黄冈兵法 · 同步学案

高三数学

编　者　石国强

陕西师范大学出版社

MU LU

目 录

第一章 概率与统计

1.1 离散型随机变量的分布列

知能转化导引

1. 随机变量

(1) 如果随机试验的结果可以用一个变量来表示,那么这样的变量叫做随机变量. 随机变量常用希腊字母 ξ、η 等表示.

(2) 对于随机变量可能取的值,我们可以按一定次序一一列出,这样的随机变量叫做离散型随机变量.

(3) 随机变量可以取某一区间内的一切值,这样的随机变量叫做连续型随机变量.

(4) 若 ξ 是随机变量,$\eta=a\xi+b$,其中 a,b 是常数,则 η 也是随机变量.

2. 离散型随机变量的分布列

(1) 设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$,$\xi$ 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots)$的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$,则称表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

为随机变量 ξ 的概率分布,简称为 ξ 的分布列.

(2) 离散型随机变量的分布列具有两个性质:

① $p_i\geqslant 0,i=1,2\cdots$;　　② $p_1+p_2+\cdots=1$.

(3) 当随机变量 ξ 是 n 次独立重复试验中某事件恰好发生的次数时,其概率分布称作二项分布. 这里之所以把这种分布称作为二项分布,因为 $C_n^kp^kq^{n-k}$ 恰是二项展开式 $(q+p)^n=C_n^0p^0q^n+\cdots+C_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+C_n^np^nq^0$ 中的第 $k+1$ 项的值. 这种二项分布记作 $\xi\sim B(n,p)$,其中 n,p 为参数,并记 $C_n^kp^kq^{n-k}=b(k;n,p)$,$q=1-p$.

3. 随机变量的学习要求

了解随机变量的概念与意义及随机变量的可能取值与随机试验的结果之间的关系，会根据实际问题用随机变量正确表示某些随机试验的结果与随机事件.

4. 离散型随机变量的分布列的学习要求

(1) 理解离散型随机变量及其分布列的概念，掌握分布列的两个基本性质，会求一些简单的离散型随机变量的分布列；

(2) 掌握二项分布，了解它的实际背景，会用二项分布计算有关随机事件的概率；

(3) 会根据离散型随机变量 ξ 的分布列求出 $\eta=a\xi+b$(a,b 为常数)的分布列.

5. 本节主要体现了分类讨论的数学思想方法

方法技巧规律

1. 注意随机试验应满足的条件：

(1) 试验可以在相同的情况下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

2. 随机变量是由随机试验而得出的.

3. 注意“离散”与“连续”的区别：离散型随机变量，它所可能取的值可以一一列举出，而连续型随机变量可取某一区间内的一切值，我们无法对其中的每个值一一列举.

4. 若 ξ 是随机变量，$f(x)$ 是连续函数或单调函数，则 $f(\xi)$ 也是随机变量. 由此可见，随机变量与函数是有一定联系的，随机变量函数中的自变量是试验结果.

5. 了解“分布列”的作用. 离散型随机变量的分布列指出了随机变量 ξ 的取值范围以及取这些值的概率，通常情况下，若求离散型随机变量在某一范围内取值的概率，则可运用分布列，将这个范围内各个值的概率值相加.

6. 弄清“二项分布”的实质. “二项分布”是一种特殊的分布列，因为 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ 是二项展开式中的第 $k+1$ 项的值.

能力升级捷径

【例 1】 投掷均匀硬币一次，随机变量为(　　)

A. 出现正面的次数　　B. 出现正面或反面的次数

C. 掷硬币的次数　　D. 出现正、反面次数之和

学点　随机变量从本质上讲就是以随机试验的每一个可能结果为自变量的一个函数,即随机变量的取值实质上是试验结果对应的数,但这些数是预先知道所有可能的值,而不知道究竟是哪一个值,这便是“随机”的本源.

解　掷一枚硬币,可能出现的结果是正面向上或反面向上,以一个标准如正面向上次数来描述这一随机试验,那么正面向上的次数就是随机变量 ξ,ξ 的取值是 0,1,故选 A.

易错点　本题容易误选 B,认为出现正面记为 $\xi=1$,出现反面记为 $\xi=0$,因此随机变量 ξ 是表示出现正面或反面的次数,产生错误的原因是没有理解随机变量的本质.本题的 C 选项中掷硬币次数是 1,不是随机变量,选项 D 中对应的事件是必然事件,也非随机事件.

