图书在版编目(CIP)数据

黄冈数学题库．几何(下)/南秀全主编．—青岛：
青岛出版社，2003
ISBN 7-5436-2874-0

Ⅰ．黄...　Ⅱ．南...　Ⅲ．几何课—初中—习题—
升学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037043 号

书　　名　黄冈数学题库：几何(下)
主　　编　南秀全
出版发行　青岛出版社
社　　址　青岛市徐州路 77 号(266071)
本社网址　http://www.qdpub.com
邮购电话　(0532)5814750　5814611—8664　传真(0532)5814750
责任编辑　郭东明　E—mail:gdm @ qdpub.com
装帧设计　徐凤宝
印　　刷
出版日期　2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　16 开(787mm×1092mm)
印　　张
插　　页
字　　数　400 千字
书　　号　ISBN 7-5436-2874-0
定　　价　22.00 元
盗版举报电话　0532—5814926
(青岛版图书售出后如发现倒装、错装、字迹模糊、缺页、散页等质量问题，
请寄回承印厂调换。)
本书建议陈列类别：教育

目　　录

第五章　解直角三角形

5.1　锐角三角函数

【学习目标要求】

1. 了解锐角三角函数的概念，能够正确地应用 sinα、cosα、tanα、canα 表示直角三角形中两边的比.

2. 熟记 30°、45°、60°角的三角函数值，会计算含有特殊角的三角函数式的值，会由一个特殊锐角的三角函数值，求出它对应的角度.

3. 会查正弦和余弦表、正切和余切表(有条件的学校可使用计算器)，由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它对应的锐角.

4. 会使用科学计算器由已知锐角求它的三角函数值，由已知三角函数值求它对应的锐角.

【知识要点归纳】

1. 锐角三角函数的定义　在 Rt△ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，则分别定义 $\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$ 为锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切函数，分别记作 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\cot A=\frac{b}{a}$.

2. 特殊角三角函数值

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
cotα	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

特殊角三角函数值在计算和证明中有着广泛的应用，应该熟记. 从特殊角三角函数值表中，我们可以看出，当角度在 0°～90°间变化时，正弦、正切值随着角度的增大而增大，余弦、余切值随着角度的增大而减小；正弦、余弦值均介于 0 和 1 之间，即 $0\leqslant\sin A\leqslant 1$；$0\leqslant\cos A\leqslant 1$.

3. 同角三角函数的关系

平方关系　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$　**商数关系**　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.　**倒数关系**　$\tan A\cdot\cot A=1$.

4. 互余两角的三角函数关系

$\sin(90°-A)=\cos A$；$\cos(90°-A)=\sin A$. $\tan(90°-A)=\cot A$；$\cot(90°-A)=\tan A$.

【命题热点规律探析】

从近几年各地中考数学试题来看，本节内容所涉及的考点大致有以下几个方面：三角函数的基本概

念,同角三角函数关系,互余角三角函数关系,三角函数的增减性以及特殊角三角函数值的计算,这些内容在中考试卷中,大都以选择、填空、计算题的形式来考查,也有一些地方将这些内容贯穿在综合问题中进行考查.

【热点考题精讲】

例1 (襄樊市,1999)已知 α 是锐角,且 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{\cos\alpha}=$________.

分析 由已知可得 $\angle\alpha=45^\circ$,代入上式求出结果;或先将上式化简,再将 $\angle\alpha=45^\circ$ 代入化简后的式子,算出结果.

解 $\because$ $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且 α 为锐角,$\therefore$ $\alpha=45^\circ$. $\therefore$ 原式 $=\frac{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1-\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例2 解答下列各题:

(1)(辽宁省,1998)在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$3a=\sqrt{3}b$,则 $\angle A=$________,$\sin A=$________.

(2)(安徽省,1998)如果 $\angle A$ 是锐角,且 $\sin A=\frac{3}{4}$,那么(　　).

A. $0^\circ<\angle A<30^\circ$　　B. $30^\circ<\angle A<45^\circ$　　C. $45^\circ<\angle A<60^\circ$　　D. $60^\circ<\angle A<90^\circ$

解 (1)在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\because$ $3a=\sqrt{3}b$,$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $\because$ $\tan A=\frac{a}{b}$,$\therefore$ $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$A=30^\circ$. $\therefore$ $\sin A=\frac{1}{2}$.

(2) $\because$ $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore$ $\sin45^\circ<\sin A<\sin60^\circ$.

又 $\because$ 锐角正弦值随角的增大而增大,$\therefore$ $45^\circ<A<60^\circ$. 选 C.

例3 计算:

(1)(山东省,1997)$\frac{\sin45^\circ}{1+\sin60^\circ}-\frac{\cos45^\circ}{1-\sin60^\circ}+\sqrt{2(\sin30^\circ-\cos30^\circ)^2}$

(2)(孝感市,1998)$(\sqrt{7}-\sin36^\circ)^0\cdot\frac{\cos30^\circ\cdot\tan60^\circ}{\cos60^\circ+\sin45^\circ}+(\frac{\sin30^\circ-\cos45^\circ}{\sin60^\circ\cdot\tan30^\circ})^{-1}$

解 (1)原式 $=\frac{\sqrt{2}/2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\sqrt{2}/2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{2}|\sin30^\circ-\cos30^\circ|=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)原式 $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-3+3\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-4$.

说明 1. 进行上述计算,关键在熟记特殊角的三角函数值,掌握好同角三角函数关系及互余两角的三角函数间关系.

2. 在化简带有绝对值符号的三角函数值时,要注意考虑绝对值符号内数的符号,避免出错,如 $\sqrt{(\sin30^\circ-\cos30^\circ)^2}=|\sin30^\circ-\cos30^\circ|$,因为有 $\sin30^\circ<\cos30^\circ$,所以 $|\sin30^\circ-\cos30^\circ|=\cos30^\circ-\sin30^\circ$.

例4 (1)(杭州市,2001)令 $a=\sin60^\circ$,$b=\cos45^\circ$,$c=\tan30^\circ$,则它们之间的大小关系是(　　).

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

(2)(甘肃省,2001)若 α 是锐角,$\sin\alpha=\cos50^\circ$,则 α 等于(　　).

A. 20°　　B. 30°　　C. 40°　　D. 50°

(3)(呼和浩特市,2001)若 $\tan\alpha+\cot\alpha=3$,α 为锐角,则 $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=$________.

解　(1)∵ $a=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $c=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,且$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴ $c<b<a$. 故应选 A.

(2)∵ $\sin\alpha=\cos50^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)$,且 α 为锐角,∴ $\alpha=90^\circ-50^\circ=40^\circ$. 故应选 C.

(3)∵ $\tan\alpha+\cot\alpha=3$,∴ $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2=9$. 即 $\tan^2\alpha+2+\cot^2\alpha=9$. ∴ $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=7$.

例 5　(绍兴市,2002)已知 α 是锐角,且 $\tan\alpha$、$\cot\alpha$ 是关于一元二次方程 $x^2-kx+k^2-8=0$ 的两个实数根,求 k 的值.

