科學前沿丛书

孤立子理论中的达布变换及其几何应用

（第二版）

谷超豪　胡和生　周子翔　著

上 海 科 学 技 术 出 版 社

内 容 提 要

本书系统介绍了孤立子理论中的 Darboux 变换方法及其在微分几何中的应用，所介绍的内容大部分是三位作者近年来的研究成果. 书中的第 1、2、3 章分别叙述了 $1+1$ 维、$1+2$ 维和高维 Darboux 变换的一般理论和许多具体的例子，第 4、5 两章叙述 Darboux 变换在微分几何中的曲面论和调和映照中的应用. 本书的中心是对具有 Lax 对的非线性偏微分方程给出显式的(通常是纯代数的)、一般的求解方法. 本书只假定读者具有大学数学系本科的分析、代数和几何的基础，为了读者阅读方便，第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统，使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容. 本书可作为研究生的教材，也可供高等学校数学系和物理系研究生及有关的科研人员参考.

出版说明

科学技术是第一生产力.21 世纪,科学技术和生产力必将发生新的革命性突破.

为贯彻落实‘科教兴国’和‘科教兴市”战略,上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于 2000 年设立‘上海科技专著出版资金”,资助优秀科技著作在上海出版.

本书出版受‘上海科技专著出版资金”资助.

上海科技专著出版资金管理委员会

《科學前沿丛书》序

人类文明发展的长河正浩浩荡荡地流向又一个千年，在世界格局的综合国力竞争中，基础研究的发展水平已经成为一个民族的智慧、能力和国家科学技术进步的基本标志之一.

基础研究是人类对未知世界的探求，它在各门学科的前沿上展开，以认识客观世界的物质结构、各种基本运动形态和运动规律为己任，它的重大发现常常带来社会生产的革命性变化.

基础研究在科学前沿向未知领域迈进的每一步，都有赖于创新，创新是基础研究的灵魂，而创新需要很高水平的理论思维. 正如 19 世纪的一位伟人所说，一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维.

自然科学的理论来自关于自然现象和探索实践认识的总结. 这种总结通过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的过程，实现关于自然规律认识的飞跃，在人类认识自然的知识体系上编织出新的结点. 这样的结点往往又是在新的高度编织下一个结点的支撑点. 一个民族想要攀登到科学的最高峰，进行高水平的理论思维，既需要一批批科学家不懈地在科学前沿上探索，也需要他们不断地进行这种实现认识上飞跃的总结.

著书立说，对一个专题或一个领域的研究成果，进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的总结，使之系统化、理论化，是提高理论思维水平和持续创新能力的必须. 在攀登科学高峰的历程中，一部好的基础科学学术著作常常能为众多继续向上攀登的人们提供一块坚实的平台. 因

此，出版好基础性研究领域的学术著作，是一件十分有意义的工作.

《科学》杂志的编者和出版者，自 1915 年《科学》创刊以来，始终以传播科学为己任，在办好刊物的同时，积极地参与出版科学著作这件有意义的工作. 在 20 世纪的最后五年，《科学》的出版者——上海科学技术出版社推出了一套《科学专著丛书》，出版了 14 部专著，受到了科学界和出版界的欢迎和好评.

我高兴地看到，在迎来 21 世纪之时，作为上述努力的继续，该社又推出这套《科学前沿丛书》，着重于从基础性研究的前沿交叉领域选题，出版学术著作. 我期望，这套丛书的编者、作者和出版者能通力合作，通过自己的辛勤劳动，以一部部精心选题、精心著述、精心编辑、精心出版的著作，参与铺筑通向中国科学再度辉煌的大道！

周光召

（《科学》杂志编委会主编）

2001 年元旦

本　书　序

孤立子理论是非线性科学的一个重要方向，它既反映一类非常稳定的自然现象，例如江河中的某一类水波、光纤中的光信号传播等等，体现了一大类非线性相互作用的若干特征，并为许多应用问题（如光孤子通讯）提供了启示. 另一方面，这一理论又为非线性偏微分方程提供了求显式解的方法，因而受到物理学界和数学界的充分重视.

