图书在版编目(CIP)数据

国际国内最新高中数学竞赛优秀试卷精选详解/ 河海大学出版社素质教育编写组编. —南京：河海大学出版社，2004.3

ISBN 7 - 5630 - 1981 - 2

Ⅰ.国…　Ⅱ.河…　Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 017656 号

书　　名 / 国际国内最新高中数学竞赛优秀试卷精选详解
书　　号 / ISBN 7 - 5630 - 1981 - 2/G·520
责任编辑 / 唐　宋
封面设计 / 步江华
出　　版 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编：210098)
电　　话 / (025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)
印　　刷 / 河海大学印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米　1/32　12 印张　480 千字
版　　次 / 2004 年 3 月第 1 版　2004 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 14.80 元(册)

编者的话

全国中小学生各学科奥林匹克竞赛是当前我国在青少年中开展素质教育的最高层次的学科知识竞赛。它不仅注重能力的考核、学习思想方法的培养，而且重视智力的开发、思维的开拓，反映了各学科发展的最新趋势，全方位地与世界中学生奥林匹克竞赛紧密接轨；它所提供的各种新信息极大地丰富了各学科的教学内容，调动了广大学生对各学科知识学习的积极性，有力地促进了我国当前素质教育的开展和教学改革的深入，对中小学教学工作产生了广泛而又深远的的影响。

鉴于广大中小学教师和学生研究和参与奥林匹克竞赛的积极性日益高涨，我们编写了这套丛书，旨在通过这套丛书能给广大中小学教师和学生提供一份较为优秀的竞赛辅导材料，从而进一步推动相关教研工作和竞赛活动的开展。本套丛书收录有近年全国各省、市中小学各科奥林匹克竞赛试题，并附有详尽的解答过程。它与竞赛紧密接轨，不仅展现了最新的竞赛动态，而且尤为注重赛点与能力的延伸，并保证内容最新、信息量最大、涵盖的竞赛种类和区域最广。本丛书的各个分册均由各地知名奥林匹克竞赛金牌教练亲自

演练、解答，担任主审工作，确保了本丛书的内在质量。

本丛书在编辑过程中，得到了有关竞赛组织者和试卷所有者的大力支持，在此，我们表示衷心的感谢！但有少数试卷因事先无法与其所有者取得联系，而这些试卷又确实很有意义，故予以收录，希望这些试卷所有者能够与我们取得联系，以便我们致以诚挚的谢意。

由于时间仓促，各种竞赛试卷面广量大，疏漏和错误之处在所难免，恳请广大读者及时指正，以便再版时修订。

2004 年 3 月

目　录

1999 年第 40 届 IMO 试题

1. 确定平面上所有至少包含三个点的有限点集 S，它们满足下述条件：
对于 S 中任意两个互不相同的点 A 和 B，线段 AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴.

2. 设 n 是一固定的整数，$n \geqslant 2$.
（1）确定最小常数 c，使得不等式 $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant c \left(\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4$ 对所有的非负实数 $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$ 都成立；
（2）对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件.

3. 设 n 是一个固定的正偶数，考虑一块 $n \times n$ 的正方板，它被分成 n^2 个单位正方格. 板上两个不同的正方格如果有一条公共边，就称它们为相邻的. 将板上 N 个单位正方格作上标记，使得板上的任意正方格（作上标记的或者没有作上标记的）都与至少一个作上标记的正方格相邻. 确定 N 的最小值.

4. 确定所有的正整数对(n, p)，满足：p 是一个质数，$n \leqslant 2p$，且$(p-1)^n+1$ 能够被 n^{p-1} 整除.

5. 两个圆 Γ_1 和 Γ_2 被包含在圆 Γ 内，且分别与圆 Γ 相切于两个不同的点 M 和 N. Γ_1 经过 Γ_2 的圆心，经过 Γ_1 和 Γ_2 的两个交点的直线与 Γ 相交于点 A 和 B. 直线 MA 和 MB 分别与 Γ_1 相交于 C 点和 D 点.
证明：CD 与 Γ_2 相切.

6. 确定所有的函数 f：$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，其中 $\mathbf{R}$ 是实数集，使得对任意 $x, y \in \mathbf{R}$，恒有
$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$
成立.

2000 年第 41 届 IMO 试题

1. 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N. 设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线. l 与圆 Γ_1 相切于点 A,与圆 Γ_2 相切于点 B. 设经过点 M,且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C,与圆 Γ_2 还相交于点 D. 直线 CA 和 DB 相交于点 E,直线 AN 和 CD 相交于点 P,直线 BN 和 CD 相交于点 Q.
证明:$EP=EQ$.