解　∵ α 是锐角,∴ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.　∴ $k^2-8=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$, ∴ $k_1=3$, $k_2=-3$.

又∵ $\tan\alpha>0$, $\cot\alpha>0$, ∴ $\tan\alpha+\cot\alpha=k>0$,∴ $k=3$.

此时 $\Delta=k^2-4(k^2-8)>0$, 经检验,k 的值为 3.

例 6　(呼和浩特市,2002)a、b、c 是△ABC 的三边,a、b、c 满足等式$(2b)^2=4(c+a)(c-a)$,且有 $5a-3c=0$,求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的值.

解　由$(2b)^2=4(c+a)(c-a)$,得 $b^2=c^2-a^2$　即 $c^2=a^2+b^2$

∴△ABC 为 Rt△　$\angle C=90^\circ$.　由 $5a-3c=0$　∴ $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$

即 $\sin A=\frac{3}{5}$　即 $\sin A=\frac{3}{5}$.　设 $a=3k$, $c=5k$, ∴ $b=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$

∴ $\sin B=\frac{b}{c}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$　∴ $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+1=\frac{12}{5}$.

【热点考题精练】

1. 填空

(1)(辽宁省,1998)已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则锐角 $\alpha=$________.

(2)(哈尔滨市,1997)若三角形三个内角的度数之比为 1∶2∶3,则此三角形中最大的锐角等于________度.

(3)(呼和浩特市,1998)在直角△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,若 $AB=5$, $BC=3$,则 $\cos A=$________.

(4)(杭州市,1998)Rt△ABC 中,若$\angle C=90^\circ$, $AC=4$, $BC=2$,则 $\tan B=$________.

(5)(新疆自治区,1997)已知$\angle B$ 为锐角,且 $\cot B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\sin\frac{B}{2}=$________.

(6)(贵州省,1997)在△ABC 中,$\angle C=90^\circ$, $\tan A\cdot\tan20^\circ=1$,那么$\angle A=$________度.

(7)(宜昌市,1997)若 $\tan(90^\circ-B)=\cot30^\circ$,则$\angle B=$________.

(8)(南充市,2001)比较大小:$\sin46^\circ37'$________ $\cos43^\circ22'$.(填“>”或“<”号)

(9)(曲靖市,2001)$\sin42^\circ$和 $\sin41^\circ$的大小关系是 $\sin41^\circ$________ $\sin42^\circ$.(填“<”或“>”号)

(10)(贵阳市,2001)计算:$2\cos60^\circ-\tan45^\circ=$________.

(11)(广州市,2001)求值:$\frac{1}{2}\sin60^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos45^\circ=$________.

(12)(江西省,2001)计算:$\sin60^\circ\cdot\cot30^\circ+\sin^2 45^\circ=$________.

(13)(郴州市,2001)计算:$\tan30^\circ-\sin60^\circ\cdot\cot60^\circ+\cos^2 45^\circ=$________.

(14)(贵阳市,2001)若 $\tan\alpha=\cot20^\circ$,则 $\alpha=$________.

(15)(泰州市,2001)如果 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则锐角 α 的余角是________度.

(16)(青海省,2001)在△ABC 中,已知$\angle A=74^\circ37'$, $\angle B=60^\circ23'$,那么$\angle C=$________, $\sin C+\cos C=$________.

(17)(北京市海淀区,2001)在△ABC 中,如果$\angle C=90^\circ$, $\angle A=45^\circ$,那么 $\tan A+\sin B=$________;△ABC 为________对称图形(填“轴”或“中心”).

(18)(武汉市,1998)已知 $\sin35^\circ=0.5736$,则 $\cos55^\circ=$________.

(19)(丹阳市,1997)已知 $\sin36°=\cos\alpha(0°<\alpha<90°)$,则 $\alpha=$________度.

(20)(河南省,1995)比较大小:$\cos48°$________ $\cos50°$.

(21)(呼和浩特市,1993)若 A 是锐角,则 $\sqrt{\sin^2A-2\sin A+1}=$________.

(22)(天津市,1998)式子 $1-2\sin30°\cos30°=$________.

(23)(甘肃省,1997)已知 $0°<\alpha<90°$,化简 $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{-\sin(90°-\alpha)}=$________.

(24)(湖南省,1997)计算:$\tan45°\cdot\sin45°-4\sin30°\cdot\cos45°+\sqrt{6}\cot60°=$________.

(25)(西安市,1994)已知 $\sin A=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,则 $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}+\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=$________.

(26)(咸阳市,1999)求值:$4\sin54°-5\cos36°+\sqrt{2}\sin45°-\sqrt{(\cos36°-1)^2}=$________.

(27)(宜昌市,1999)若 $\sin(90°-B)=\cos45°$,则锐角 B 的度数是________.

(28)(十堰市,1999)计算:$\sin^245°-\tan15°+\cot75°-\cot^260°=$________.

(29)(呼和浩特市,1999)计算 $\tan44°\tan45°\tan46°=$________.

(30)(辽宁省,1999)已知 $\sin42°54'=0.6807$,如果 $\cos\alpha=0.6807$,则 $\alpha=$________.

(31)(四川省,1999)已知 $\cos59°54'=0.5015$,那么 $\sin30°6'$的值为________.

(32)(哈尔滨市,1999)若锐角 A 满足 $\tan A-\cot A=2$,则 $\tan^2A+\cot^2A=$________.

(33)(北京市丰台区,2001)如果 α 为锐角,且 $\sin^260°+\sin^2\alpha=1$,那么 $\alpha=$________度.

(34)(深圳市,2001)已知:$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\sin A=\dfrac{5}{13}$,则 $\sin B=$________.

(35)(镇江市,2000)$\triangle ABC$ 中,$\angle A=72°40'$,$\angle B=62°20'$,则 $\sin A+\cos B+\tan C=$________.(结果保留四个有效数字)

(36)(咸宁市,2000)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$a=\sqrt{3}b$,则$\angle A=$________.

(37)(青岛市,2001)如果$\angle A$ 是锐角,$\cos A=0.618$,那么 $\sin(90°-A)$的值为________.

2. 选择

(1)(青岛市,2000)$\sin30°+\tan45°$的值为(　　).

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$

(2)(襄樊市,1999)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,下列式子一定能成立的是(　　).

A. $a=c\cdot\sin B$　　B. $a=b\cdot\cos B$　　C. $c=a\cdot\tan B$　　D. $a=b\cdot\tan A$

(3)(苏州市,1999)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=3$,$BC=4$,则 $\cos A=$(　　).

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

(4)(宿迁市,1999)在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$ 均为锐角,且有 $|\tan B-\sqrt{3}|+(2\sin A-\sqrt{3})^2=0$,则$\triangle ABC$ 是(　　).

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形　　C. 等边三角形　　D. 等腰直角三边形

(5)(辽宁省,2000)已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且 α 是锐角,则 $\alpha=$(　　).

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

(6)(威海市,2001)计算$\dfrac{\tan45°-\cos60°}{\sin60°}\cdot\cot30°$的结果是(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $2\sqrt{3}-3$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$

(7)(大连市,2001)若$\angle A$ 为锐角,且 $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则$\angle A$ 的度数为(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

(8)(广州市,2001)如果 α 是锐角,且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,那么 $\sin\alpha$ 的值是(　　).

