国家工科数学课程教学基地建设系列教材
高等数学立体化系列教材

工 科 数 学 分 析

上 册

华南理工大学数学科学学院

洪潮兴　主编

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书是华南理工大学“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”之一。本书在内容的选择上注重培养学生发现问题、分析问题和解决问题的基本思想方法，加强数学分析与其他学科的联系，注重学生建模能力的培养。

本书分上下两册。上册内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学；下册内容包括多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程。每节配有习题，书末附习题答案。

本书可作为高等理工科院校本科教材，也可供工程技术人员、自学者及报考研究生的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(上册)/洪潮兴主编.—广州:华南理工大学出版社，2005.9(2006.8重印)

(国家工科数学课程教学基地建设系列教材　高等数学立体化系列教材)

ISBN 7-5623-2275-9

Ⅰ.工…　Ⅱ.洪…　Ⅲ.数学分析－高等学校－教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第096380号

总 发 行:华南理工大学出版社　(广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640)

营销部电话:020－87113487　87111048(传真)

E-mail:scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn

责任编辑:赵　鑫　张　颖

印 刷 者:广东省农垦总局印刷厂

开　　本:787×960　1/16　印张:21　字数:472千

版　　次:2006年8月第1版第2次印刷

印　　数:2 001～3 000册

定　　价:32.00元

总　　序

自 1995 年以来，华南理工大学数学科学学院（原应用数学系）的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩．“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”的出版，是教学改革成果的重要部分．

21 世纪是经济全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力．大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高特别是创新能力的培养起着越来越重要的作用．

提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务．大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练．为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理．通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学．运算能力的培养是提高数学素质的基础．当然，这三方面综合能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重．

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术．

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验．限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正．本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持，特此表示感谢．

华南理工大学数学科学学院

2004 年 8 月

前　　言

工科数学分析是一门新兴课程，它在全国高校的迅速开设是为了适应科学技术飞速发展和培养高素质人才的需要．大家在取得广泛共识的基础上，采取了共同的教学改革措施，即对工科大学学生多进行一些数学素质方面的培养，在原高等数学课程中增加一些数学分析内容．于是，工科数学分析课程便应运而生．

将部分数学分析内容融入高等数学课程中的探索与实践由来已久．就我校（华南理工大学）而言，早在 1962 年，在当时学校主管教学的领导的亲自主持与指导下，成立了工科学生数学分析研讨班．从此以后，我校在这方面的探索与实践就不断地进行着．特别是 1985 年以来，我校先后建立了各种类型的联合班，开展加强综合素质培养的各种改革尝试．工科数学分析面临的最大困难就是教材问题，解决教材问题成了改革能否顺利进行的关键．

解决工科数学分析教材问题最值得共同商榷的问题就是它应在原高等数学基础上加入哪些内容？这方面，全国许多同仁进行过各种探索和实践，我们对这些探索者表示崇高的敬意并认真吸取这些探索经验与实践成果．对此，我们希望努力做到如下几点：

1．精选内容．一方面，我们认为既然是工科数学分析课程，故只从数学分析中选取补充内容；另一方面，我们不拟纠缠在“是不是每个定理都要证明”，而是着眼于数学分析那种发现问题、分析问题、解决问题的基本思想方法．这些基本思想方法通常有：细分细想，特别是二分法的思想；线性化的思想；夹逼的思想；临界的思想；从特殊发掘蕴涵在其中的普遍性的思想；从局部到全局的思想；量变质变对立统一的思想等等．

2．从培养工作能力和创新精神来处理“数学解题技巧”．最近，“淡化技巧”的说法很多，其实，许多数学解题技巧具有极强的仿真性．这些当前的“技巧”，其实就是学生今后的工作“技巧”、“管理技巧”、科研“技巧”．这些技巧不但不应该淡化而且应该加强．

3．注意加强数学分析知识与其他课程知识的联系：概念上融汇贯通，方法上互相配合．当然，面对一年级新入学的学生，对其他课程了解较少，能

较好结合的主要是物理学（模型方面）及线性代数（方法方面），但也尽可能为在其他课程中的应用做准备.