非线性偏微分方程的求解是各门科学中都会遇到的问题，难度很大，一般说来，只有在非常特殊的情况下，才可能求得有显式表达式的准确解. 但出人意料，对于许多孤立子方程，已有多种显式求解的方法，其中最常见的有反散射方法和 Bäcklund 变换等. 前者利用非线性偏微分方程的 Lax 对和常微分方程的谱理论，把 Cauchy 问题化为求解线性积分方程，在退化核的情况下，能给出显式的解. 后者是以已知解为种子，导出一个完全可积的偏微分方程组，从而给出一个新解. 在具体实施中，还可利用多个有一定关系的已知解给出一个新解的显式表达式，称为"非线性迭加公式".

但是，当积分方程的核非退化时，解的显式表达式是很难得出的，非线性迭加公式也只是在相当特殊情形才能出现. 到 70 年代后期，人们又注意到，Darboux（达布）在一个世纪以前所提供的处理二阶常微分方程谱问题的一个方法对于非线性偏微分方程的显式求解有很重要的作用，从而该方法在孤立子和可积系统理论的研究中，越来越为人们所注意，并得到迅速发展，这便是 Darboux 变换法. 关于 Darboux 变换的前期工作，可见文献[57].

本书的目的是想进一步阐述 Darboux 变换，并介绍其几何应用. 主要内容有：

一、将 Darboux 变换用矩阵形式表述，从而可以说明 Darboux 变换实质上就是带谱参数的规范变换，并且给予 Bäcklund 变换以显式的形式.

二、用普适的、纯代数的算法构作 Darboux 阵.

三、把 Darboux 变换推广到 2 个和多个空间变量的情形，构作了具有弹性散射性质的高维时空的孤立子，包括完全局域化的孤立子. 对 2 个空间变量的情况，还构作了微分算子形式的 Darboux 算子，对高维时空的情况，提出了广义的自对偶杨-Mills 流这一更为广泛的可积系统.

四、把 Darboux 变换应用于一系列的几何问题，得到显式的和普适的解法，阐明了 Lax 对的几何意义. Lax 对不仅是求解微分方程的辅助工具，而且是所要寻求的几何对象. 我们所叙述的几何问题包括：欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 和 Minkowski 空间 $\mathbf{R}^{2,1}$ 的各种类型的 Bäcklund 线汇、常曲率曲面和常平均曲率曲面的构作、射影空间 P^3 中的苏链、$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^{1,1}$ 到各种类型的“球面”和群 $U(N)$ 的调和映照以及酉子解的纯代数算法构作等.

本书的第 1、2、3 章叙述 Darboux 变换的一般理论和某些有代表性的具体的例子，第 4、5 章叙述 Darboux 变换对曲面论及调和映照的应用. 本书只假定读者具有大学数学系本科的数学分析、代数和几何的基础知识，为了读者阅读方便，我们使第 4、5 章尽可能体现独立的叙述系统，使特别对几何有兴趣的读者也可以直接阅读其内容.

本书的主体内容由作者在这一领域中一系列的研究成果所构成，这些研究工作得到了国家攀登计划项目“非线性科学”、国家基础研究 973 项目“非线性科学”、国家自然科学基金会重点项目“整体微分几何和物理应用”、国家自然科学基金会青年基金、教育部博士点基金、跨世纪优秀人才基金、上海市科委、教委科研基金的支持，是在教育部复旦大学非线性数学模型和方法开放实验室、复旦大学数学研究所中完成的.

作者感谢上海科学技术出版社为出版本书所作的努力.

作　者

1998 年 7 月于复旦大学

再 版 小 记

本版对初版的内容作了若干修订,主要是对 Minkowski 空间补充了类时的伪球线汇和类时正常曲率空间的主曲率为虚的情形,又对酉子解的 Darboux 变换性质作了较为仔细的说明,改正了一些疏漏之处.

