若 α 为第三象限的角, 则 β 为第四象限的角, 存在 α' 和 β' 满足 $0^\circ < \alpha' < 90^\circ$, $90^\circ < \beta' < 180^\circ$,

$\alpha = m \cdot 360^\circ + \alpha' + 180^\circ$, $\beta = n \cdot 360^\circ + \beta' + 180^\circ$, $m, n \in \mathbf{Z}$.

$\therefore \alpha$ 和 β 的终边关于 y 轴对称(终边如图 1-6 的虚线所示),

$\therefore \alpha'$ 和 β' 亦关于 y 轴对称, 即 $\alpha' + \beta' = 180^\circ$,

$\therefore \alpha + \beta = [2(m+n+1) + 1]180^\circ$.

(3) 若 α 和 β 的终边在坐标轴上, 亦可得 $\alpha + \beta$ 为 180° 的奇数倍.

由(1)、(2)、(3)知, 选 D.

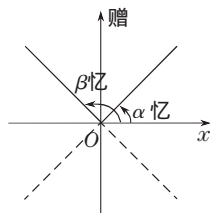


图 1-6



仿此例可以得到如下结论: 如果 α 和 β 的终边关于 x 轴对称, 那么 $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$, 即 α 与 β 的度数之和为 180° 的偶数倍.

【例 8】已知集合 $A = \{\alpha \mid 30^\circ + k \cdot 180^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{\beta \mid -45^\circ$

图 1-7

看完讲解,要及时做题巩固哟!

此为试读, 需要完整PDF文件访问: www.ertongbook.com



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

二 填空题 (答案在第 169 页)

3. 已知 α 是第三象限的角, 则 $\frac{\alpha}{4}$ 是第 _____ 象限的角, 角 2α 是第 _____ 象限的角.

4. 已知 α 是第二象限的角, 且 7α 与 2α 的终边相同, 则 $\alpha =$ _____.

三 解答题 (答案在第 169 页)

5. 角 β 是与 60° 角终边相同的角, 求在 $[0^\circ, 360^\circ)$ 内, 终边与 $\frac{\beta}{3}$ 角的终边相同的角.

6. 如图 1-8, 角 α 的终边所在的区域如各阴影所示, 分别写出角 α 的集合.

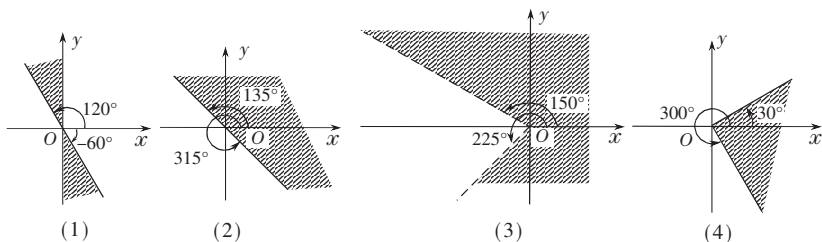


图 1-8

1.2 弧度制

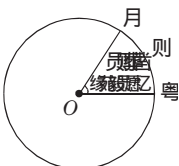
模型 $|\alpha| = \frac{l}{r}$



内

涵

明明白白才是真!

涵 义	图 示
长度等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 以弧度为单位度量角的制度, 叫做弧度制.	 $\widehat{AB}$ 的长是 r $\angle AOB = 1 \text{ rad}$



涵 义	图 示
正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零. 弧度数的绝对值等于圆心角所对的弧长比上圆的半径.	$\widehat{AC}$ 的长是 l $ \alpha = \frac{l}{r}$ $l = r \alpha $ $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}r^2 \alpha $



运

析

深度讲解，条理真清晰呀！

使用公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 时，要注意两点，一是绝对值符号“ $||$ ”不可略去，二是 α 的单位是“rad”，而不是“°”。



举

例

哇塞！分析、解答、解惑，真像老师讲题一样！

【例 1】 一段圆弧的长度恰好等于其所在圆的内接正三角形的边长，求其所对圆心角的弧度数.

□解 如图 1-9 所示，设圆的半径为 r ， $\triangle ABC$ 为圆的内接正三角形， D 为 AB 的中点，连结 OA 、 OB 、 OD ，则 $\angle AOB = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$.