4. 注意建模能力的培养. 这一方面要坚持重要概念的引入和建立从分析实际原型后进行科学抽象；另一方面也要为重要抽象思维方法和思维过程提供原型，对重要方法及结论既要看到其应用的广泛性，又要注意到数学模型理想化的局限性.

5. 要教好数学分析，习题课是一个重要环节，但目前的现实是：很难有专门的习题课. 因此，本书注意增加一些习题的内容.

6. 不得不提到的一点是：相当多学习工科数学分析的学生是想继续攻读研究生的，因此，本教材应当为他们实现这种愿望提供帮助，让他们觉得学习本教材比一般教材更有些优势.

本书的编写与出版，得到华南理工大学数学科学学院领导的关心和支持，本教材也是教育部工科数学教学基地（华南理工大学基地）建设的一项内容. 参加本书编写工作的还有：陈凤平、杨立洪、王全迪、张杰、郭艾、明宗峰等老师. 学院大学数学部的全体老师都为本书的出版共同努力，作出贡献.

华南理工大学出版社理工编辑一部的编辑同志们为本书的出版付出了艰辛的努力，特此致以崇高的敬意与衷心的谢忱.

由于水平有限，本书错误之处在所难免，希望得到同仁们与读者的不吝指教.

编　者

2005 年秋于广州

目　　录

第一篇　分析引论

第二篇　一元函数微分学

第三篇　一元函数积分学

第一篇　分析引论

第一章　函　　数

工科数学分析研究在实数集中取值的变量，为此，首先介绍实数的概念及简单性质.

第一节　实数与实数集

一、无限小数与实数

在中学数学中，我们知道：有理数与无理数统称为实数. 有理数是指可用分数 $\frac{p}{q}$（p 是整数，q 是正整数）表示的数，它也可表示为有限十进小数或无限循环小数；而无理数是指十进的无限不循环小数. 为了统一，我们将有限小数（包括整数）也看成特殊的无限循环小数：循环节为“0”. 比如，有一非负实数 $x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_k$（其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k - 1$ 取 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的任一数，$a_k \neq 0$，a_0 为非负整数）可改记为

$$x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_k 00 \cdots 0 \cdots^{*} .$$

若 $y \leqslant 0$，则 $-y$ 为非负实数，若

$$-y = b_0 . b_1 b_2 \cdots b_n \cdots ,$$

则

$$y = -b_0 . b_1 b_2 \cdots b_n \cdots .$$

综上所述，任意实数都可由一个确定的无限小数来表示.

任意两个实数都可以比较大小，只需在十进小数中从左到右逐个比较对应的同位数的大小即可. 具体来说：

设有两个非负实数

$$x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots , \quad y = b_0 . b_1 b_2 \cdots b_n \cdots ,$$

其中，a_0, b_0 为非负整数，a_k, b_k（$k = 0, 1, 2, \cdots$）为适合 $0 \leqslant a_k \leqslant 9, 0 \leqslant b_k \leqslant 9$ 的整数. 规定如下：

---

* 有的书将有限小数看成循环节为“9”的无限循环小数，即 $x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_{k-1} (a_k - 1) 999 \cdots$.

(1) 若对于 $k=0,1,2,\cdots$ 都有 $a_k=b_k$，则称 x 与 y 相等，记为 $x=y$.

(2) 若 $a_0>b_0$，或存在正整数 l 使当 $0\leqslant k\leqslant l$ 时，$a_k=b_k$，而 $a_{l+1}>b_{l+1}$，则称 x 大于 y，记为 $x>y$ 或称 y 小于 x，记为 $y<x$.

(3) 对于任意两个负实数 x_1，y_1，$-x_1$ 与 $-y_1$ 都是非负实数，则规定：若 $-x_1=-y_1$，则 $x_1=y_1$；若 $-x_1<-y_1$，则 $x_1>y_1$.

(4) 任意正实数都大于 0；任意负实数都小于 0.

综上所述，任意两个实数 x 与 y，"$x>y$"、"$x=y$"与"$x<y$"有且仅有一个成立.