同类变式　袋中有 2 个黑球 6 个红球,从中任取两个,可以作为随机变量的是(　　)

A. 取到的球的个数　　　　B. 取到红球的个数

C. 至少取到一个红球　　　　D. 至少取到一个红球的概率

提示　A 的取值不具有随机性,C 是一个事件而非随机变量,D 是概率值而非随机变量,而 B 满足要求.

思维延伸　随机变量 ξ_1 是某城市 1 天之中发生的火警次数;随机变量 ξ_2 是某城市 1 天之内的温度;随机变量 ξ_3 是某火车站 1 小时内的旅客流动人数,这三个随机变量中为连续型随机变量的是(　　)

A. 只有 ξ_1 和 ξ_3　　　　B. 只有 ξ_2

C. 只有 ξ_2 和 ξ_3　　　　D. 只有 ξ_3

提示　火警次数与旅客流动人数均为离散型的,而一天之内的温度是连续型的,故选 B.

【例 2】　袋中有 1 个白球,2 个红球,4 个黑球.现从中任取一球观察其颜色,确定这个随机试验中的随机变量,并指出在这个随机试验中随机变量可能取的值及分布列.

学点　求离散型随机变量的分布列在某种程度上就是正确地求出相应事件个数,即正确求出相应的排列组合数.

解　设集合 $M=\{x_1,x_2,x_3\}$,其是 x_1 为“取到的球为白色的球”,x_2 为“取到的球为红色的球”,x_3 为“取到的球为黑色的球”.在本题中可规定:$\xi(x_i)=i(i=1,2,3)$,即当试验结果 $x=x_i$ 时,随机变量 $\xi(x)=i$,这样,我们确定 $\xi(x)$ 是一个随机变量,它的自变量 x 的取值是集合 M 中的一个元素,即 $x\in M$,而随机变量 ξ 本身的取值则为 1,2,3 三个实数,ξ 分别取 1,2,3 三

个值的概率为 $P(\xi=1)=\frac{1}{7}$，$P(\xi=2)=\frac{2}{7}$，$P(\xi=3)=\frac{4}{7}$.

ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

技巧点　分布列的表示形式可有如下几种：①如教材所述的表格形式；②一组等式（ξ 的所有取值的概率）；③有时可将②压缩为一个带“i”的等式.

同类变式　设随机变量 ξ 的概率分布如表所示：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

求：(1) $P(\xi<1)$，$P(\xi\leqslant 1)$，$P(\xi<2)$，$P(\xi\leqslant 2)$；(2) $F(x)=P(\xi\leqslant x)$，$x\in\mathbf{R}$.

解　(1) $P(\xi<1)=P(\xi=0)=\frac{1}{2}$，$P(\xi\leqslant 1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{5}{6}$，

$P(\xi<2)=P(\xi\leqslant 1)=\frac{5}{6}$，$P(\xi\leqslant 2)=1$.

$$(2)\ F(x)=P(\xi\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ \frac{5}{6}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

思维延伸　已知随机变量 ξ 的分布列如下表所示：

ξ	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

分别求出随机变量 $\eta_1=2\xi-1$，$\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

解　由于 $\eta_1=2\xi-1$ 对于不同的 ξ 有不同的取值 $y=2x-1$，

即 $y_1=2x_1-1=-5$，$y_2=2x_2-1=-3$，$y_3=2x_3-1=-1$，$y_4=2x_4-1=1$，$y_5=2x_5-1=5$.

故 η_1 的分布列如表：

η_1	-5	-3	-1	1	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\eta_2=\xi^2$ 对于 ξ 的不同的取值 -1 与 1，取相同的值 1，故 $P(\eta_2=1)=P(\xi=-1)+P(\xi=1)=\frac{5}{10}$.

所以 η_2 的分布列如下表：

η_2	0	1	4	9
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

说明　在得到的随机变量的分布列中，取值行中应无重复数；概率行中各项必须非负，且各项之和为 1.

【例 3】　某小组有 10 台各为 7.5kW 的机床，如果每台机床的使用情况是相互独立的，且每台机床平均每小时开动 12 分钟，问全部机床用电超过 48kW 的可能性有多大？

学点　明确某一时刻正在工作的机床台数 ξ 服从二项分布是解题的关键.