2. 设 a, b, c 是正实数,且满足 $abc=1$. 证明:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1.$$

3. 设 $n\geqslant 2$ 为正整数. 开始时,在一条直线上有 n 只跳蚤,且它们不全在同一点. 对任意给定的一个正实数 λ,可以定义如下的一种"移动":
(ⅰ) 选取任意两只跳蚤,设它们分别位于点 A 和 B,且 A 位于 B 的左边;
(ⅱ) 令位于点 A 的跳蚤跳到该直线上位于点 B 右边的点 C,使得$\frac{BC}{AB}=\lambda$. 试确定所有可能的正实数 λ,使得对于直线上任意给定的点 M 以及这 n 只跳蚤的任意初始位置,总能够经过有限多个移动之后令所有的跳蚤都位于 M 的右边.

4. 一位魔术师有一百张卡片,分别写有数字 1 到 100. 他把这一百张卡片放入三个盒子里,一个盒子是红色的,一个是白色的,一个是蓝色的. 每个盒子里至少都放入了一张卡片.
一位观众从三个盒子中挑出两个,再从这两个盒子里各选取一张卡片,然后宣布这两张卡片上的数字之和. 知道这个和之后,魔术师便能够指出哪一个是没有从中选取卡片的盒子.
问共有多少种放卡片的方法,使得这个魔术总能够成功?(两种方法被认为是不同的,如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子)

5. 确定是否存在满足下列条件的正整数 n:
n 恰好能够被 2000 个互不相同的质数整除,且 2^n+1 能够被 n 整除.

6. 设 AH_1、BH_2、CH_3 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线. $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC、CA、AB 分别相切于点 T_1、T_2、T_3. 设直线 l_1、l_2、l_3 分别是直线 H_2H_3、H_3H_1、H_1H_2 关于直线 T_2T_3、T_3T_1、T_1T_2 的对称直线.
证明:l_1、l_2、l_3 所确定的三角形,其顶点都在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

2001 年第 42 届 IMO 试题

1. 设锐角$\triangle ABC$的外心为O，从A作BC的高，垂足为P，且$\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30^\circ$. 证明：$\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

2. 对所有正实数a，b，c，证明：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

3. 21 个女孩和 21 个男孩参加一次数学竞赛.

(ⅰ) 每一个参赛者至多解出了 6 道题；

(ⅱ) 对于每一个女孩和每一个男孩，至少有一道题被这一对孩子都解出.

证明：有一道题，至少有 3 个女孩和至少有 3 个男孩都解出.

4. **设** n **为奇数,且大于** 1,k_1, k_2, $\cdots$,k_n **为给定的整数,对于** $1,2,\cdots,n$ **的** $n!$ **个排列中的每一个排列** $a=(a_1, a_2,\cdots, a_n)$,**记** $S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i$.

证明:有两个排列 b **和** c,$b\neq c$,**使得** $S(b)-S(c)$**能被** $n!$ **整除.**

5. **在**$\triangle ABC$ **中,**AP **平分**$\angle BAC$,**交** BC **于** P,BQ **平分**$\angle ABC$,**交** CA **于** Q. **已知**$\angle BAC=60°$,**且** $AB+BP=AQ+QB$. **问**$\triangle ABC$ **各角的度数的可能值是多少?**

6. **设** a, b, c, d **为整数,**$a>b>c>d>0$,**且** $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$.

证明:$ab+cd$ **不是素数.**

2002 年第 43 届 IMO 试题

1. 设 n 为任意给定的正整数，T 为平面上所有满足 $x+y<n$，x，y 为非负整数的点 (x,y) 所组成的集合，T 中每一点 (x,y) 均被染上红色或蓝色，满足：若 (x,y) 是红色，则 T 中所有满足 $x'\leqslant x$，$y'\leqslant y$ 的点 (x',y') 均为红色，如果 n 个蓝点的横坐标各不相同，则称这 n 个蓝点所组成的集合为一个 X-集；如果 n 个蓝点纵坐标各不相同，则称这 n 个蓝点所组成的集合为一个 Y-集.
   证明：X-集的个数和 Y-集的个数一样多.

2. BC 为圆 Γ 的直径，Γ 的圆心为 O，A 为 Γ 上的一点，$0^\circ<\angle AOB<120^\circ$，$D$ 是弧 AB（不含 C 的弧）的中点，过 O 平行于 DA 的直径交 AC 于 I，OA 的垂直平分线交 Γ 于 E、F.
   证明：I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

3. 找出所有的正整数对 (m,n)，m、$n\geqslant 3$，使得存在无穷多个正整数 a，有 $\dfrac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ 为整数.