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{16}{25}$

(9)(绍兴市,2001)$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,若 $BC=4$,$\sin A=\frac{2}{3}$,则 AC 的长是(　　).

A. 6　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{13}$

(10)(扬州市,2001)已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$(α 为锐角),则 $\tan\alpha$ 的值是(　　).

A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{12}{13}$　　D. $\frac{13}{12}$

(11)(北京市宣武区,2000)如果 α 是锐角,且 $\sin^2\alpha+\sin^2 54°=1$,那么 α 的度数是(　　).

A. 54°　　B. 46°　　C. 36°　　D. 26°

(12)(咸宁市,2001)当锐角 $A>45°$时,下列不等式不成立的是(　　).

A. $\sin A>\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\cos A<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\tan A>1$　　D. $\cot A>1$

(13)(荆门市,2001)如果$\angle A$ 为锐角,且 $\cos A=\frac{1}{4}$,那么(　　).

A. $0°<\angle A\leqslant 30°$　　B. $30°<\angle A\leqslant 45°$　　C. $45°<\angle A\leqslant 60°$　　D. $60°<\angle A<90°$

(14)(天门市,2001)已知 α 是锐角,且 $\tan\alpha=\sqrt{2}$,那么下列各式中正确的是(　　).

A. $60°<\alpha<90°$　　B. $45°<\alpha<60°$　　C. $30°<\alpha<45°$　　D. $0°<\alpha<30°$

(15)(十堰市,1999)若 α、β 都是锐角,且 $\cos\alpha>\cos\beta$,则下列各式正确的是(　　).

A. $\alpha>\beta$　　B. $\sin\alpha>\sin\beta$　　C. $\tan\alpha>\tan\beta$　　D. $\cot\alpha>\cot\beta$

(16)(孝感市,1999)$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,下列等式不正确的是(　　).

A. $\sin^2 A+\cos^2 B=1$　　B. $\sin^2(90°-A)+\cos^2(90°-A)=1$

C. $\sin(60°-A)=\cos(30°+A)$　　D. $\tan A\cdot\cot A=1$

(17)(天津市,1999)已知:$\sin\alpha+\cos\alpha=m$,$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=n$,则 m,n 的关系是(　　).

A. $m=n$　　B. $m=2n+1$　　C. $m^2=2n+1$　　D. $m^2=1-2n$

(18)(鄂州市,1999)在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,下列式子中不一定成立的是(　　).

A. $\sin A=\sin B$　　B. $\cos A=\sin B$　　C. $\sin A=\cos B$　　D. $\sin(A+B)=\sin C$

(19)(黄冈市,1999)已知锐角 A 满足 $1<\cot A<\sqrt{3}$,则 A 的取值范围是(　　).

A. $0°<A<45°$　　B. $30°<A<45°$　　C. $30°<A<60°$　　D. $45°<A<60°$

(20)(荆门市,1999)当锐角 $A>30°$时,$\cos A$ 的值的范围是(　　).

A. $0<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos A<1$　　C. $0<\cos A<\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}<\cos A<1$

(21)(北京市顺义区,1999)已知:α 为锐角,且 $\sin^2 60°+\cos^2\alpha=1$,那么 α 等于(　　).

A. 90°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

(22)(北京海淀区,1998)在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $\cos B$ 等于(　　).

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

(23)(甘肃省,1998)若$\sqrt{3}\tan(\alpha+10°)=1$,则锐角 α 的度数是(　　).

A. 20°　　B. 30°　　C. 40°　　D. 50°

(24)(北京市,1998)如果 α 是锐角,且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,那么 $\sin(90°-\alpha)$的值等于(　　).

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{16}{25}$

(25)(苏州市,1996)已知 $\sin\alpha=k$,$\cos\alpha=\sqrt{3}k$,α 为锐角,那么 k 的值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

(26)(济南市,1996)若 α 是锐角,且 $\cos\alpha=\tan30^\circ$,则(　　).

A. $0^\circ<\alpha<30^\circ$　　B. $30^\circ\leqslant\alpha<45^\circ$　　C. $45^\circ<\alpha<60^\circ$　　D. $60^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$

(27)(南通市,1998)如果$\angle A$ 是锐角,$\cos A=\frac{1}{4}$,那么(　　).

A. $0^\circ<A\leqslant30^\circ$　　B. $30^\circ<A\leqslant45^\circ$　　C. $45^\circ<A\leqslant60^\circ$　　D. $60^\circ<A<90^\circ$

(28)(成都市,1997)已知$\angle\alpha$ 为锐角,且 $\cos\alpha$ 的值小于$\frac{1}{2}$,那么$\angle\alpha$(　　).

A. 大于 60°　　B. 大于 30°　　C. 小于 30°　　D. 小于 60°

(29)(天津市,1998)当锐角 $A>30^\circ$时,$\cos A$ 的值是(　　).

A. 小于$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 大于$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 小于$\frac{1}{2}$　　D. 大于$\frac{1}{2}$

(30)(河南省,1995)如果 A、B、C 是$\triangle ABC$ 的三个内角,那么(　　).

A. $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$　　B. $\sin\frac{A}{2}=-\cos\frac{B+C}{2}$

C. $\cos A=\cos\frac{B+C}{2}$　　D. $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B+C}{2}$

(31)(台州市,1998)如图 5－1－1,延长 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 至 D 点,使 $BD=AB$,连结 CD,若 $\cot\angle BCD=3$,则 $\tan A=$(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

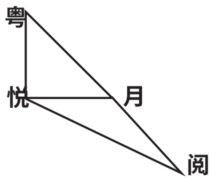


图 5－1－1

(32)(陕西省,1997)若 $y=\frac{\sin60^\circ+\cos60^\circ}{\cos30^\circ-\sin30^\circ}$,则 y 的值为(　　).

A. -1　　B. $2-\sqrt{3}$

C. 0　　D. $2+\sqrt{3}$

(33)(海南省,1997)已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$,且 $0^\circ<\alpha<45^\circ$,则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

(34)(山东省,1996)如图 5－1－2,$\angle C=90^\circ$,$\angle DBC=30^\circ$,$AB=BD$,利用此图可求得 $\tan75^\circ=$(　　).

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}-2$　　D. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

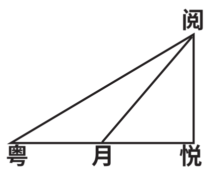


图 5－1－2

(35)(威海市,1998)在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,则 $\sin B$ 等于(　　).

A. $\sin\frac{A}{2}$　　B. $\cos\frac{A}{2}$　　C. $\sin A$　　D. $\cos A$

(36)(宁波市,1998)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,CD 是斜边 AB 上的高,已知 $AD=8$,$BD=4$,则 $\tan A$ 的值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(37)(华师大附中,1998)已知 $x=\frac{1+\sin30^\circ}{\cos30^\circ}$,且 $\tan\alpha=x$,$0^\circ<\alpha<90^\circ$,则 α 的值是(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

(38)(荆门市,1998)计算 $\cos^2 45°+\sin30°+3\cot60-\tan45°$值等于(　　).

