中学知识表解丛书

北京市海淀、西城、东城、宣武、崇文等区特级、高级教师集体编写
总主编　张德政
副主编　程　迟　杨惠娟

高中知识表解

数　学

编　　著　黄绪励

中央民族大学出版社

知识表解目录

第一编　代　　数

第二编　三　　角

第三编　立 体 几 何

第四编　平面解析几何

高中数学　知识表解

第一编　代　　数

第一章　集合与函数

本章知识结构

- 集合与函数
  - 集合与映射
    - 集合的概念
    - 集合之间的关系
    - 映射的概念
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的性质
  - 初等函数
    - 一次函数、正比例函数与反比例函数
    - 二次函数
    - 指数函数与对数函数
    - 简单的指数方程与对数方程

一、集合与映射

表 1　　集合的概念

项目	内容	定义或说明	记号
集合的意义	集合与元素	把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合，集合常用大写字母表示；集合里的各个对象叫做集合的元素，通常用小写字母表示.	集合 A，B，C，…； 元素 a，b，c，…；
	集合与元素的关系	当某元素 a 是集合 A 中的元素时，说 a 属于 A；元素 a 不是 A 中的元素时，说 a 不属于 A.	a 属于 A，记为 $a\in A$，a 不属于 A，记为 a| A．对于一个元素 a 和一个集合 A，以上两种关系有且仅有一种成立.
集合的表示方法	列举法	把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方法叫列举法.	大于 0 小于 10 的全体偶数的集合可表为：$A=\{2,4,6,8\}$
	描述法	把集合中元素的共同属性以文字或数学表达式写在大括号内表示集合的方法叫描述法.	A＝{大于 0 小于 10 的偶数}或 $A=\{x\mid x=2n,\ 0<n<5,$ n 是整数}.
集合的分类	空集	不含任何元素的集合叫空集.	Φ
	有限集	元素的个数是有限的集合叫有限集.	{a},{1,2,3}{1,2,3,4…n}等{a}称为单元素集.
	无限集	元素的个数是无限的集合，叫无限集.	例如 {1，2，3，…，n…}
常用数集		自然数集 N，整数集 Z（或 J）、有理数集 Q、实数集 R、复数集 C．Z^+ 表示正整数的集合，Z^- 表示负整数的集合，类似地可规定 Q^+、Q^-、R^+、R^- 等.	

表 2　　集合之间的关系

项目	定义	记号	性质
子集	对于两个集合 A 与 B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集.	A　B （或 B　A）	(1) A　A； (2) Φ　A； (3) 若 A　B，B　C，则 A　C.
	若集合 A 是集合 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集.	A　B （或 B　A）	(1) 若 A　B，B　C，则 A　C； (2) Φ　A（A 为非空集合）.

(续上表)

项目		定义	记号	性质
相等		两个集合 A，B，如果：$A\quad B$，同时 $B\quad A$．则称 A，B 是相等的两个集合．	$A=B$	若 $A=B$，则 A，B 两个集合中的元素完全相同．
全集		在研究集合与集合的关系时，如果所有被研究的集合都是某个给定集合的子集，那么，这个给定的集合叫做全集．	$\mathbf{I}$	若 A 是任一被研究的集合，则 $A\quad \mathbf{I}$． $A\cap \mathbf{I}=A$，$A\cup \mathbf{I}=\mathbf{I}$．
集合的运算	交集	由集合 A 与集合 B 的所有公共元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集（简称交）．	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	1. $A\cap A=A$; 2. $A\cap\Phi=\Phi$; 3. $A\cap B=B\cap A$; 4. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; 5. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$; 6. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (De Morgan法则)．
	并集	由集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合，叫做 A 与 B 的并集（简称并）．	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	1. $A\cup A=A$; 2. $A\cup\Phi=A$; 3. $A\cup B=B\cup A$; 4. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; 5. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$; 6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (De Morgan法则)．
	补集	若 $\mathbf{I}$ 是全集，$A\quad \mathbf{I}$，则由 $\mathbf{I}$ 中不属于 A 的所有元素组成的集合，叫做 A 在 $\mathbf{I}$ 中的补集．	$\overline{A}=\{x\mid x\in \mathbf{I}$ 且 $x\mid\quad A\}$	1. $A\cup\overline{A}=\mathbf{I}$; 2. $A\cap\overline{A}=\Phi$ 3. $\overline{\overline{A}}=A$; 4. $\overline{\Phi}=\mathbf{I}$; 5. $\overline{\mathbf{I}}=\Phi$; 6. 若 $A\quad B$，则 $\overline{B}\quad\overline{A}$．
对偶原理		集合论中成立的任一定理，如果将其中的 $\cup$ 与 $\cap$，A 与 $\overline{A}$，　与　互换，$\mathbf{I}$ 与 Φ 互换，则该定理仍然成立．		