作　者

2004 年 4 月于复旦大学

目　　录

第1章　1+1维可积系统

本章从最原始的 Darboux(达布)变换开始,叙述 KdV 方程、MKdV 方程的 Darboux 变换的经典形式,然后就转向于 AKNS 系统(及其扩充)的 Darboux 变换,它的作法具有很高的普适性. 同一般文献中所讨论的不一样,这里所讨论的可以是系数和 t 有关的偏微分方程. 我们所介绍的 Darboux 阵可用纯代数的算法构作而成,并且对这种系统中的任何方程都是统一的. 本章中还讨论化约系统的 Darboux 变换以及 Darboux 变换与反散射方法的关系等,说明在未知函数的反散射数据表示下,Darboux 变换实际上是添加或减少一个解中所含的孤立子(离散谱).

§1.1　KdV 方程、MKdV 方程及其 Darboux 变换

1.1.1　原始的 Darboux 变换

1882 年,G. Darboux[13] 研究了一个二阶线性常微分方程(现在称之为一维 Schrödinger 方程)的特征值问题*)

$$-\phi_{xx}-u(x)\phi=\lambda\phi, \tag{1.1}$$

式中 $u(x)$是给定的函数,称为势函数,λ 是常数,称为谱参数. Darboux 发现了下面的事实:设 $u(x)$和 $\phi(x,\lambda)$是满足(1.1)式的两个函数,对任意给定的常数 λ_0,令 $f(x)=\phi(x,\lambda_0)$,即 f 是(1.1)式当 $\lambda=\lambda_0$ 时的一个解,则由

---

*) 在本书中常用关于 x,t 等的下标来记偏导数,并假设一切遇到的函数在其定义域内均为连续的,而且可微分到所需要的阶次.

$$\begin{aligned} u' &= u + 2(\ln f)_{xx}, \\ \phi'(x, \lambda) &= \phi_x(x, \lambda) - \frac{f_x}{f}\phi(x, \lambda) \end{aligned} \tag{1.2}$$

所定义的函数 u', ϕ' 一定满足和(1.1)式同样形式的方程

$$-\phi'_{xx} - u'\phi' = \lambda\phi'. \tag{1.3}$$

这样,这个借助于特解 $f(x) = \phi(x, \lambda_0)$ 所作的变换(1.2)式将满足(1.1)式的一组函数(u, ϕ)变化为满足同一方程的另一组函数(u', ϕ'),这就是最原始的 Darboux 变换

$$(u, \phi) \longrightarrow (u', \phi'), \tag{1.4}$$

在 $f \neq 0$ 处它是有效的.

1.1.2 KdV 方程的 Darboux 变换

1885 年,荷兰的应用数学家 Korteweg 和 de Vries 导出了一个水波运动的非线性偏微分方程,现称为 Korteweg-de Vries 方程(KdV 方程). 20 世纪 60 年代中,人们[66]发现 KdV 方程与上述 Schrödinger 方程有着密切的联系. 具体说来,KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

是关于 ϕ 的线性方程组

$$\begin{cases} -\phi_{xx} - u\phi = \lambda\phi \\ \phi_t = -4\phi_{xxx} - 6u\phi_x - 3u_x\phi \end{cases} \tag{1.6}$$

(称为 KdV 方程的 Lax 对)的可积条件,这时 u 和 ϕ 都应看成 x 和 t 的函数,这里可积条件的意义是:由(1.6)式的第一式得出 $\phi_{xx} = (-\lambda - u)\phi$,然后计算$(\phi_{xx})_t$,又由(1.6)式的第二式中计算$(\phi_t)_{xx}$,两者相等(对任何$\lambda$)的充要条件是 u 满足 KdV 方程(1.5)式.