有了实数比较大小的上述规定，我们有：

定义 1-1　对于非负实数

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

称有限小数 $x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似值；称有限小数

$$\overline{x}_n = a_0.a_1a_2\cdots(a_n+1) = x_n+\frac{1}{10^n}$$

为实数 x 的 n 位过剩近似值($n=0,1,2,\cdots$).

显然，对一切实数 x 都有 $x_n\leqslant x<\overline{x}_n$；且对于任意两个实数 x 和 y，有 $x>y$ 等价于存在正整数 m 适合 $x_m>\overline{y}_m$(x_m 是 x 的 m 位不足近似值，而 $\overline{y}_m$ 是 y 的 m 位过剩近似值).

公理　若有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$：

$$x_n = a_0.a_1a_2\cdots a_n = a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n},$$

$$y_n = x_n+\frac{1}{10^n},$$

其中 a_0 是非负整数，a_i 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某一整数，则$\{x_n\}$与$\{y_n\}$确定了一个非负整数 x，且 x_n 是 x 的 n 位不足近似值，$y_n=\overline{x}_n$ 是 x 的 n 位过剩近似值.

对任意非负实数 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，存在惟一的实数 $-x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

二、实数集及其性质

全体实数的集合叫做实数集，记为$\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ 中的全体有理数的集合记为$\mathbb{Q}$，全体无理数的集合记为$\mathbb{F}$ 或$\overline{\mathbb{Q}}$. 实数集$\mathbb{R}$ 具有如下性质：

(1) 在$\mathbb{R}$ 中定义了四则运算，任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数，且

$$x+(-x)=0,\quad a\cdot\frac{1}{a}=1\ (a\neq 0).$$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$，$y\in\mathbb{R}$，必有且仅有下列三种关系之一：$x<y$ 或 $x=y$ 或 $x>y$.

这里记号 $\forall$ 表示"对任给的"或"对所有的".

(3) 若 $a,b,c\in\mathbb{R}$，且 $a>b$，$b>c$，则必有 $a>c$.

(4) $\forall a,b\in\mathbb{R}$，且 $a>0$，$b>0$，必存在正整数 n 适合 $an>b$ 或 $n>\dfrac{b}{a}$.

这里“存在正整数 n”常简记为 $\exists n \in \mathbb{N}_+$.

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists u \in \mathbb{R}$ 适合 $(u-x)(u-y)<0$,即 u 介于 x 与 y 之间,这一性质称之为实数的稠密性.

(6) 实数与数轴上的点一一对应.本书中将“实数 a 与数轴上的点 M 相对应”简称点 M 为点 a,而不加区别.

对实数的上述性质,本书(工科非数学专业)不作逐一定义与验证,有兴趣的读者可参阅数学专业的数学分析教材.

三、区间

实数集 $\mathbb{R}$ 的非空真子集 D,简称为数集 D $(D \subseteq \mathbb{R})$,D 中的数与数轴上的点集相对应,简称为点集 D.

最简单的数集是区间,规定如下:

(1) 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b).

(2) 数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记为 $[a,b]$.

(3) 数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 及数集 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为半开闭区间,分别记为 $[a,b)$ 及 $(a,b]$.

以上三种区间统称为有限区间,在无需区分区间是否包含端点时,统一记为 $I_{(a,b)}$,读成以 a,b 为端点的区间.

类似地有:

(4) $[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\}$;$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$.

(5) $(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$;$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$.

(6) $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数的集合.

区间(4)、(5)、(6)统称为无限区间.记号 $\infty,+\infty,-\infty$ 分别读成无穷大、正无穷大、负无穷大.

有限区间与无限区间统称为区间.在毋需区别是有限区间或是无限区间时,统一记为区间 I.

(7) 设 a 是一定数,δ 是一个正数,开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a;\delta)$;a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.在毋需强调 δ 的大小时,简称为点 a 的某邻域,记为 $U(a)$.