表 3　　　　　　　　**映射的概念**

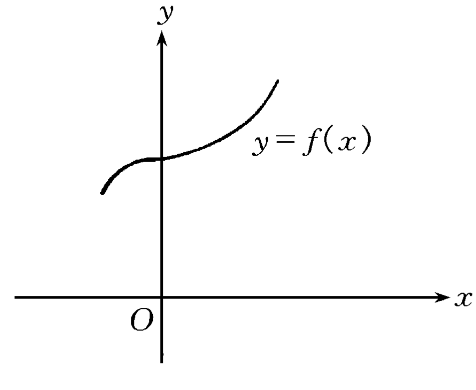
项目		定义	表示
映射	一般映射	设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有惟一确定的元素和它对应，这样的对应（包括集合 A，B 及对应法则 f），叫做从集合 A 到集合 B 的映射．记作：$f: A\to B$． 若给定了集合 A 到集合 B 的映射 $f: A\to B$，那么与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b，叫做 a 的像；a 叫做 b 的原像． 像与原像的关系记作，$f: a\to b$，或 $b=f(a)$． A 称为映射 f 的定义域，$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$ 称为 f 的值域．	$f: A\to B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$；$f: a\to b$ 或 $f(a)=b$．
	满射	若 $f: A\to B$，当 $f(A)=B$ 时，f 称为从 A 到 B 上的满射．此时，B 中每个元素，在 A 中都有原像．	若 $f: A\to B$，且 $B=f(A)$，f 是满射．
	单射	若 $f: A\to B$，且对于 A 中任意两个不同元素 a_1，a_2，都有 $f(a_1)\neq f(a_2)$；这时称 f 为从 A 到 B 的单射；即在单射下，不同元素的像不同．	若 $f: A\to B$，a，$b\in A$ 且 $a\neq b$ 时，$f(a)\neq f(b)$　f 是单射．
	一一映射	若 $f: A\to B$，既是满射又是单射，则称 f 为 A 到 B 上的一一映射（或双射）．	$f: A\to B$，既是单射又是满射，f 是一一映射．
	逆映射	设 $f: A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射；如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原像 a 和它对应，这样得到的映射叫做映射 $f: A\to B$ 的逆映射，记为：$f^{-1}: B\to A$． 显然，$f: A\to B$ 也是 $f^{-1}: B\to A$ 的逆映射．	若 $a\in A$，且 $f(a)=b\in B$，则 $f^{-1}(b)=a$．一般地有 $f^{-1}[f(a)]=a$，$f[f^{-1}(b)]=b$．
常见映射	常值映射	若 $f: A\to B$，对于 A 中的任一元素 a，均有 $f(a)=b_0$（某固定元素），则 f 称为值为 b_0 的常值映射．	设 $f: A\to B$，若 $f(A)$ 是单元素集 $\{b_0\}$，则 f 是值为 b_0 的常值映射．
	恒等映射	若 $f: A\to B$，且 $f(A)=A$，对任何的元素 $a\in A$，均有 $f(a)=a$，则称 f 为恒等映射，记为 I_A．	若 $f: A\to B$ 且 $f(A)=A$．若 $a\in A$ 均有 $f(a)=a$ 则 $f=I_A$．

(续上表)