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-1$

(39)(陕西省,1998)化简$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 40°}}{\sin50°}$的结果是(　　).

A. $\tan50°$　　B. $\cot40°$　　C. $\tan40°$　　D. 1

(40)(镇江市,1998)当 $0°<\alpha<45°$,下列各式成立的是(　　).

A. $\sin\alpha<\cot\alpha<\cos\alpha$　　B. $\sin\alpha<\cos\alpha<\cot\alpha$

C. $\cos\alpha<\sin\alpha<\tan\alpha$　　D. $\cot\alpha<\sin\alpha<\cos\alpha$

(41)(扬州市,1998)如果 α 是锐角,且 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$,那么 $\cos\alpha$ 的值是(　　).

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(42)(四川省,1998)$\cos55°$和 $\sin36°$的大小关系是(　　).

A. $\cos55°>\sin36°$　　B. $\cos55°=\sin36°$　　C. $\cos55°<\sin36°$　　D. 不能确定

(43)(荆州市,1998)已知$\angle A$ 为锐角,$\cot A<\sqrt{3}$,则$\angle A$(　　).

A. 小于 30°　　B. 大于 30°　　C. 小于 60°　　D. 大于 60°

(44)(西宁市,1996)若 $\cos\alpha\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,则锐角 α 的取值范围是(　　).

A. $\alpha\leqslant30°$　　B. $\alpha\geqslant30°$　　C. $\alpha\leqslant60°$　　D. $30°\leqslant\alpha<90°$

(45)(海南省,1996)若$\angle A$ 为锐角,则 $\cos A+\sin A$ 的值(　　).

A. 大于 1　　B. 等于 1

C. 小于 1　　D. 可能大于 1,小于 1 或等于 1

(46)(滨州市,2001)如果 $\sin A=\cos50°$,那么锐角 A 等于(　　).

A. 50°　　B. 40°　　C. 60°　　D. 45°

(47)(宜昌市,2001)观察下列各式:①$\sin59°>\sin28°$;②$0<\cos\alpha<1$(α 是锐角);③$\tan30°+\tan60°=\tan90°$;④$\tan44°\cdot\cot44°=1$,其中成立的有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(48)(四川省,2001)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,已知 $\tan B=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,那么 $\cos A$ 的值是(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

(49)(安徽省,2000)已知 $\cos\alpha<0.5$,那么锐角 α 的取值范围是(　　).

A. $60°<\alpha<90°$　　B. $0°<\alpha<60°$　　C. $30°<\alpha<90°$　　D. $0°<\alpha<30°$

(50)(襄樊市,2000)如图 5－1－3,$\angle AOB$ 顶点在坐标原点,边 OB 与 x 轴正半轴重合,边 OA 落在第一象限,P 为 OA 上一点,$PO=r$,$\angle AOB=\alpha$,点 P 的坐标是(　　).

A. $(r\tan\alpha,r\cot\alpha)$　　B. $(r\sin\alpha,r\cos\alpha)$　　C. $(r\cot\alpha,r\tan\alpha)$　　D. $(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$

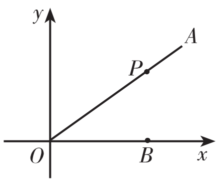


图 5－1－3

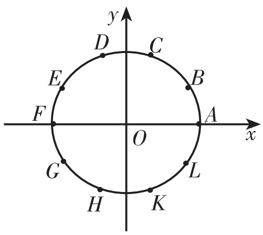


图 5－1－4

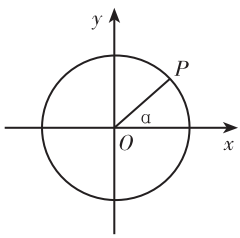


图 5－1－5

(51)(**潍坊市**,2001)**如图** 5—1—4,**半径为** 1 **的圆上有** 10 **个点,分别为** A、B、C、D、E、F、G、H、K、L,**相邻两点的距离相等,以圆心** O **为坐标原点**,OA **所在的直线为** x **轴,建立平面直角坐标系** xOy,**如图所示,则点** C **的坐标为**(　　).

A. $(\sin72°,\cos72°)$　B. $(\cos72°,\sin72°)$　C. $(\cos18°,\sin18°)$　D. $(\sin36°,\cos36°)$

(52)(**日照市**,2001)**如图** 5—1—5,**以直角坐标系的原点** O **为圆心,以** 1 **为半径作圆,若** P **是该圆上第一象限内的一点,且** OP **与** x **轴正方向的夹角为** α,**则点** P **的坐标是**(　　).

A. $(\sin\alpha,\cos\alpha)$　B. $(\cos\alpha,\sin\alpha)$　C. $(1,\cos\alpha)$　D. $(1,\sin\alpha)$

3. 计算下列各题

(1)(**甘肃省**,1999)$\sin90°+\sin30°+\tan0°+\cos60°-\tan45°-\cos0°+\cot90°$.

(2)(**吉林省**,1998)$2\cos45°+3\tan30°+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

(3)(**辽宁省**,1998)$\sin30°-\cos^2 45°+\frac{3}{4}\cot^2 60°+\sin^2 60°-\cos60°$.

(4)(**辽宁省**,1996)$\cos^2 45°+\tan60°\cdot\cos30°-3\tan^2 60°+\sin^2 90°$.

(5)(**南通市**,1998)$\frac{\sin30°}{\sin60°-\cos45°}-\sqrt{(1-\cot30°)^2}-\tan45°$.

(6)(**天门市**,1998)$-2^2+\sqrt{(1-\tan60°)^2}-(\sqrt{3}-1)^{\cos90°}+(\frac{\tan45°}{-2\sqrt{2}})^{-2}+\tan35°\tan55°$.

(7)(**西安市**,1997)$\frac{\sin60°+3\tan30°\cdot\cos60°}{(\cot37°\cdot\tan53°-2\cot45°)\cdot\cot30°}-\frac{\sin18°\cdot\sin90°}{(\sin^2 12°+\sin^2 18°)\cdot\cos20°}$.

(8)(**甘肃省**,1997)$\frac{\tan30°\cdot\sin30°}{\tan45\cdot\cot60°}+\sqrt{2}\sin45°-\frac{1}{2}\cos60°$.

(9)(**甘肃省**,1996)$\sqrt{\tan^2 60°-4\tan60°+4}-\frac{2\sqrt{2}\cdot\sin45°}{\cot30°-\tan20°\cdot\tan70°}$.

4. 计算:

(1)(**郴州市**,2001)$(3-\pi)^0-\frac{2}{1+\sqrt{2}}+2\sin45°+|1-\sqrt{2}|$.

(2)(**仙桃市**,2001)$\frac{\cos60°+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin45°+\sqrt{3}\tan30°}{\sin^2 30°+\cos^2 30°}$.

(3)(**安顺市**,2001)$(3.14-\pi)^0+\sqrt{8}-\frac{8}{\sqrt{2}+1}+4\cos60°\cdot\sin45°+|1-\sqrt{2}|$.