进一步的研究[77]发现 Darboux 变换(1.2)式也适用于 KdV 方程,这个变换中的函数(u, ϕ)还依赖于 t,且满足(1.6)式,这个变换不但保持(1.6)式中第一式的形式不变,即

$$-\phi'_{xx} - u'\phi' = \lambda\phi' \tag{1.7}$$

成立，而且(u', ϕ')还满足(1.6)式的第二式，因而u'满足(1.6)式的可积条件，即u'也是 KdV 方程的解. 这样，如果已知 KdV 方程的一个解 u，通过解线性方程组(1.6)式得到$\phi(x, t, \lambda)$. 取λ的一个值λ_0得到$f(x, t) = \phi(x, t, \lambda_0)$，$u' = u + 2(\ln f)_{xx}$ 就给出 KdV 方程的一个新的解，而(1.2)式给出的ϕ'则为u'相应的 Lax 对的解. 这就为作 KdV 方程的新解提供了非常好的方法. 上述这些事项可以通过初等的运算进行验证. 在后文中，会有更一般的方法来得到很普遍的结果.

为了从 KdV 方程的一个已知解 u 得到它的新解 u'，现在只需要解线性方程组(1.6)式得出ϕ，然后通过显式运算(1.2)式就可以得到 KdV 方程的大量特解. 不但如此，这个变换还可以继续进行下去，因为ϕ'也已经具备，这时就不再需要解线性方程组(1.6)式，而由显式的算法可得出(u'', ϕ'')等等：

$$(u, \phi) \longrightarrow (u', \phi') \longrightarrow (u'', \phi'') \longrightarrow \cdots.$$

这样，就把 Schrödinger 方程的 Darboux 变换推广为 KdV 方程的 Darboux 变换. 应该指出，它的基本思路是：利用非线性方程的一个解及其 Lax 对的解，用代数算法及微分运算来得出非线性方程的新解和 Lax 对相应的解. 还应该指出，(1.2)式只在 $f \neq 0$ 时有效，如遇到 $f = 0$，Darboux 变换会产生奇性.

注 1.1　如令$\psi_1 = \phi$，$\psi_2 = \phi_x$，$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$，那么 Lax 对(1.6)式可写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - u & 0 \end{pmatrix} \Psi, \\ \Psi_t &= \begin{pmatrix} u_x & 4\lambda - 2u \\ -4\lambda^2 - 2\lambda u + u_{xx} + 2u^2 & -u_x \end{pmatrix} \Psi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

也可以把(1.2)式改写成关于 Ψ 的变换式. 在后文中会进一步讨论这种矩阵形式的 Darboux 变换.

1.1.3　MKdV 方程的 Darboux 变换

Darboux 变换方法可推广到其他许许多多的方程，如 MKdV 方程、

sine-Gordon 方程等[76]．下面先以 MKdV 方程为例讨论此问题，在以后各节中再讨论更一般的问题．

MKdV 方程

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.9}$$

是超定线性方程组

$$\begin{cases} \Phi_x = U\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ -u & -\lambda \end{pmatrix}\Phi \\ \Phi_t = V\Phi \\ \quad = \begin{pmatrix} -4\lambda^3 - 2u^2\lambda & -4u\lambda^2 - 2u_x\lambda - 2u^3 - u_{xx} \\ 4u\lambda^2 - 2u_x\lambda + 2u^3 + u_{xx} & 4\lambda^3 + 2u^2\lambda \end{pmatrix}\Phi \end{cases} \tag{1.10}$$

的可积条件[1,85]，即(1.9)式为使得 $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ 成为恒等式的充要条件．方程组(1.10)式称为(1.9)式的 Lax 对，λ 称为谱参数，Φ 表示一个二元的列向量或 2×2 阵．

MKdV 方程的 Darboux 变换可以有多种导出的方法，现在指出其中的一种，主要是把 Schrödinger 方程(1.1)式适当地‘复化’而导出 MKdV 方程的 Darboux 变换．