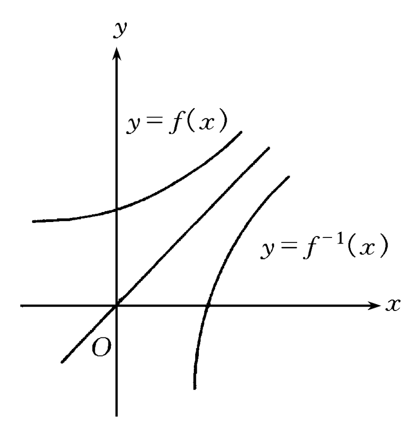
项目		定义	表示
常见映射	复合映射	对于两个映射，$g: A\to B$，$f: B\to C$，由 $h(a)=f[g(a)]$ 所确定的映射 $h: A\to C$ 称为 g 和 f 的复合，记为 $h=f\cdot g$，h 称为 g 和 f 的复合映射.	$f\cdot f^{-1}=f^{-1}\cdot f=I_A$.
说明		1. 从集合 A 到集合 B 的映射，与从集合 B 到集合 A 的映射是不同的. 2. 集合 A 中每个元素在映射 f 作用下，在集合 B 中有且只有惟一的像，但 A 中不同的元素可以在 B 中有同一个像. 3. 不要求集合 B 中每一个元素都在 A 中有原像. 4. 两个映射 f，g 相等，是指 f，g 的定义域相同，且对所有的 $a\in A$，$f(a)=g(a)$.	

二、函数

表 4　函数的有关概念

概念	定义和说明	表示
函数	如果在某变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个范围内的一个确定的值，按照某个对应法则，y 都是惟一确定的值和它对应，那么变量 y 就叫做变量 x 的函数，x 叫做自变量. 常用 $y=f(x)$ 表示 x 与 y 的函数关系. 自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 值对应的 y 值叫做函数值，全体函数值的集合叫做函数的值域. 函数 $y=f(x)$ 是一类特殊的映射，$f: X\to F$，其中 X，Y 是非空的数集，且 Y 中的每一元素都在 X 中有原像. 此时，X 是定义域，Y 是值域.	定义域 X，值域 Y $Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$
函数图像	如果把函数中的变量 x 和 y 看做平面上点的直角坐标，那么坐标平面上的点集：$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为 $y=f(x)$ 的图像.	 图 1

(续上表)

概念		定义和说明	表示
区间	闭区间	设 a，$b\in R$，且 $a<b$，把满足 $a\leq x\leq b$ 的实数 x 的集合，叫做闭区间，记为 $[a,b]$.	$[a,b]=\{x\mid a\leq x\leq b$. a，$b\in R$ 且 $a<b\}$
	开区间	设 a，$b\in R$，且 $a<b$，把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，记为 (a,b).	$(a,b)=\{x\mid a<x<b$，a，$b\in R$，且 $a<b\}$
	半开半闭区间	设 a，$b\in R$，$a<b$，把满足 $a\leq x<b$，或 $a<x\leq b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别记为 $[a,b)$，或 $(a,b]$.	$[a,b)=\{x\mid a\leq x<b\}$ $(a,b]=\{x\mid a<x\leq b\}$ a，$b\in R$，且 $a<b$
	无穷区间	设 a，$b\in R$，且 $a<b$，分别把满足 $x\geq a$，$x>a$，$x\leq b$，$x<b$ 的实数 x 的集合称为无穷区间；分别记为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$；特别是全体实数记为 $(-\infty,+\infty)$.	$[a,+\infty)=\{x\mid a\leq x\}$ $(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$ $(-\infty,b]=\{x\mid x\leq b\}$ $(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$ $(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in R\}$
函数的三个要素		定义域值域和对应法则.	
反函数	定义	如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 f: $X\to Y$ 是从 $f(x)$ 的定义域 X 到值域 Y 上的一一映射．那么，这个映射的逆射 f^{-1}: $y\to x$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上，$y=f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$．函数 $y=f(x)$ 的定义域，值域分别是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域和定义域.	 图 2
	求法	方法一：首先判断确定 $y=f(x)$ 的映射 f: $X\to Y$ 是否为从 X 到 Y 上的一一映射；如果是一一映射，可把 $y=f(x)$ 看做 x 为未知数的方程，从中解出 $x=f^{-1}(y)$，再改写为 $y=f^{-1}(x)$. 方法二：根据 $y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直张 $y=x$ 对称来求 $Y=f^{-1}(x)$.	