(4)(**十堰市**,1997)**求**$\frac{1}{\sin45°-\cos60°}+\frac{\sin30°}{\cos30°-\cot45°}+\tan44°\cdot\tan45°\cdot\tan46°$**的值**.

5.(**宁夏自治区**,1995)**在锐角三角形** ABC **中,求证**:$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

6.(**镇江市**,2001)**如图** 5—1—6,**在直角三角形** ABC **中**,$\angle B=90°$,$AB=a$,$BC=b(a>b)$,**延长** BA、BC,**使** $AE=CD=c$,**直线** CA、DE **交于点** F. **又锐角三角函数有如下性质:锐角的正弦、正切值随锐角的增大而增大;锐角的余弦值随锐角的增大而减小. 请运用该性质,并根据以上所提供的几何模型证明你提炼出的不等式.**

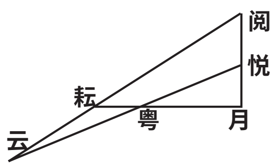


图 5—1—6

7.(**杭州市**,2001)**当** $x=4\sin30°+\tan60°-(-1)^0$ **时,先化简** $\frac{4x^3-9x}{x-3+2x^2}$,**然后求其值**.

8.(**安顺市**,2001)**已知方程** $x^2-2x+5k=0$ **的两根是** $\tan\theta$、$\cot\theta$,**求** k **及锐角** θ **的值**.

9.(**泰州市**,1998)**已知:在** Rt$\triangle ABC$ **中**,$\angle C=90°$,a、b、c **分别是**$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ **的对边**,$\tan A$、$\tan B$ **是关于** x **的一元二次方程** $x^2-kx+12k^2-37k+26=0$ **的两个实数根**.(1)**求** k **的值**;(2)**若** $c=10$,**且** $a>$

b，求 a、b.

10.（宿迁市，1998）已知：A、B 是 Rt$\triangle ABC$ 的两个锐角，且 $\tan A$、$\tan B$ 是方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个根.（1）求 m 的值；（2）求作一个一元二次方程，使它的两个根为（$\tan A+\tan B$）和（$\tan^2 A+\tan^2 B$）.

11.（河南省，1989）已知 a、b、c 为$\triangle ABC$ 中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，当 $m>0$ 时，关于 x 的方程 $b(x^2+m)+c(x^2-m)-2\sqrt{m}ax=0$ 有两个相等的实数根，且 $\sin C\cdot\cos A-\cos C\cdot\sin A=0$，试判定$\triangle ABC$ 的形状.

12.（盐城市，1996）$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c.（1）根据锐角的正弦、余弦定义证明：$\sin A+\cos B>1$；（2）是否存在一个一元二次方程，它的两个实数根 α、β 满足 $\begin{cases}\alpha+\beta=\sin^2 A+\sin^2 B,\\ \alpha\beta=\dfrac{\sin A+\sin B}{4}.\end{cases}$ 证明你的结论.

13.（山东省，1999）如图 5－1－7，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，D 为 BC 边上一点，$\tan\angle ADC$ 是方程 $3(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})=2$ 的一个较大的根，求 CD 的长（结果取准确值）.

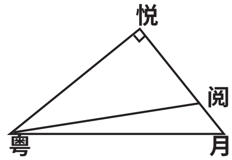


图 5－1－7

14.（安顺市，2002）计算：$-2^2\cos 60°+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+4\tan 30°\cdot\sin 60°-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

5.2　解直角三角形

【学习目标要求】

掌握直角三角形的边角关系,会运用勾股定理、直角三角形的两个锐角互余及锐角三角函数解直角三角形.

【知识要点精析】

1. 直角三角形的边角关系

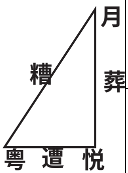
$\mathrm{Rt}\triangle ABC(\angle C=90^\circ)$的边角之间有如下关系:

(1)三边之间的关系　$a^2+b^2=c^2$(勾股定理)　(2)两锐角之间的关系　$A+B=90^\circ$

(3)边角之间的关系　$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$,$\tan A=\frac{a}{b}$,$\cot A=\frac{b}{a}$.

2. 直角三角形的解法

直角三角形中各元素间的关系是解直角三角形的依据.因此,解直角三角形的关键是正确选择直角三角形的边角关系式,使两个已知元素(其中至少有一个元素是边)和一个未知元素共处于这个关系式中,其 4 种类型的解法如下表:

		已知条件	解　　法
	一边一角	已知斜边和一个锐角(c、A)	1. $B=90^\circ-A$ 2. $a=c\cdot\sin A$ 3. $b=c\cdot\cos A$
	一边一角	已知一条直角边和一个锐角(a、A)	1. $B=90^\circ-A$ 2. $b=a\cdot\cot A$ 3. $c=\frac{a}{\sin A}$
	两边	斜边和一条直角边(c,a)	1. $b=\sqrt{c^2-a^2}$ 2. 利用 $\sin A=\frac{a}{c}$ 求 A 3. $B=90^\circ-A$
	两边	两条直角边(a,b)	1. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 2. 利用 $\tan A=\frac{a}{b}$ 求 A 3. $B=90^\circ-A$

【命题热点规律探析】

纵观近几年各地中考数学试题,本节命题热点大致有以下几个方面:直角三角形元素之间的关系,即三边之间、锐角之间、边角之间的关系是解决有关直角三角形问题的重要依据,通常利用勾股定理、两锐角"双互余"(互为余角、互为余函数)及边角之间的函数关系式来达到求解的目的.当然,有关解斜三角形的问题,可以借助特殊角构造直角三角形来求解.

【热点考题精析】

例 1　(1)(甘肃省,2001)在$\triangle ABC$中,若$\sin A=1$,$\tan B=\sqrt{3}$,则$\angle C=$________.

(2)(陕西省,2001)在$\triangle ABC$中,$\angle C$为直角,若$3AC=\sqrt{3}BC$,则$\angle A$的度数是________,$\cos B$的值是________.

解　(1)$\triangle ABC$中,由$\sin A=1$,知$\angle A=90^\circ$,由$\tan B=\sqrt{3}$,知$\angle B=60^\circ$,从而$\angle C=30^\circ$.

(2)在 Rt△ABC 中，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ∴ $\angle B=30^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

例 2　(徐州市，2001)如图 5－2－1，△ABC 中，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$，垂足为 D，$\angle A=30^\circ$，$AC=6\sqrt{3}$. 求 BC 和 DB.

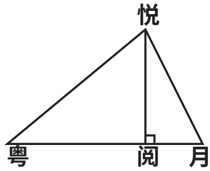


图 5－2－1

解　在 Rt△ACB 中，$\tan A=\dfrac{BC}{AC}$. ∴ $BC=AC\cdot\tan A=6\sqrt{3}\cdot\tan 30^\circ=6\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=6$. 在 Rt△$ACB$ 中，$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-30^\circ=60^\circ$. 在 Rt△$BDC$ 中，$\angle BCD=90^\circ-\angle B=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. ∴ $DB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 6=3$.