解　由于每台机床正在工作的概率为 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$，而且每台机床有“工作”与“不工作”两种情况，故每一时刻正在工作的机床台数 ξ 服从二项分布，即 $\xi\sim B\left(10,\frac{1}{5}\right)$.

$$P(\xi=k)=C_{10}^{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}\qquad(k=0,1,2,\cdots,10)$$

据题意，48kW 可供 6 台机床同时工作，用电超过 48kW，即意味着有 7 台或 7 台以上的机床在工作，这一事件的概率为

$$\begin{aligned}P(\xi\geqslant7)&=P(\xi=7)+P(\xi=8)+P(\xi=9)+P(\xi=10)\\&=C_{10}^{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(\frac{4}{5}\right)^{3}+C_{10}^{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(\frac{4}{5}\right)^{2}+C_{10}^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(\frac{4}{5}\right)+\\&\quad C_{10}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}\approx\frac{1}{1157}.\end{aligned}$$

由上可以说明，用电量超过 48 千瓦的可能性是很小的，根据这一点，可能选择适当的供电设备，做到既保证供电而又合理节约用电.

发散点　如果所考虑的试验可以看做是一个只有两种结果 A 和 $\bar{A}$ 的试

验的 n 次独立重复，则 n 次试验中 A 发生的次数 ξ 服从二项分布.

同类变式　借助二项分布，证明 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n(n\in\mathbf{N}_+)$

证明　若记事件 A："掷一均匀硬币，出现正面向上"，则掷 n 次硬币即进行 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数 ξ 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

故 $P(\xi=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，

由 $P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)+\cdots+P(\xi=n)=1$，得

$C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，

即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

思维延伸　某射手每次能命中目标的概率为 0.15，现该射手连续向某目标进行射击，如果命中目标，则射击停止，否则继续射击，直到命中目标，但射击次数最多不超过 10 次，求该射手射击次数 ξ 的分布列.

提示　显然，$\xi=1,2,3,\cdots,10$，依题意可知，各项射击是独立的，由独立事件的概率关系 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，不难求出 $P(\xi)$.

解　$P(\xi=n)=(1-0.15)^{n-1}\times0.15=0.85^{n-1}\times0.15$，$n=1,2,3,\cdots,9$，

$P(\xi=10)=(1-0.15)^9\times0.15+(1-0.15)^{10}=0.85^9$

故由上可得 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4	5
P	0.15	0.85×0.15	$0.85^2\times0.15$	$0.85^3\times0.15$	$0.85^4\times0.15$
ξ	6	7	8	9	10
P	$0.85^5\times0.15$	$0.85^6\times0.15$	$0.85^7\times0.15$	$0.85^8\times0.15$	0.85^9

基础能力训练

1. 抛掷两颗骰子，所得点数之和记为 ξ，那么 $\xi=4$ 表示的随机试验结果是(　　)

A. 一颗是 3 点，一颗是 1 点；

B. 两颗都是 2 点；

C. 两颗都是 4 点;

D. 一颗是 3 点,一颗是 1 点或两颗都是 2 点.

2. 下列表中能成为随机变量 ξ 的分布列的是(　　)

A.

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.4

B.

ξ	1	2	3
P	0.4	0.7	-0.1

C.

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

D.

ξ	1	2	3
P	0.3	0.4	0.4

3. 从五个数 1,2,3,4,5 仔任取 3 个数 x_1,x_2,x_3,随机变量 ξ 表示 x_1,x_2,x_3 中最大数的值,则 ξ 的分布列为(　　)

A.

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

B.

ξ	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

C.

ξ	1	2	3	4	5
P	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

D.

ξ	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$

4. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=m\left(\frac{2}{3}\right)^k$,$k=1,2,3$,则 m 的值为

A. $\frac{17}{38}$　　B. $\frac{27}{38}$

C. $\frac{17}{19}$　　D. $\frac{27}{19}$

5. 如果 ξ 是一个离散型随机变量,那么下列命题中为假命题的是(　　)

A. ξ 取每个可能值的概率是非负实数;

B. ξ 取所有可能值的概率之和为 1;

C. ξ 取某 2 个可能值的概率等于分别取其中每个值的概率之和;

D. ξ 在某一范围内取值的概率大于它取这个范围内各个值的概率之和.

6. 若 $\xi \sim B(5, 0.1)$，那么 $P(\xi \leqslant 2)$ 等于（　　）

A. 0.0729　　B. 0.00856

C. 0.91854　　D. 0.99144

7. 在三次独立重复试验中，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

8. 袋中有红、黄、蓝球各一个，从中有放回地每次任取一个，直到取到红球为止，则第 4 次首次取到红球的概率为________.

9. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{c}{k(k+1)}$，$k=1,2,3$，$c$ 为常数，则 $P(0.5<\xi<2.5)=$________.

10. 设随机变量 $\xi \sim B(2, p)$，$\eta \sim B(4, p)$，若 $P(\xi \geqslant 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(\eta \geqslant 1)=$________.

发展思维训练

11. 将 3 个小球任意地放入 4 个盒子中去，盒子中的球的最多个数记为 ξ，求 ξ 的分布列.

12. 已知随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

分别求出随机变量 $\eta_1=\frac{1}{2}\xi$，$\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

13. 有一批数量很大的螺钉，其次品率为 1%，任取 200 只螺钉，求其中至少有 5 只次品的概率.

1.2　离散型随机变量的期望与方差

知能转化导引

1. 期望与方差

若离散型随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ξ 的数学期望,简称期望. 称 $D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n+\cdots$ 为随机变量 ξ 的均方差,简称方差. 称 $D\xi$ 的算术平方根 $\sqrt{D\xi}$ 为随机变量 ξ 的标准差,记作 $\sigma\xi$.

2. 期望与方差的学习要求

(1) 了解离散型随机变量的期望和方差的概念与意义,了解随机变量的标准差的定义.

(2) 掌握离散型随机变量的期望和方差的计算公式与运算性质,能根据离散型随机变量的分布列求出期望与方差.

$E(a\xi+b)=aE\xi+b$, $\qquad D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

(3) 掌握二项分布的期望与方差:若 $\xi\sim B(n,p)$,则 $E\xi=np$, $D\xi=np(1-p)$

(4) 能用离散型随机变量的期望和方差解决一些实际问题.

方法技巧规律

1. 弄清期望与分布列的关系. 期望的概念是建立在分布列的基础之上的,分布列中随机变量 ξ 的一切可能值 x_i 与对应的概率 $P(\xi=x_i)$ 的乘积之和就是 ξ 的数学期望.

2. 正确理解期望的意义,假设进行了 n 次随机试验,根据 ξ 的分布列,在 n 次试验中,p_in 次出现了 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,这样,在 n 次试验中,ξ 出现的总次数为 $p_1nx_1+p_2nx_2+\cdots+p_nnx_n$. 从而,$n$ 次试验中 ξ 出现的平均次数等于 $\dfrac{(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\cdot n}{n}=E\xi$.

3. 善于用随机变量函数的期望与方差,二项分布的期望与方差解决相关问题.

4. 理解方差,标准差的意义. 随机变量 ξ 方差的意义在于描述随机变量稳定与波动或集中与分散的状况. 标准差 $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$ 则体现随机变量取值与其期望值的偏差.

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

试求 $E\xi$，$D\xi$.

学点　求离散型随机变量的期望与方差，首先应明确随机变量的分布列，若分布列中的概率是待定常数时，应先按分布列的性质求出这些待定常数，再求其期望与方差.

解　由离散型随机变量的分布列的性质得

$$\begin{cases}0\leqslant 1-2q\leqslant 1\\ q^2\leqslant 1\\ \frac{1}{2}+(1-2q)+q^2=1\end{cases}\Rightarrow q=1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 ξ 的分布列应为：

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$

所以 $E\xi=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times(\sqrt{2}-1)+1\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=1-\sqrt{2}$，

$$D\xi=\left[-1-(1-\sqrt{2})\right]^2\times\frac{1}{2}+(1-\sqrt{2})^2\times(\sqrt{2}-1)+\left[1-(1-\sqrt{2})\right]^2\times\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}-1.$$

易错点　应防止机械地套用期望与方差的计算公式，

即 $E\xi=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times(1-2q)+1\times q^2=q^2-\frac{1}{2}$，

$$D\xi=\left[-1-\left(q^2-\frac{1}{2}\right)\right]^2\times\frac{1}{2}+\left(q^2-\frac{1}{2}\right)^2\times(1-2q)+\left[1-\left(q^2-\frac{1}{2}\right)\right]^2\times q^2.$$

这显然是由于忽略了随机变量分布列的性质所出现的误解.