在 a 的 δ 邻域中将中心点 a 去掉的点集

$$U(a;\delta) \setminus \{a\}=(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta)$$

记为 $\mathring{U}(a;\delta)$,叫做点 a 的 δ 去心邻域,其中 $(a-\delta,a)$ 叫做点 a 的左邻域,$(a,a+\delta)$ 叫做点 a 的右邻域.

若 x_0 是 (a,b) 内的任意点,则必存在 $\delta>0$,使 $U(x_0;\delta) \subseteq (a,b)$.事实上,这里只需 δ 小于 x_0-a 及 $b-x_0$ 两数中较小的一个,记为取 $\delta \leqslant \min\{x_0-a,b-x_0\}$.

四、实数的绝对值

定义 1-2 任给一个实数 a，定义 a 的绝对值（记为 $|a|$）如下：

（ⅰ）正数的绝对值等于它本身；

（ⅱ）负数的绝对值等于它的相反数；

（ⅲ）0 的绝对值仍为 0.

即
$$|a|=\begin{cases} a & 当 a>0 \\ 0 & 当 a=0; \\ -a & 当 a<0 \end{cases}$$

也可表示为
$$|a|=\sqrt{a^2}.$$

$|a|$ 在数轴上表示点 a 到原点的距离，$|b-a|$ 表示数轴上点 a 与点 b 两点间的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$；

(2) $|x|\leqslant k$ 等价于 $-k\leqslant x\leqslant k$ $(k>0)$；

(3) $|x|\geqslant k$ 等价于 $x\geqslant k$ 或 $x\leqslant -k$ $(k>0)$；

(4) 对于任意实数 a，都有 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(5) 对于 $\forall a,b\in\mathbb{R}$ 都有 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

利用绝对值概念与记号可表示如下结果：
$$U(x_0;\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\};$$
$$\mathring{U}(x_0;\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

用 $\max\{a,b\}$ 表示取 a,b 两数中之较大者，则 $\max\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$.

用 $\min\{a,b\}$ 表示取 a,b 两数中之较小者，则 $\min\{a,b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

五、有界数集

定义 1-3 设 D 为数集，若存在数 G，对 $\forall x\in D$，适合 $x\leqslant G$，则称数集 D 上有界（或说数集 D 有上界），并称 G 为数集 D 的上界.

若存在数 s，对 $\forall x\in D$，适合 $x\geqslant s$，则称数集 D 下有界（或说数集 D 有下界），并称 s 为数集 D 的下界.

既有上界又有下界的数集称为有界数集.

值得注意 若 D 有上界 G，则上界 G 不是惟一的. $\forall H>G$，则显然 H 也是 D 的上界. 同理，若 D 有下界 s，$\forall l<s$，则 l 也是 D 的下界.

关于有界数集有如下定理：

定理 1-1 D 为有界数集的充分必要条件是：$\exists M>0$，使 $\forall x\in D$ 都适合 $|x|\leqslant M$.

证　先证充分性.若$\exists M>0$,使$\forall x\in D$都有$|x|\leqslant M$,从而有$-M\leqslant x\leqslant M$.故D有上界M,且有下界$-M$.故D为有界集.

再证必要性.设D是有界集,则存在s与G,使$\forall x\in D$都有$s\leqslant x\leqslant G$.取$M=\max\{|s|,|G|\}$,则对一切$x\in D$,有

$$-M\leqslant -|s|\leqslant s\leqslant x\leqslant G\leqslant |G|\leqslant M,$$

亦即恒有$|x|\leqslant M$成立.

在几何上,点集D有界的充分必要条件是:$\exists$点$x=0$的M邻域$U(0;M)$,使$D\subseteq U(0;M)$.

如上所述,有界数集的界(上界或下界)不是惟一的.为了研究的确定性,我们作如下定义:

定义1-4　设D是有上界数集,若存在数M适合:

(ⅰ)M是D的上界;

(ⅱ)任取实数$M'<M$,则M'必不是D的上界.

则称M为数集D的上确界,记为

$$M=\sup\{D\}.$$

类似地,设E是有下界的数集,若存在数m适合:

(ⅰ)m是E的下界;

(ⅱ)任取实数$m'>m$,则m'必不是E的下界.