例 3　(内蒙古东四盟市，1999)已知：如图 5－2－2，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$，$\angle A$ 的平分线 $AD=8\sqrt{3}$. 求$\angle B$、$\angle BAC$、AB、BC.

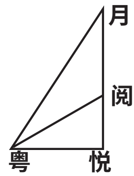


图 5－2－2

解　在 Rt△ACD 中，$\cos\angle DAC=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{12}{8\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $\angle DAC=30^\circ$，∴ $\angle BAC=60^\circ$.

在 Rt△ABC 中，$\angle B=30^\circ$. ∴ $AB=2AC=2\times 12=24$.

∴ $BC=AB\cdot\sin\angle BAC=24\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$.　故$\angle B=30^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=24$，$BC=12\sqrt{3}$.

例 4　(北京市海淀区，2002)如图 5－2－3，在菱形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于 E 点，$EC=1$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，求四边形 $AECD$ 的周长.

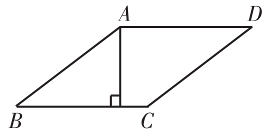


图 5－2－3

解　在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD=DA$.

∵ $AE\perp BC$，∴ $\angle AEB=90^\circ$.

在 Rt△ABE 中，$\sin B=\dfrac{AE}{AB}$. 又 $\sin B=\dfrac{5}{13}$，

设 $AE=5x\ (x>0)$，则 $AB=13x$.　根据勾股定理，得 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=12x$.

∵ $BE+EC=BC$，$EC=1$，∴ $12x+1=13x$.　解得 $x=1$.

∴ $AB=DA=CD=13$，$AE=5$.　∴ $AE+EC+CD+DA=5+1+13+13=32$.

∴ 四边形 $AECD$ 的周长是 32.

例 5　(宿迁市，2002)如图 5－2－4，在△ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle ABC=105^\circ$，$BD\perp AC$ 于点 D，且 $BD=4$. 试求△ABC 的周长.

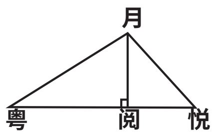


图 5－2－4

解　在 Rt△ABD 中，$AB=\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{4}{\frac{1}{2}}=8$，

$AD=\dfrac{BD}{\tan A}=\dfrac{4}{\tan 30^\circ}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=4\sqrt{3}$.

又∵ 在△ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle ABC=105^\circ$. ∴ $\angle C=180^\circ-105^\circ-30^\circ=45^\circ$.

∴ △BCD 为等腰直角三角形　∴ $DC=BD=4$. $BC=\sqrt{2}BD=4\sqrt{2}$.

∴ △ABC 的周长为 $AB+BC+AC=12+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$.

例 6　(三明市，1999)如图 5－2－5，梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=BC=4$，$CD=2$，$\angle B=60^\circ$. 求 AD 的长.

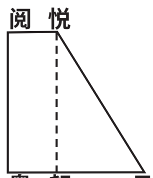


图 5－2－5

解　作 $CE\perp AB$ 于 E，$\angle B=60^\circ$，∴ $\angle ECB=30^\circ$.

∴ $BE=\frac{1}{2}BC=2$，$AE=2$.

∵ $DC/\!/AE$，且 $AC=AE=2$，$\angle AEC=90^\circ$. ∴ 四边形 $AECD$ 为矩形.

在 Rt△BCE 中，$DE=BC\cdot\sin60^\circ=2\sqrt{3}$. ∴ $AD=2\sqrt{3}$.

例 7　如图 5－2－6，已知：在△ABC 中，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$AB=8$. 求 AC、BC 的长.

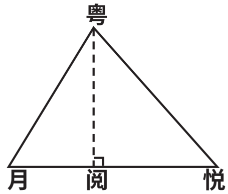


图 5－2－6

分析　有$\angle B=60^\circ$，可构造 Rt△使$\angle B$ 为它的内角，试作 $AD\perp BC$ 于 D.

解　作 $AD\perp BC$ 于 D，在 Rt△ABD 中，

∵ $AB=8$，$\angle B=60^\circ$. ∴ $BD=4$，$AD=4\sqrt{3}$.

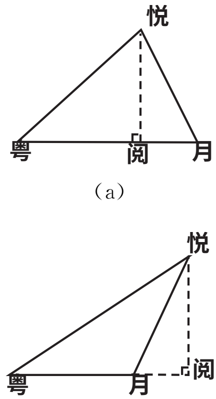
在 Rt△ADC 中，∵ $\angle C=180^\circ-\angle B-\angle BAC=45^\circ$，

∴ $DC=AD=4\sqrt{3}$，$AC=4\sqrt{6}$.

∴ $BC=BD+DC=4+4\sqrt{3}$，$AC=4\sqrt{6}$.

说明　斜三角形的问题，一般转化为 Rt△问题来解，转化的方法常常是作垂线.

例 8　(黑龙江省，2002)"曙光中学"有一块三角形形状的花圆 ABC，现可直接测量到$\angle A=30^\circ$，$AC=40$ 米，$BC=25$ 米，请你求出这块花辅的面积.



(a)

(b)

图 5－2－7

解　分两种情况计算，如图 5－2－7：

(1)如图(a)，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，在 Rt△ADC 中，$\angle A=30^\circ$，$AC=40$.

∴ $CD=20$　$AD=AC\cdot\cos30^\circ=20\sqrt{3}$

在 Rt△CDB 中，$CD=20$，$CB=25$，∴ $DB-\sqrt{CB^2-CD^2}=15$

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}(AD+DB)\cdot CD=(200\sqrt{3}+150)$(米^2).

(2)如图(b)，过点 C 作 $CD\perp AB$ 交 AB 的延长线于 D，由(1)可得 $CD=20$，$AD=20\sqrt{3}$，$DB=15$

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}(AD-DB)\cdot CD=(200\sqrt{3}-150)$(米^2).

例 9　(厦门市，2002)如图 5－2－8，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\tan B=\sqrt{3}$，上底 $AD=10$，梯形的高是 6.

求：(1)$\angle B$ 的度数；(2)下底 BC 的值.(结果保留根号)

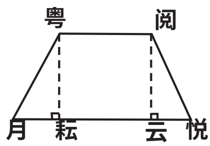


图 5－2－8

解　(1)过 A、D 分别作 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，垂足分别为 E、F，则 $AE=DF$，$AD=EF$，$BE=FC$

在 Rt△ABE 中，$\tan B=\sqrt{3}$　∴ $\angle B=60^\circ$

(2)∵ $\tan B=\frac{AE}{BE}$　∴ $BE=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$　∴ $BC=2BE+EF=10+4\sqrt{3}$.

例 10　(贵州省毕节地区，2001)若 a、b、c 是△ABC 的三边，方程 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有两个相等的实数根，且$(1+\frac{c}{a})a=2b$. 求 $\tan A$ 的值.

解　原方程变形得$(c-a)x^2+2bx+a+c=0$.