同类变式　一袋中有 6 只球，编号为 1，2，3，4，5，6，在袋中同时取 3 只，求三只球中的最大号码 ξ 的数学期望.

解　ξ 的值为 3，4，5，6，$P(\xi=k)=\frac{C_{k-1}^2}{C_6^3}$，$k=3,4,5,6$.

因此，ξ 的分布列为：

ξ	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

$E\xi=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{3}{20}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{2}=5.25$.

思维延伸 每人在一轮投篮练习中最多可投篮 4 次,现规定一旦命中即停止该轮练习,否则一直试投到 4 次为止.已知一选手的投篮命中率为 0.7,求一轮练习中该选手的实际投篮次数 ξ 的分布列,并求出 ξ 的期望 $E\xi$ 与方差 $D\xi$(保留 3 位有效数字).

解 ξ 的取值为 1,2,3,4,

$\xi=1$,表示第一次即投中,故 $P(\xi=1)=0.7$;

$\xi=2$,表示第一次未投中,第二次投中,故

$P(\xi=2)=(1-0.7)\times0.7=0.21$;

$\xi=3$,表示第一、二次未投中,第三次投中,

故 $P(\xi=3)=(1-0.7)^2\times0.7=0.063$;

$\xi=4$,表示第一、二、三次未投中,

故 $P(\xi=4)=(1-0.7)^3=0.027$.

所以 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	0.7	0.21	0.063	0.027

$E\xi=1\times0.7+2\times0.21+3\times0.063+4\times0.027=1.417$,

$D\xi=(1-1.417)^2\times0.7+(2-1.417)^2\times0.21+(3-1.417)^3\times0.063+(4-1.417)^2\times0.027=0.531$.

【例 2】 (1) 设随机变量 ξ 具有分布列为 $P(\xi=k)=\frac{1}{6}$,($k=1,2,3,4,5,6$),求 $E\xi$ 和 $E(2\xi+3)$.

(2) 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{1}{n}$,($k=1,2,\cdots,n$),求 $E\xi$ 和 $D\xi$.

学点 利用离散型随机变量的期望与方差的概念与性质解题.

解 (1) $E\xi=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=3.5$,

$E(2\xi+3)=2E\xi+3=2\times3.5+3=10$.

(2) $E\xi=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}$,

$D\xi=\left[\frac{1}{n}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\right]-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}(n^2-1)$.

技巧点　本题求 $E(2\xi+3)$、$D\xi$,应充分利用期望与方差的有关性质,以避免繁杂的运算过程,另外利用公式 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$ 计算也是简化运算的有效途径之一.

同类变式　一次数学测验由 25 道选择题构成,每个选择题有 4 个选项,其中有且仅有一个选项是正确的,每题选择正确得 4 分,不作出选择或选错的不得分,满分 100 分,某学生选对任一题的概率为 0.8,求此学生在这一次测验中成绩的期望和方差.

解　用 ξ 表示这个学生在这次测验中选择了正确答案的个数,η 表示成绩,则 $\xi\sim B(25,0.8)$,故

$E\xi=25\times0.8=20$,　　$D\xi=25\times0.8\times0.2=4$,

$E\eta=E(4\xi)=4E\xi=4\times20=80$,

$D\eta=D(4\xi)=16D\xi=16\times4=64$.

即此学生在这一次测验中的成绩的期望和方差分别是 80 和 64.

思维延伸　一个口袋中放有若干个球,每个球上标有 $1\sim n$ 中间的一个整数,设标有数 k 的球有 k 个,现从中任取一球,ξ 为取的球上所标数字,求 ξ 的分布列、$E\xi$ 及 $D\xi$.

解　共有 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$个球,取到 k 号球的概率为

$P(\xi=k)=\frac{2k}{n(n+1)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$,此即为 ξ 的分布列;

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3};$$

$$E\xi^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{2k}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{n(n+1)}{2}-\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2=\frac{n^2+n-2}{18}.$$

【例 3】　甲、乙两名射手在一次射击中的得分为两个相互独立的随机变量 ξ 及 η,且 ξ,η 的分布列为:

ξ	10	9	8	7	6	5	0
P	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0

η	10	9	8	7	6	5	0
P	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2

计算 ξ,η 的期望与方差，并以此分析甲、乙的技术优劣.