则称m为数集E的下确界,记为

$$m=\inf\{E\}.$$

定理1-2　一个数集如果有上(下)确界,则它的上(下)确界是惟一的.

证　(只就上确界的情形进行证明)倘设

$$M_1=\sup\{D\},\quad M_2=\sup\{D\},\quad 且\ M_1<M_2,$$

则M_1也是D的上界.但这与$M_2=\sup\{D\}$矛盾,故上确界是惟一的.

那么,一个有界数集是不是一定有上(下)确界呢?

定理1-3　任意非空有上界数集必有上确界,任意非空有下界数集必有下确界.

我们只证明上确界存在的结论,对于下确界的存在性类似可证.同时,为了叙述方便与语句的确定性,假定所讨论数集中含有非负数.

证　设数集D是非空有上界数集,故存在非负整数P_0适合:

P_0不是D的上界,即存在$x_1\in D$,适合$x_1>P_0$;且P_0+1是D的上界,即$\forall x\in D$都有$x\leqslant P_0+1$.

将区间十等分,则存在$0,1,2,\cdots,9$诸数中的一个整数P_1适合:

$\xi_1=P_0.P_1=P_0+\dfrac{P_1}{10}$不是$D$的上界,即$\exists x_2\in D$,使$x_2>\xi_1$;而$\overline{\xi_1}=\xi_1+\dfrac{1}{10}$是$D$的上界,即对$\forall x\in D$都有$x\leqslant\overline{\xi_1}$.

又将区间 $[\xi_1,\overline{\xi_1}]=\left[P_0.P_1,P_0.P_1+\frac{1}{10}\right]$ 十等分,则存在 $0,1,2,\cdots,9$ 诸数中的一个整数 P_2 适合:

$\xi_2=P_0.P_1P_2$ 不是 D 的上界,即 $\exists\, x_3\in D$,使 $x_3>\xi_2$ 而

$$\overline{\xi_2}=P_0.P_1P_2+\frac{1}{10^2}=\xi_2+\frac{1}{10^2}$$

是 D 的上界,即 $\forall\, x\in D$ 都有 $x\leqslant\overline{\xi_2}$.

继续重复上述步骤,对一切正整数 k,存在 $0,1,2,\cdots,9$ 诸数中的一个整数 P_k 适合:

$\xi_k=P_0.P_1P_2\cdots P_k$ 不是 D 的上界,即 $\exists\, x_{k+1}\in D$,使 $x_{k+1}>\xi_k$ 而

$$\overline{\xi}_k=P_0.P_1P_2\cdots(P_k+1)=\xi_k+\frac{1}{10^k}$$

是 D 的上界,即 $\forall\, x\in D$ 都有 $x\leqslant\overline{\xi_k}$.

将上述步骤无限进行下去,得一实数 ξ,

$$\xi=P_0.P_1P_2\cdots P_k\cdots,$$

它以 ξ_k 为 k 位不足近似值,而以 $\overline{\xi}_k$ 为 k 位过剩近似值.

现在要证明 ξ 就是 D 的上确界,为此必须证明:(ⅰ) ξ 是 D 的上界;(ⅱ) 对一切实数 $\eta<\xi$,η 不是 D 的上界.

(ⅰ) (用反证法)假设 ξ 不是 D 的上界,则 $\exists\, a\in D$,使 $a>\xi$,亦即存在 a 的 l 位不足近似值

$$a_0.a_1a_2\cdots a_l>\overline{\xi}_l=P_0.P_1P_2\cdots P_l+\frac{1}{10^l}.$$

但这与 $\overline{\xi}_l$ 是 D 的上界矛盾,故 ξ 是 D 的上界.

(ⅱ) 任取 $\eta=b_0.b_1b_2\cdots b_k\cdots<\xi$,$\exists$ 正数整 m,使 $\xi_m>\overline{\eta}_m$ (ξ_m 为 ξ 的 m 位不足近似值,$\overline{\eta}_m$ 为 η 的 m 位过剩近似值),但 ξ_m 不是 D 的上界. 故 $\overline{\eta}_m$ 也不是 D 的上界,从而 η 也不是 D 的上界.