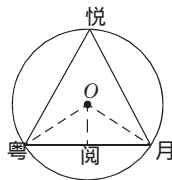


图 1-9

由圆的性质知， $\angle ODA = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $OD = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}r$ ，

所以 $AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2} = \sqrt{3}r$ ，所以这段圆弧的长度为 $\sqrt{3}r$.

再由 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 可知，这段圆弧所对的圆心角的弧度数为 $\sqrt{3}$.

【例 2】 如图 1-10 所示，扇形 OAB 的圆心角为 90° ，弦 AB 的长为 $4\sqrt{2}$ ，求弧 $\widehat{AB}$ 的长及弓形 AB (图中阴影部分) 的面积.

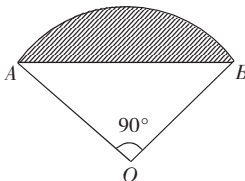


图 1-10

□解 设圆的半径为 r .

$\because \angle AOB = 90^\circ$ ， $\therefore 2r^2 = AB^2 = 32$ ， $\therefore r = 4$.

又 $\because$ 圆心角 $\angle AOB = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore$ 弧 $\widehat{AB}$ 的长度 $l = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$.



$$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}lr - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 4 - \frac{1}{2} \times 4^2 = 4\pi - 8.$$



本题运用三角形面积公式和扇形面积公式这两个基本模型，解决了弓形面积的问题，这正是学习基本模型的意义所在。

【例 3】 一个扇形的面积为 4cm^2 ，周长为 8cm ，求扇形的圆心角及相应的弦长。

□分析 由弧长公式及扇形面积公式，列出关于圆心角及半径的方程组，解之可得圆心角和半径，进而求其弦长。

□解 如图 1-11 所示，设扇形的半径为 R ，圆心角的弧度数为 α 。

$$\text{由已知, 得} \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha R^2 = 4, \\ 2R + \alpha R = 8, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} \alpha = 2, \\ R = 2. \end{cases}$$

取 AB 的中点 C ，连结 OC ，则 $OC \perp AB$ ，且 $\angle AOC = \frac{\alpha}{2} = 1$ 。

解直角三角 $\triangle ACO$ ，得 $AC = R \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin 1$ ，

$\therefore AB = 2AC = 4 \sin 1$ 。 $\therefore$ 所求圆心角为 2 弧度，弦长为 $4 \sin 1$ 。

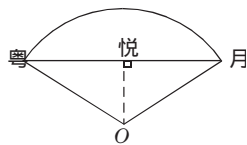


图 1-11

【例 4】 如图 1-12，在扇形 OAB 中， $\angle AOB = 60^\circ$ ， $AB = 6\text{cm}$ ，圆 O_1 是扇形的内切圆，求圆中阴影部分的面积。

□分析 先求内切圆的半径，阴影部分的面积为扇形的面积与其内切圆的面积的差。

□解 设圆 O_1 与 OA 切于 C 点，连结 O_1C 、 OO_1 ，则 $O_1C \perp OA$ ，且 $\angle O_1OC = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ 。

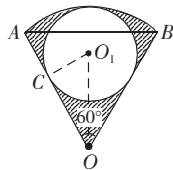


图 1-12

在 $\text{Rt}\triangle O_1CO$ 中，易得 $O_1C = \frac{1}{2}O_1O$ 。

又 $\because$ 圆 O_1 是扇形 OAB 的内切圆， $\therefore OA = O_1O + O_1C = 3O_1C$ ， $\therefore O_1C = \frac{1}{3}OA = 2\text{cm}$ 。

$\therefore$ 阴影部分的面积 $S = S_{\text{扇形}OAB} - S_{\text{圆}O_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times 6^2 - \pi \times 2^2 = 2\pi$ ，

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $2\pi\text{cm}^2$ 。

【例 5】 已知一扇形的周长为 c ，当扇形的圆心角为何值时，其面积最大？并求出面积的最大值。

□分析 扇形的面积 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$ ， $c = 2r + l = 2r + |\alpha|r$ ，考虑将 S 表示



为 α 、 r 、 l 其中之一的函数, 运用函数的方法求其最大值及相应的变量的值, 进而求出 α 的值.