∵ 方程有两个相等的实数根，∴ $\triangle=4b^2-4(c^2-a^2)=0$. ∴ $a^2+b^2=c^2$. ①

又$(1+\frac{c}{a})a=2b$，∴ $c=2b-a$. ②　把②代入①，得 $a^2+b^2=(2b-a)^2$.

∴ $3b^2-4ab=0$，∴ $3b=4a$.　∵ $a^2+b^2=c^2$，∴ △ABC 为直角三角形，∴ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$.

例 11　(嘉兴市，2001)如图 5－2－9，在△ABC 中，$\angle A=90^\circ$，D 是 AB 上一点，$\angle ACD=37^\circ$，$\angle BCD=26^\circ30'$，$AC=60$，求 AD、CD 及 AB 的长.(以下数据供选用：$\sin37^\circ\approx\frac{3}{5}$，$\cos37^\circ\approx\frac{4}{5}$，$\tan37^\circ\approx$

$\frac{3}{4}$，$\cot 37^\circ \approx \frac{4}{3}$）.

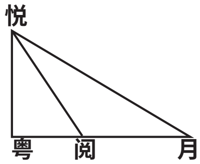


图 5－2－9

解　在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$\tan\angle ACD=\frac{AD}{AC}$，∴ $AD=AC\cdot\tan\angle ACD=60\tan 37^\circ\approx 45$.

又 $\sin\angle ACD=\frac{AD}{CD}$. ∴ $CD=\frac{AD}{\sin\angle ACD}\approx 75$.

而 $\angle B=90^\circ-\angle ACB=90^\circ-(37^\circ+26^\circ30')=26^\circ30'$，∴ $\angle B=\angle BCD$. ∴ $BD=DC\approx 75$.

∴ $AB=AD+BD\approx 45+75=120$.

例 12　（北京市海淀区，2000）已知：如图 5－2－10，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin A=\frac{2}{5}$. D 为 AC 上一点，$\angle BDC=45^\circ$，$DC=6$. 求 AB 的长.

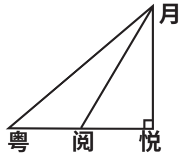


图 5－2－10

解　在 $\triangle BCD$ 中，$\angle C=90^\circ$.

∵ $\angle BDC=45^\circ$，∴ $\angle DBC=\angle BDC=45^\circ$. ∴ $DC=CB$.

∵ $DC=6$，∴ $CB=6$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，∵ $\sin A=\frac{2}{5}=\frac{CB}{AB}$，

∴ $AB=\frac{6\times 5}{2}=15$，∴ AB 的长为 15.

例 13　（广西自治区，2002）如图 5－2－11，DE 是 $\square ABCD$ 的 $\angle ADC$ 的平分线，$EF/\!/AD$ 交 DC 于 F.

(1)求证：四边形 $AEFD$ 是菱形；

(2)如果 $\angle A=60^\circ$，$AD=5$，求菱形 $AEFD$ 的面积.

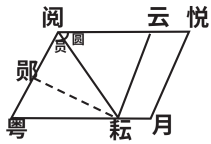


图 5－2－11

(1)**证明**　∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $DF/\!/AE$.

又 $EF/\!/AD$，　∴ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形.

∵ $\angle 2=\angle AED$，$\angle 1=2$，∴ $\angle 1=\angle AED$，∴ $AE=AD$，∴ $\square AEFD$ 是菱形.

(2)**解法一**　作 $EG\perp AD$，垂足为 G.

$EG=AE\sin A=5\sin 60^\circ=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

∴ $S_{菱形AEFD}=AD\cdot EG=5\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{25}{2}\sqrt{3}$.

解法二　$S_{菱形AEFD}=2S_{\triangle AED}=AD\cdot AE\cdot\sin 60^\circ=5\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25}{2}\sqrt{3}$.

例 14　（珠海市，2001）如图 5－2－12，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAB=30^\circ$，$\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 都是等边三角形，$DF\perp AC$ 交 AC 于 M. (1)求证：$BF=EF$. (2)设 $BC=2$，求 DF.

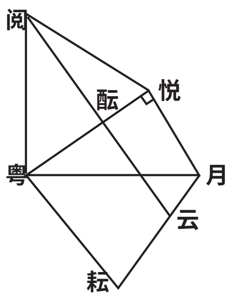


图 5－2－12

(1)**证明**　∵ $\triangle ACD$ 是等边三角形，且 $DM\perp AC$，∴ $AM=CM$.

∵ $\triangle ABE$ 是等边三角形，∴ $\angle BAE=60^\circ$.

又∵ $\angle CAB=30^\circ$，∴ $\angle CAE=\angle BAE+\angle CAB=90^\circ$.

又∵ $DF\perp AC$，$\angle ACB=90^\circ$，∴ $BC/\!/FM/\!/EA$.

∵ $CM=AM$，∴ $BF=EF$.

(2)**解**　由 $\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAE=30^\circ$，$BC=2$，得 $AC=2\sqrt{3}$.

∵ $\triangle ADC$ 是等边三角形，∴ $DM=2\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ=3$.

由(1)可知 FM 是梯形 $BCAE$ 的中位线，

∴ $FM=\frac{1}{2}(BC+AE)=\frac{1}{2}(BC+AB)=3$. ∴ $DF=DM+MF=6$.

例 15　（盐城市，2001）如图 5－2－13，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

(1)在 AC 上求作一点 P,使得 $\angle ABP=\angle A$(用尺规作图,不写作法,但要保留作图痕迹);

(2)若 $\angle A=25°35'$,在上面所作的图中,$\angle BPC=$________°________′;

(3)若 $\angle A=22.5°$,试求 $\tan 22.5°$ 的值.

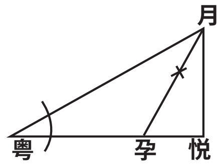


图 5—2—13

解　(1)如图 5—2—13.(2)$\angle BPC=51°10'$.

(3)令 $BC=1$,$\because$ $\angle A=22.5°$,$\therefore$ $\angle BPC=45°$.

$\therefore$ $CP=1$,$\therefore$ $PA=PB=\sqrt{2}$.

$\therefore$ $\tan A=\tan 22.5°=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.

例 16　(孝感市,1999)如图 5—2—14,已知在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AD+BC=18\text{cm}$,$\sin\angle ABC=\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$,$AC$ 与 BD 相交于 O,$\angle BOC=120°$,试求 AB 的长.

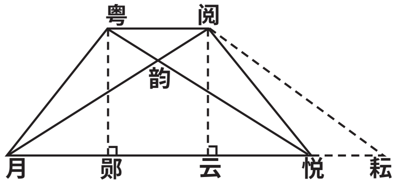


图 5—2—14

解　如图 5—2—14,作 $DE/\!/AC$ 交 BC 延长线于 E,

则四边形 $ACED$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AD=CE$,$DE=AC$.又易证$\triangle ABC\cong\triangle DCB$,

$\therefore$ $AC=BD$,$\therefore$ $DB=DE$.　$\therefore$ $\triangle DBE$ 是等腰三角形,$BE=BC+AD=18\text{cm}$.