综上所述,ξ 是 D 的上确界.

若 E 是非空的有下界数集,作一新数集 $D=\{y\mid y=-x,x\in E\}$,则 D 是非空有上界数集. 故 D 存在上确界 M,且 $-M$ 必为 E 的下确界.

确界的存在是实数的一个重要特性,叫做实数集的完备性(或连续性). 值得注意的是:有理数集 $\mathbb{Q}$ 没有这一特性,也就是说,若 E 是 $\mathbb{Q}$ 的一个子集,且 E 非空、有上界,则 E 必有实数的上确界,却不一定有有理数的上确界.

例 1-1 设有理数子集 D:

$$D=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x>0,x^2<2\},$$

试讨论 D 的上确界.

解 显然,$x=1\in D$,故 D 非空. 任取 r 适合 $r>0$,$r\in\mathbb{Q}$,$r^2>2$ (比如 $r=2$),则 r 必是 D 的上界. 事实上 $\forall\, x\in D$,由 $r^2>2>x^2$,得

$$r^2 - x^2 = (r-x)(r+x) > 0,$$

故有 $x<r$，即 r 是有界数集 D 的上界.

现设 r 是 D 的任一个有理数上界 $(r>0, r\in\mathbb{Q}, r^2>2)$，取 $\varepsilon=\dfrac{r^2-2}{2r}>0$，则

$$(r-\varepsilon)^2 = \left(\frac{r^2+2}{2r}\right)^2 = 2 + \frac{(r^2-2)^2}{4r^2} > 2,$$

故 $r-\varepsilon$ 仍为 D 的上界. 换句话说，D 的任一有理数上界 r 都不是 D 的上确界.

另一方面，任取 $x\in D$ $(x>0, x\in\mathbb{Q}, x^2<2)$，不妨设 $x>1$. 取

$$\alpha=\frac{2-x^2}{2x+1}>0,$$

则

$$1-\alpha=\frac{2x-1+x^2}{2x+1}>0.$$

故 $0<\alpha<1$，从而

$$\alpha^2<\alpha,$$

$$(x+\alpha)^2 = x^2+2x\alpha+\alpha^2 < x^2+(2x+1)\alpha = x^2+(2-x^2) = 2,$$

即 $(x+\alpha)\in D$，从而 $\forall x\in D$，x 都不是 D 的上界.

综上所述，任意有理数都不是 D 的上确界.

由此可见，非空有界的有理数集不一定具有有理数的上确界. 许多数学分析教材直接将定理 1-3 的结论作为实数公理来讨论实数的性质.

习题 1-1

1. 设 a 为有理数，b 为无理数. 求证：$a+b$ 与 $a-b$ 都是无理数；当 $a\neq 0$ 时，$a\cdot b$ 与 $\dfrac{b}{a}$ 也是无理数.

2. 证明：$\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

3. 设 $a, b\in\mathbb{R}$. 证明：若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$，则 $a=b$.

4. 设 a, b 为给定实数，试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$；

(2) $|x-a|<x-b$；

(3) $|x^2-a|<b$.

5. 证明：对实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 下面的不等式成立：

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad \text{(Cauchy 不等式)}.$$

6. 设 $Q=\{x \mid x$ 为区间 $(0,1)$ 中的有理数$\}$. 试按上、下确界的定义验证：

$$\sup Q=1,\quad \inf Q=0.$$

7. 证明：数集 $\mathbb{N}_+=\{n \mid n$ 为正整数$\}$ 有下界而无上界.

8. 证明：对任意给定的 $x\in\mathbb{R}$，存在 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $n>x$.

9. 设 $x>0$，$y\in\mathbb{R}$，证明：存在 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $n\cdot x>y$.

10. 设 A, B 皆为非空有界数集，定义数集 $A+B=\{z \mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$，证明：

(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

第二节　函数概念

一、常量与变量

变化着的客观世界中的各种量大体可分为两类:一类量在变化过程中只取一个确定的数值,称之为常量;另一类量在变化过程中可以取不同的数值,称之为变量.