□解法一 设扇形的半径为 r , 圆心角为 α , 弧长为 l , 面积为 S .

$$\because \text{扇形的周长 } c = 2r + l = 2r + r\alpha, \therefore r = \frac{c}{2 + \alpha},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \alpha \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \cdot c^2}{(2 + \alpha)^2} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + 8} \leq \frac{c^2}{16}.$$

当且仅当 $\sqrt{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, 即 $\alpha = 2$ 时, 符号成立, 扇形的面积最大, 最大值为 $\frac{c^2}{16}$.

□解法二 设扇形的半径为 r , 圆心角为 α , 弧长为 l , 面积为 S .

$$\because c = l + 2r, \therefore l = c - 2r,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} (c - 2r) \cdot r = \frac{1}{2} (c \cdot r - 2r^2) = -\left(r - \frac{c}{4}\right)^2 + \frac{c^2}{16},$$

$$\therefore \text{当 } r = \frac{c}{4} \text{ 时, 扇形的面积 } S \text{ 取最大值 } \frac{c^2}{16}.$$

$$\text{又} \because \text{当 } r = \frac{c}{4} \text{ 时, } l = c - 2r = 2r, \therefore \alpha = \frac{l}{r} = 2.$$

$$\therefore \text{当 } \alpha = 2 \text{ 时, 扇形的面积取最大值 } \frac{c^2}{16}.$$

□解法三 设扇形的半径为 r , 圆心角为 α , 弧长为 l , 面积为 S .

$$\because \text{扇形的周长 } c = 2r + l, \therefore r = \frac{c - l}{2},$$

$$\therefore \text{扇形的面积 } S = \frac{1}{2} l r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c - l}{2} \cdot l = \frac{1}{4} (cl - l^2) = -\frac{1}{4} \left(l - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{16},$$

$$\therefore \text{当 } l = \frac{c}{2} \text{ 时, } S \text{ 取最大值 } \frac{c^2}{16}.$$

$$\because \text{当 } l = \frac{c}{2} \text{ 时, } r = \frac{c - l}{2} = \frac{c}{4}, \therefore \alpha = \frac{l}{r} = 2.$$

$\therefore$ 当圆心角为 2 时, 扇形的面积取最大值.



解感

三种方法都用二次函数配方法求最大值, 由于所选择的变量各不相同, 其难易程度各异. 因此, 解决问题的过程中, 合理地选择变量十分重要.



练习 三

看完讲解, 要及时做题巩固哟!

一 选择题 (答案在第 169~170 页)



1. 一扇形的圆心角为 2rad ，弧长为 4cm ，则这个扇形的面积是 ()
A. 4cm^2 B. 2cm^2 C. $4\pi\text{cm}^2$ D. $2\pi\text{cm}^2$
2. 一扇形的半径为 R ，周长是 $4R$ ，则这个扇形所含的弓形的面积为 ()
A. $\frac{1}{2}(2 - \sin 1 \cos 1)R^2$ B. $\frac{1}{2}R^2$
C. $\frac{1}{2}R^2 \sin 1 \cos 1$ D. $(1 - \sin 1 \cos 1)R^2$

二 填空题 (答案在第 170 页)

3. 如图 1-13 所示，扇形 OAB 的圆心角为 4rad ，其面积为 8cm^2 ，那么扇形的周长为 _____，弦 AB 的长度为 _____.
4. 一扇形的圆心角为 60° ，在其内部所作的圆中，最大的圆的面积为 πcm^2 ，则扇形的弧长为 _____，扇形的面积为 _____.

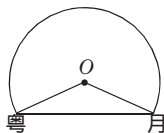


图 1-13

三 解答题 (答案在第 170 页)

5. 扇形的面积为定值 S ，当它的圆心角为何值时，扇形的周长最小？
6. 如图 1-14 所示，点 $A(r, 0)$ 在半径为 r 的圆上，动点 P, Q 同时从 A 点处出发沿圆周运动，点 P 按逆时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{3}$ 弧度，点 Q 按顺时针方向每秒钟转 $\frac{\pi}{4}$ 弧度，求点 P, Q 第三次相遇时各自走过的弧长.