学点 根据 ξ,η 的分布列，分别求出 $E\xi$、$E\eta$，$D\xi$、$D\eta$，再分别比较 $E\xi$、$E\eta$ 和 $D\xi$、$D\eta$ 的大小，进而分析甲、乙两名射手的技术优劣.

解 依题意有

$$E\xi=10\times0.5+9\times0.2+8\times0.1+7\times0.1+6\times0.05+5\times0.05+0\times0=8.85,$$

$$E\eta=10\times0.1+9\times0.1+8\times0.1+6\times0.2+5\times0.2+0\times0.2=5.6,$$

$$D\xi=(10-8.85)^2\times0.5+(9-8.85)^2\times0.2+(8-8.85)^2\times0.1+(7-8.85)^2\times0.1+(6-8.85)^2\times0.05+(5-8.85)^2\times0.05+(0-8.85)^2\times0=2.2275,$$

$$D\eta=(10-5.6)^2\times0.1+(9-5.6)^2\times0.1+(8-5.6)^2\times0.1+\cdots+(5-5.6)^2\times0.2+(0-5.6)^2\times0.2=10.24.$$

所以 $E\xi>E\eta$，说明甲的平均水平比乙高，又因为 $D\xi<D\eta$，说明甲射中的环数比较集中，比较稳定，而乙射中的环数分散较大，技术波动大，不稳定，所以甲比乙的技术好.

发散点 在实际问题中，若有两个随机变量 ξ,η，且 $E\xi=E\eta$ 或 $E\xi$ 和 $E\eta$ 比较接近时，我们常用 $D\xi$ 与 $D\eta$ 来比较这两个随机变量. 方差值大的，则表明 ξ 较为离散，反之则表明 ξ 较为集中.

同类变式 已知两家工厂，一年四个季度上缴利税如下：

季度	一	二	三	四	季平均值
甲厂	70	50	80	40	60
乙厂	55	65	55	65	60

试分析两厂上缴利税状况，并予以说明.(单位：万元)

提示 设随机变量 ξ 与 η 分别表示甲、乙两厂上缴利税数，依题意有

高三数学

$P(\xi=x_i)=\frac{1}{4}$，$P(\eta=y_i)=\frac{1}{4}(i=1,2,3,4)$，可以得到 $D\xi=250$，$D\eta=25$，故甲厂比乙厂波动大.

思维延伸　一个工人要看管三台机床，在一小时内机床不需要工人照顾的概率对于第一台是 0.9，第二台是 0.8，第三台是 0.85，求在一小时的过程中不需要工人照顾的机床的台数 ξ 的数学期望.

解　$P(\xi=0)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$

$=0.1\times0.2\times0.15=0.003$

$$
\begin{aligned}
P(\xi=1)&=P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)\\
&=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)\\
&=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)\\
&=0.9\times0.2\times0.15+0.1\times0.8\times0.15+0.1\times0.2\times0.85\\
&=0.056
\end{aligned}
$$

依上可得，$P(\xi=2)=P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)=0.329$

$P(\xi=3)=P(ABC)=0.612$

所以 $E\xi=0\times0.003+1\times0.056+2\times0.329+3\times0.612=2.55$.

基础能力训练

1. 人们常用来反映数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的变异特征的量是(　　)

A. 中位数　　B. 众数　　C. 方差　　D. 平均值

2. 下列说法中正确的是(　　)

A. 离散型随机变量 ξ 的期望 $E\xi$ 反映了 ξ 取值的概率的平均值；

B. 离散型随机变量 ξ 的方差 $D\xi$ 反映了 ξ 取值的平均水平；

C. 离散型随机变量 ξ 的期望 $E\xi$ 反映了 ξ 取值的平均水平；

D. 离散型随机变量 ξ 的方差 $D\xi$ 反映了 ξ 取值的概率的平均值.

3. 已知 ξ 的分布列为

ξ	-1	0	1
P	0.5	0.3	0.2

则 $E\xi$ 等于(　　)

A. 0　　B. 0.2　　C. -1　　D. -0.3

4. 已知 ξ 的分布列为