4. **设** n **为大于** 1 **的整数，全部正因数为** d_1，d_2，…，d_k，**其中** $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$，**记** $D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$.

(1) **证明**：$D<n^2$；

(2) **确定所有的** n，**使得** D **能整除** n^2.

5. **找出所有从实数集** $\mathbf{R}$ **到** $\mathbf{R}$ **的函数** f：**使得对所有** $x, y, z, t\in\mathbf{R}$，**有**

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz).$$

6. **设** $n\geqslant 3$ **为整数**，Γ_1、Γ_2、Γ_3、…、Γ_n **为平面上半径为** 1 **的圆，圆心分别为** O_1、O_2、O_3、…、O_n. **假设任一直线至多和两个圆相交或相切，证明**：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{O_iO_j}\leqslant\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

2003 年第 44 届 IMO 试题

1. 设 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$，A 为 S 的一个恰包含 101 个元素的子集合. 证明：在 S 中存在数 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$，使得下列集合 $A_j=\{x+t_j \mid x\in A\}$，$j=1,2,\cdots,100$ 中的任意两个都不相交.

2. 求所有的正整数对 (a,b)，使得 $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ 为正整数.

3. 给定一个凸六边形，其中的每一组对边都具有如下性质：这两条边的中点之间的距离等于它们的长度之和的 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍. 证明：该六边形的所有内角相等.（一个凸六边形 $ABCDEF$ 共有三组对边：AB 和 DE；BC 和 EF；CD 和 FA）

4. 设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形. 从点 D 向直线 BC、CA 和 AB 作垂线,其垂足分别为 P、Q 和 R. 证明:$PQ=QR$ 的充分必要条件是 $\angle ABC$ 的平分线、$\angle ADC$ 的平分线和 AC 这三条直线相交于一点.

5. 设 n 为正整数,实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.

(a) 证明:$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\dfrac{2(n^2-1)}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$.

(b) 证明:上式等号成立的充分必要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为等差数列.

6. 设 p 为质数. 证明:存在质数 q,使得对任意整数 n,数 n^p-p 都不能被 q 整除.

1999 年第 40 届 IMO 中国队选拔赛试题

第一天

一、对于满足条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求 $\sum_{j=1}^{n}(x_j^4-x_j^5)$ 的最大值.

二、试求满足以下条件的全部质数 p：

对任一质数 $q<p$，若 $p=kq+r, 0\leqslant r<q$，则不存在大于 1 的整数 a，使得 a^2 整除 r.

三、设 $S=\{1,2,\cdots,15\}$. 从 S 中取出 n 个子集 A_1、A_2、…、A_n，满足下列条件：

（ⅰ）$|A_i|=7, i=1, 2, \cdots, n$；

（ⅱ）$|A_i\cap A_j|\leqslant 3, 1\leqslant i<j\leqslant n$；

（ⅲ）对 S 的任何三元子集 M，存在某个 A_k，使得 $M\subsetneqq A_k$.

求这样一组子集个数 n 的最小值.

第 二 天

四、某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点，与对角线 AC 相交于 F、E 两点. 问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件，使得存在另一圆过 E、F 两点，且分别与 DA、DC 的延长线相切？证明你的结论.

五、给定正整数 $m\geqslant 12$. 试证：

（1）存在整数 $x_1,\cdots,x_{2m}$，使得 $x_i x_{m+i}=x_{i+1}x_{m+i-1}+1$，$i=1,2,\cdots,m$； （*）

（2）对任何适合条件（*）的整数组 $x_1,\cdots,x_{2m}$，可构造出满足 $y_k y_{m+k}=y_{k+1}y_{m+k-1}+1$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$ 的整数序列……$y_{-k},\cdots,y_{-1},y_0,\cdots,y_k$……使得 $y_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,2m$.

六、对于 $1,2,\cdots,10$ 的每一排列 $\tau=(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$，定义

$$S(\tau)=\sum_{k=1}^{10}|2x_k-3x_{k+1}|,$$ 约定 $x_{11}=x_1$. 试求：

（1）$S(\tau)$ 的最大值与最小值；

（2）使 $S(\tau)$ 达到最大值的所有排列 τ 的个数；

（3）使 $S(\tau)$ 达到最小值的所有排列 τ 的个数.