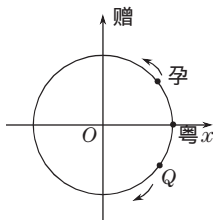


图 1-14

1.3 度数与弧度数的换算

模型 $180^\circ = \pi\text{rad}$



内

涵

明明白白才是真!

度数与弧度数的换算方法

$$\begin{aligned} 1^\circ &= \frac{\pi}{180}\text{rad}; \\ 180^\circ &= \pi\text{rad} \quad \swarrow \quad \searrow \\ 1\text{rad} &= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ. \end{aligned}$$





通 析

深度讲解, 条理真清晰呀!

角度制与弧度制的比较

为了方便, 我们把有关的比较内容列在一个表格内, 供参考.

制度 \ 比较内容	单位	进制	弧长公式	扇形的面积公式
弧度制	rad	10	$l = \alpha r$	$S = \frac{1}{2} \alpha r^2$
角度制	$^{\circ}$	60	$l = \frac{n}{360} 2\pi r$	$S = \frac{n}{360} \pi r^2$

采用弧度制, 不仅使相应的公式的形式简单化, 更重要的是, 采用弧度制后, 我们可以把角和实数彻底等同起来, 例如 1rad 的角可视为实数 1, 实数 1 也可看成是 1rad 的角, “角即数, 数即角”, 为三角函数最终“摆脱角的束缚”创造了条件.



举 例

喵喵! 分析, 解答, 解惑, 真像老师讲题一样!

【例 1】 设三角形三内角之比为 $2:7:9$, 求各内角的度数, 并换算成弧度数.

□解 $\because$ 三角形的内角和为 180° , 且三内角之比为 $2:7:9$,

$$\therefore \text{三个内角分别为 } \frac{2}{2+7+9} \times 180^{\circ} = 20^{\circ}; \quad \frac{7}{2+7+9} \times 180^{\circ} = 70^{\circ}; \quad \frac{9}{2+7+9} \times 180^{\circ} = 90^{\circ}.$$

$$\text{换算成弧度数分别为 } 20^{\circ} = \frac{20}{180} \pi = \frac{\pi}{9} \text{ rad}, \quad 70^{\circ} = \frac{70}{180} \pi = \frac{7\pi}{18} \text{ rad}, \quad 90^{\circ} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$



用弧度表示角时, 常常把弧度数写成多少 π 的形式, 如无特殊要求, ① 不要把 π 化成小数, ② “弧度”二字或 “rad” 可以省略不写.

【例 2】 把下列各角的弧度数化成度数. (1) 2 ; (2) $\frac{5\pi}{4}$; (3) $-\frac{11}{6}\pi$; (4) $\frac{4\pi}{9}$.

$$\square \text{解} \quad (1) 2 = 2 \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} = \left(\frac{360}{\pi} \right)^{\circ}. \quad (2) \frac{5\pi}{4} = \frac{5}{4} \times 180^{\circ} = 225^{\circ}.$$

$$(3) -\frac{11}{6}\pi = -\frac{11}{6} \times 180^{\circ} = -330^{\circ}. \quad (4) \frac{4\pi}{9} = \frac{4}{9} \times 180^{\circ} = 80^{\circ}.$$



将 $m\pi$ 形式的角的弧度数化成度数时, 只需把 π 换成 180° 再乘以以前的系数即可.

【例 3】 把下列各特殊角化成 $x\pi$ 的形式: $0^{\circ}; 30^{\circ}; 45^{\circ}; 60^{\circ}; 90^{\circ}; 120^{\circ}; 135^{\circ}; 150^{\circ}; 180^{\circ}; 210^{\circ}; 225^{\circ}; 240^{\circ}; 270^{\circ}; 300^{\circ}; 315^{\circ}; 330^{\circ}; 360^{\circ}$.

□解 根据 $180^{\circ} = \pi$, 将以上各角化成 $x\pi$ 的形式, 如下表所示.

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
---	-------------	--------------	--------------	--------------	--------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------