但应指出:常量是相对的,变量是绝对的.

首先,许多常量是在考察变量的过程中形成的.例如,研究各种大小不同的正方形,它的边长 x 是变量,它的对角线 y 也是变量,但在考察了各种正方形之后,却得出 y 与 x 之比的比值是个常量($\sqrt{2}$).又如,考察各种大小不同的圆,它的周长 C 及直径 D 都是变量,但这两个变量之比(叫做圆周率)却是常量(π).

其次,有些量在某个过程中体现为变量,而在另一个变化过程中,因变化不明显又被近似看成了常量.例如,地球对物体的引力本来是个变量,它随物体与地心的距离 r 的变化而变化,然而在日常生活中,由于 r 的变化相对很小,引力常被看成是不变的常量.当然,在另外一些变化的过程(比如物体作航天飞行)中,引力还是变化着的变量.

最后,即使是一个实常数,人们对它的认识也是在变化过程中获得的.实常数常用 n 位不足近似值与 n 位过剩近似值来确定(这里 n 是变量).

因此,今后对各种待考察的量,都应该将它置于所研究的变化过程中来研究、确定它是变量还是常量,并将常量看成一种特殊的变量——在所讨论的变化过程中,它只取一个实数值.

二、函数概念

一个变化的过程中往往有多个变量,并且这些变量的变化也不是孤立的,而是互相联系的.这种联系广泛地表现为函数关系.关于函数关系,中学数学已有比较多的介绍,本节将进行简明的总结和进一步的深入讨论.

定义 1-5　设有两个非空数集 D 与 E,若对于 D 中的每一个 x,按照一定的法则 f,都有惟一的 $y\in E$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记为

$$f: D\to E, x\mapsto y.$$

数集 D 称为函数 f 的定义域,x 称为自变量.

与自变量 x 所对应的 y 值叫做函数 f 在点 x 处的函数值,记为

$$y = f(x), \ x\in D.$$

y 也称为因变量.全体函数值的集合记为

$$B = f(D) = \{y \mid y = f(x), x\in D\}\subseteq E.$$

B 叫做函数 f 的值域.由于 B 仅是 E 的子集,不一定等于 E,故通常可取 $E=\mathbb{R}$ 而不失一般性.因此,习惯上在描述函数关系时,常不强调 E,而习惯用

$$y = f(x), \ x\in D$$

表述一个函数 f.

函数概念的两个基本要素就是定义域 D 与对应法则 f. 两个函数当且仅当定义域与对应法则都相同时才被认为是同一函数.

例 1－2　讨论下列各组函数是否表示同一函数：

(1) $f_1(x)=|x|$，$f_2(x)=\sqrt{x^2}$，$f_3(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f_1(x)=\sin(\arcsin x)$，$f_2(x)=\arcsin(\sin x)$；

(3) $f_1(x)=\log_a a^x$，$f_2(x)=a^{\log_a x}$，$f_3(x)=x$　$(a>0, a\neq 1)$.

解　(1) $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的同一函数；而 $f_3(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，故它与 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 不是同一函数.

(2) $f_1(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $f_2(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 不表示同一函数；但如只在 $[-1,1]$ 上讨论函数，则在该区间上 $f_1(x)=f_2(x)=x$.

(3) $f_1(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $f_2(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，故 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 不表示同一函数；而在 $(0,+\infty)$ 内有 $f_1(x)=f_2(x)=x$.

综上所述，3 个小题中共出现 7 个不同函数. 但如仅在 $(0,1]$ 上讨论问题，则 7 个函数都等于 x.

表示函数 f 的方法有 3 种：列表法、图像法和公式法.

1. 列表法

将函数关系中 x 与 $f(x)$ 的对应值列成对应表. 其优点是简单、明了、快捷；缺点是不全面；现实意义是只需制表者具有专业知识，而无需用表者有专业知识.