记(1.10)式的列向量解 $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$，则(1.10)式的第一式即

$$\begin{aligned} \phi_{1,x} &= \lambda\phi_1 + u\phi_2, \\ \phi_{2,x} &= -u\phi_1 - \lambda\phi_2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

令 $\psi = \phi_1 + \mathrm{i}\,\phi_2$，并设 λ 为实参数，u 为实值函数，那么 ψ 满足

$$\psi_{xx} = \lambda^2\psi - (\mathrm{i}\,u_x + u^2)\psi, \tag{1.12}$$

这是一个复的 Schrödinger 方程，势函数为 $(\mathrm{i}\,u_x + u^2)$．可以直接验证，如果 u 是 MKdV 方程的一个解，那么

$$w = \mathrm{i}\,u_x + u^2$$

是 KdV 方程

$$w_t + 6ww_x + w_{xxx} = 0$$

的一个复值解. 从 MKdV 方程的解 u 到 KdV 方程的解 w 的变换称为 Miura 变换.

注 1.2　如果令 $v = \mathrm{i}\,u$，(1.9)式就写成形式

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \tag{1.9$'$}$$

这时 Miura 变换就成为

$$w = v_x - v^2.$$

如果 v 是(1.9′)式的实值解，那么 w 是 KdV 方程的实值解.

取实数 λ_0 及(1.12)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解 $f = f_1 + \mathrm{i}\,f_2$，这时 $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 是(1.11)式当 $\lambda = \lambda_0$ 时的解，从 KdV 方程的结果知道，作如下的 Darboux 变换：

$$\psi' = \psi_x - (f_x/f)\psi, \quad w' = w + 2(\ln f)_{xx}, \tag{1.13}$$

那么 ψ' 和 w' 满足(1.12)式，w' 满足 KdV 方程，并且可以证明，存在相应的 u' 满足 MKdV 方程. 现在要把 u' 的表达式显式地导出来.

利用(1.11)式，用分量写出来，(1.13)式的第一式就是

$$\phi_1' + \mathrm{i}\,\phi_2' = \lambda\phi_1 - \mathrm{i}\,\lambda\phi_2 - \lambda_0 \frac{\bar{f}}{f}(\phi_1 + \mathrm{i}\,\phi_2). \tag{1.14}$$

如果取 λ，λ_0 为实数，那么 ϕ_1，ϕ_2 也可取为实函数，从而(1.14)式就可写为

$$\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_0 \dfrac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} & -\lambda_0 \dfrac{2f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} \\ \lambda_0 \dfrac{2f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2} & -\lambda - \lambda_0 \dfrac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

通过计算可知 $\begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix}$ 满足形状为

$$\begin{cases} \phi_{1,x}' = \lambda\phi_1' + u'\phi_2' \\ \phi_{2,x}' = -u'\phi_1' - \lambda\phi_2' \end{cases} \tag{1.16}$$

的线性方程组，这里

$$u' = -u - \frac{4\lambda_0 f_1 f_2}{f_1^2 + f_2^2}. \tag{1.17}$$

根据(1.16)式的可积条件,u'是 MKdV 方程的解.

MKdV 方程的两个解 u 和 u'之间的上述变换现在也称为 Darboux 变换.

1.1.4 Darboux 阵

为了将此方法推广到其他大量的非线性偏微分方程的求解,我们将上述关于 Darboux 变换的结果以略为不同的形式重新叙述如下.

对给定的 MKdV 方程的解 u,假设已知道(1.10)式的基本解(即由两个线性独立的列向量解所构成的矩阵,或者说,是(1.10)式的非退化矩阵解)

$$\Phi(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(x,t,\lambda) & \Phi_{12}(x,t,\lambda)\\ \Phi_{21}(x,t,\lambda) & \Phi_{22}(x,t,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

任取实数 λ_1, μ_1,记

$$\sigma=\frac{\Phi_{22}(x,t,\lambda_1)+\mu_1\Phi_{21}(x,t,\lambda_1)}{\Phi_{12}(x,t,\lambda_1)+\mu_1\Phi_{11}(x,t,\lambda_1)} \tag{1.19}$$