作 $DF\perp BC$ 于 F,$AG\perp BC$ 于 G,$\angle BDE=\angle BOC=120°$,$\angle BDF=60°$,$BF=9\text{cm}$,

$AG=DF=3\sqrt{3}\text{cm}$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中,$\sin\angle ABG=\dfrac{AG}{AB}$.$\therefore$ $AB=\dfrac{AG}{\sin\angle ABG}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=7\dfrac{1}{2}(\text{cm})$.

说明　在直角三角形中,若已知两边,宜先用勾股定理求出第三边,再求锐角三角函数值;若已知一边和角,应先求另一角,再通过锐角三角函数列出含有未知元素和已知元素的等式,便可求出未知元素.需要指出的是在解直角三角形时,若所求的元素不在直角三角形中,则应将它转化到直角三角形中去.转化的途径及办法很多,如可作辅助线构造直角三角形,或找已知直角三角形中的边或角替代所要求的元素等等.

例 17　(泰州市,1998)如图 5—2—15,在$\triangle ABC$ 中,$\angle A=30°$,E 为 AC 上一点,且 $AE:EC=3:1$,$EF\perp AB$ 于 F,连结 FC,则 $\cot\angle CFB$ 等于(　　).

A. $\dfrac{1}{6}\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$

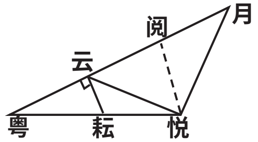


图 5—2—15

分析　因为$\angle CFB$ 不是直角三角形的一个内角,故要想办法构造出一个直角三角形才能求 $\cot\angle CFB$ 的值,由 $EF\perp AB$ 联想到作 EF 的平行线,得直角三角形便可求解.

解　过 C 点作 $CD/\!/EF$,垂足为 D,

$\therefore$ $CD\perp AB$,$\therefore$ $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{3}{1}$,$\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{AE}{AC}$.

设 $EF=x$,$\therefore$ $\angle A=30°$得 $AE=2x$,$AF=\sqrt{3}x$,

$\therefore$ $DF=\dfrac{EC}{AE}\cdot AF=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

又 $AE:EC=3:1$,$\therefore$ $AE:DC=3:4$,$\therefore$ $CD=\dfrac{AC}{AE}\cdot EF=\dfrac{4}{3}x$.

在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中,$\cot\angle CFB=\dfrac{DF}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x/\dfrac{4}{3}x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.$\therefore$ 选 D.

例 18　(广西自治区,1998)如图 5—2—16,$\triangle ABC$ 中,$\angle B=30°$,$\angle C=45°$,$AB-AC=2-\sqrt{2}$.求

BC 的长.

解　作 $AD\perp BC$ 交 BC 于 D 点，

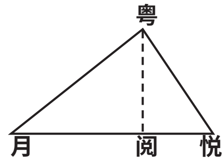


图 5－2－16

$\because$ $AD=AB\cdot\sin B$，$AD=AC\cdot\sin C$，$\therefore$ $AB\cdot\sin30^\circ=AC\cdot\sin45^\circ$.

即 $\frac{1}{2}AB-\frac{\sqrt{2}}{2}AC=0$.　　①

$\because$ $AB-AC=2-\sqrt{2}$　　②

联立①、②组成方程组，得 $AB=2$，$AC=\sqrt{2}$.

$\because$ $BD=AB\cdot\cos B=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$CD=AC\cdot\cos C=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，$\therefore$ $BC=BD+DC=\sqrt{3}+1$.

说明　1. 在解直角三角形时，若所求的元素不在直角三角形中，则应将它转化到直角三角形中去. 转化的途径很多，如可作辅助线构造直角三角形，或找已知直角三角形中的边或角来替代所要求的元素等等.

2. 利用代数方法来解三角题，如例 13 中的设 $EF=x$，例 14 中解方程组可使解题过程简捷、清晰，这是常用的一种解题方法.

例 19　(上海市闸北区，2000)如图 5－2－17，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$EF\parallel AB$，G 是 EF 的中点，连结 CG 并延长交 AB 于点 D，$EF=10$，$GD=7$. (1)求 $\triangle ABC$ 的各边长；(2)连结 BE，求 $\angle EBA$ 的正切值.

解　(1)$\because$ $\triangle CEF$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle$，$\angle ECF=90^\circ$，G 是 EF 的中点，

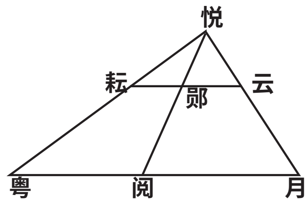


图 5－2－17

$\therefore$ $CG=\frac{1}{2}EF=5$. $\therefore$ $CD=12$.

$\because$ $EF\parallel AB$，$\therefore$ $\frac{EG}{AD}=\frac{CG}{CD}$，$\frac{5}{AD}=\frac{5}{12}$.

$\therefore$ $AD=12$. 同理 $BD=12$，$\therefore$ $AB=24$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\therefore$ $BC=12$，$AC=12\sqrt{3}$.

(2)过点 E 作 $EG\perp AB$，G 为垂足，

$\because$ $EF\parallel AB$，$\therefore$ $\angle CEF=30^\circ$，$\therefore$ $CE=5\sqrt{3}$，$\therefore$ $AE=7\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAG$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\therefore$ $EG=\frac{7}{2}\sqrt{3}$，$AG=\frac{21}{2}$. $\therefore$ $BG=\frac{27}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BGE$ 中，$\tan\angle EBA=\frac{7\sqrt{3}}{27}$.

例 20　(北京市宣武区，2000)已知：如图 5－2－18，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\sin B=\frac{3}{5}$，D 是 BC 边上一点，$DE\perp AB$，垂足为 E，$CD=DE$，$AC+CD=9$. 求：(1)BC 的长；(2)CE 的长.

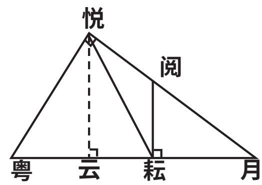


图 5－2－18

解　(1)$\because$ $DE\perp AB$，$AC\perp BC$，$\therefore$ $\sin B=\frac{DE}{DB}=\frac{AC}{AB}$.

$\because$ $\sin B=\frac{3}{5}$，$\therefore$ $\frac{DE}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.

设 $DE=3k$，则 $DB=5k$，$\therefore$ $BE=4k$.

$\because$ $CD=DE$，$\therefore$ $CD=3k$. $\therefore$ $BC=CD+BD=3k+5k=8k$.

$\therefore$ $AC=6k$，$AB=10k$.

$\because$ $AC+CD=9$，$\therefore$ $6k+3k=9$.　解这个方程，得 $k=1$. $\therefore$ $BE=4k=4$，$BC=8k=8$.

(2)过点 C 作 $CF\perp AB$，垂足为 F，则 $\sin B=\frac{CF}{CB}=\frac{3}{5}$.

$\therefore$ $CF=\frac{3}{5}BC=\frac{3}{5}\times8=\frac{24}{5}$，$FB=\frac{4}{5}BC=\frac{32}{5}$. $\therefore$ $EF=FB-EB=\frac{32}{5}-4=\frac{12}{5}$.