2. 图像法

在平面直角坐标中，函数 f 给出 x 轴上的点集 D 与 y 轴上的点集 $B=f(D)$ 之间的对应关系，也称 f 是从 D 到 B 的映射. 对于 $\forall x\in D$，称 $y=f(x)\in B$ 是在映射 f 下点 x 的像，而称 x 为对应于点 $y=f(x)\in B$ 的原像. 对一切 $x\in D$，称 xOy 平面上全体点 $(x,f(x))$ 的集合为函数 f 的图像. 一般情形下，函数 f 是 xOy 平面上的曲线，等式 $y=f(x)$ 称为曲线的方程. 用图像法表示函数的优点是直观，且对 y 随 x 变化的趋势有一个定性的了解；缺点是较难取得 $f(x)$ 的精确值；现实意义是各种自动记录仪与计算机容易记录函数 f 的图像.

3. 公式法

用关于 x，y 的数学关系式表示 x 与 $y=f(x)$ 之间函数关系. 其优点是准确、全面；缺点是获取函数关系式较难；现实意义是可对函数进行全面研究，尤其是理性的研究：不但可以了解现状，还可以追溯过去或预测未来.

本书将主要研究用公式法表示的函数.

三、函数的定义域

在函数关系 $y=f(x)$，$x\in D$ 中，数集 D 表示自变量 x 的取值范围，叫做函数的定义域. 研究函数，必须从确定函数的定义域开始.

如果自变量 x 表示一个实际问题中的某种实际变量,则 x 的取值范围应依该变量的实际意义(物理的、化学的、经济的等等)来确定,这种定义域叫做实际定义域.

如果自变量 x 被抽去了实际意义,而函数 f 用一个数学式表示(公式法),则这种函数的定义域是指能使该数学式有意义的全体 x 值的集合,称之为理论定义域或存在域,在这种情形下,定义域 D 在书写中常被省略,如函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 常被省略为函数 $y=f(x)$ 或函数 f.

例 1-3 求下列函数的定义域:

(1) 一圆锥体高为 H(定值),斜高为 x,体积为 $V=\frac{\pi}{3}H(x^2-H^2)$;

(2) 电路中通过负载 R 的电流为 x,功率为 $P=Rx^2$;

(3) 物体自高 H 处自由落下,它所经历的路程 s 与下落时间 x 的关系为 $s=\frac{1}{2}gx^2$;

(4) 平面直角坐标系中曲线 C 上点的纵坐标 y 与横坐标 x 的关系为 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$.

解 (1) 依 x 的意义, $x>H$,故定义域为 $D_1=(H,+\infty)$;

(2) 依题意,定义域为 $[-I_0,I_0]$,这里 I_0 是该电路所允许通过的电流的最大值;

(3) 定义域为 $[0,t_0]$,其中 t_0 是物体落到地面所需的时间, $t_0=\sqrt{\frac{2H}{g}}$;

(4) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

以上函数所确定的定义域都是实际定义域.如果仅从数学式确定其理论定义域,则都是 $(-\infty,+\infty)$.

求函数的理论定义域需根据数学式的具体构造来确定.通常情况下,数学运算有下列 5 条规定:

(i) 除数(或分母)不等于 0;

(ii) 负数不能开偶次方;

(iii) 0 和负数没有对数;

(iv) 正弦、余弦的绝对值不超过 1;

(v) 0^0 无确定意义.

根据这 5 条规定列出不等式(或不等式组),求解每一个不等式,最后取公共解集,即为所求的定义域.

例 1-4 求函数

$$f(x)=\arcsin\frac{4}{x-1}+\frac{1}{1-\log_5(x^2-2x-3)}+\sqrt{36-x^2}$$

的定义域.

解 由 $\arcsin\frac{4}{x-1}$ 要求(i) $x\neq 1$;(ii) $\left|\frac{4}{x-1}\right|\leqslant 1$,解得 $x\geqslant 5$ 或 $x\leqslant -3$.

由 $\log_5(x^2-2x-3)$ 要求(iii) $x^2-2x-3>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>3$.

由 $\log_5(x^2-2x-3)\neq 1$ 要求(iv) $x^2-2x-3\neq 5$,解得 $x\neq -2$, $x\neq 4$.