为 Lax 对(1.10)式的一个解的两个分量之比(即前面的 f_2/f_1),那么可以构造矩阵

$$D(x,t,\lambda)=\lambda I-\frac{\lambda_1}{1+\sigma^2}\begin{pmatrix}1-\sigma^2 & 2\sigma\\ 2\sigma & \sigma^2-1\end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

令 $\Phi'(x,t,\lambda)=D(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda)$,可以验证 $\Phi'(x,t,\lambda)$ 满足

$$\Phi'_x=U'\Phi',\quad \Phi'_t=V'\Phi', \tag{1.21}$$

其中

$$U'=\begin{pmatrix}\lambda & u'\\ -u' & -\lambda\end{pmatrix},$$

$$V'=\begin{pmatrix}-4\lambda^3-2u'^2\lambda & -4u'\lambda^2-2u'_x\lambda-2u'^3-u'_{xx}\\ 4u'\lambda^2-2u'_x\lambda+2u'^3+u'_{xx} & 4\lambda^3+2u'^2\lambda\end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

$$u'=u+\frac{4\lambda_1\sigma}{1+\sigma^2}. \tag{1.23}$$

(1.21)式、(1.22)式和(1.10)式完全类似,只是(1.10)式中的 u 被换作 u'. 因为对(1.10)式的任意解 Φ, $D\Phi$ 是(1.21)式的解,从而(1.21)式

对任何初值（Φ' 在某一点 (x_0, t_0) 的值）都是可解的. 方程组(1.21)式是完全可积的，故其可积条件成立，即 u' 也是 MKdV 方程的解. 这样，用此方法就可从 MKdV 方程的一个解得到它的一个新解.

注 1.3　(1.20)式给出的矩阵与(1.15)式中出现的矩阵差一个左乘因子 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 注意到如果 (u, ϕ_1, ϕ_2) 满足(1.11)式，则 $(-u, \phi_1, -\phi_2)$ 也满足(1.11)式. 因此由(1.20)式所导出的新解(1.23)式与(1.17)式差一符号. 它们都满足 MKdV 方程. 这时可以采用任一形式作解的变换，这种变换都称为 Darboux 变换.

矩阵 D 有特别重要的意义，它称为 Darboux 阵.

可以概括地说，对给定的 MKdV 方程的解 u 及其相应的 Lax 对的基本解 Φ，取 λ_1，μ_1 为任意两个实常数，设 σ 由(1.19)式所定义，则(1.23)式给出 MKdV 方程的一个新解 u'，并且 Darboux 阵 D 给出 u' 相应的 Lax 对的解 $\Phi' = D\Phi$，而变换 $(u, \Phi) \to (u', \Phi')$ 就是 MKdV 方程的 Darboux 变换. 同 KdV 方程一样，矩阵形式的 Darboux 变换可以用纯代数的算法逐次进行下去：

$$(u, \Phi) \longrightarrow (u', \Phi') \longrightarrow (u'', \Phi'') \longrightarrow \cdots.$$

1.1.5　举例，单孤立子解和双孤立子解

现在看最简单的例子. 取 MKdV 方程的平凡解 $u = 0$ 作为出发点，它所相应的 Lax 对(1.10)式的基本解可取为

$$\Phi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda x - 4\lambda^3 t) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda x + 4\lambda^3 t) \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

由(1.19)式，对常数 $\lambda_1 \neq 0$ 及 $\mu_1 = \exp(2\alpha_1) > 0$，有

$$\sigma = \exp(-2\lambda_1 x + 8\lambda_1^3 t - 2\alpha_1), \tag{1.25}$$

从而

$$D = \lambda I - \frac{\lambda_1}{\cosh v_1} \begin{pmatrix} \sinh v_1 & 1 \\ 1 & -\sinh v_1 \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

其中

$$v_1 = 2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1.$$