(续上表)

<table>
<tr><th colspan="2">概念</th><th>定 义 和 说 明</th><th>表 示</th></tr>
<tr><td rowspan="3">函数的表示方法</td><td>解析法</td><td>用一个或几个数学式子来表示函数关系的方法叫解析法.</td><td>例:
$y=3x+5$,
$y=\log_2 x^2+1$</td></tr>
<tr><td>列表法</td><td>把自变量 x 的一系列可取值和函数 y 的对应值列成一个表格，这种表示函数的方法为列表法.</td><td>例:
<table><tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-6</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>图像法</td><td>把自变量 x 的值和对应的函数值 $y=f(x)$ 分别作为平面直角坐标系中点的横、纵坐标，由这些点连成的曲线就是函数 $y=f(x)$ 的图像，这种表示函数的方法叫做图像法.</td><td>例见图 1 所示.</td></tr>
</table>

表 5　　函 数 的 性 质

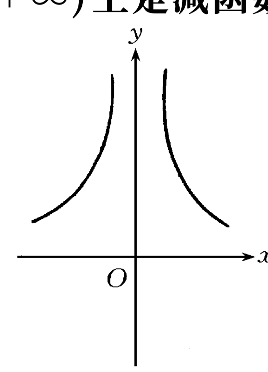
<table>
<tr><th>概念</th><th>定 义</th><th>例 子</th></tr>
<tr><td>单调性</td><td>设 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数.
若对于任意 x_1, $x_2\in(a,b)$　X 且 $x_1<x_2$，都有:
(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是增函数.
(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是减函数.
区间 (a,b) 上的增函数或减函数统称为 (a,b) 上的单调函数. [或者说函数在区间 (a,b) 上具有单调性]. 区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调区间.</td><td>函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.


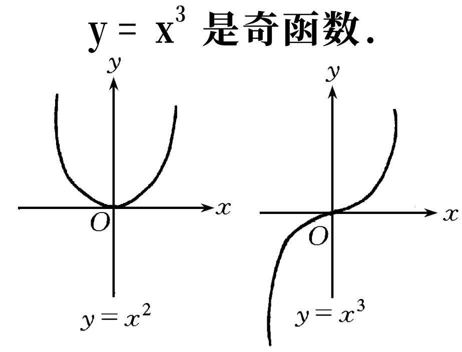
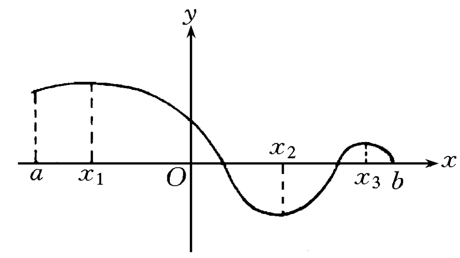
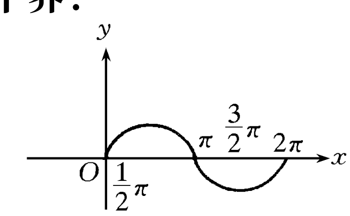
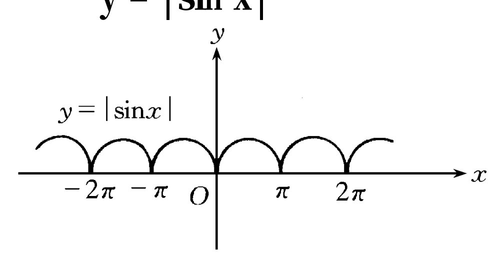
图 3</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td>设 $y=f(x)$ 的定义域是 X，且 $x\in X$ 时 $-x\in X$. 若:
(1) 对于任何 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 X 上的偶函数.
(2) 对于任何 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 X 上的奇函数.
偶函数的图像关于 y 轴对称. 奇函数的图像关于原点对称.</td><td>$y=x^2$ 是偶函数.
$y=x^3$ 是奇函数.


图 4</td></tr>
</table>

(续上表)

概念	定　　义	例　　子
极值性	如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的附近有意义，并且 $f(x_0)$ 比 x_0 附近所有各点的函数值都大（或都小)，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值)，极大值与极小值统称为极值. 如果 $y=f(x)$ 在 x_0 处的值 $f(x_0)$ 不小于(或不大于）定义域中其他各点的对应函数值；则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最大值（或最小值). 记为 y_{max}(或 y_{min}).	$y_{max}=f(x_1)$，$f(x_3)$ 是一个极大值 $y_{min}=f(x_2)$.  图 5
有界性	若存在一个正数 M，使得对于任何 $x\in X$，都有 $\|f(x)\|\leq M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. M 称为 $f(x)$ 的一个界. 注意：函数有界时，界不是惟一的，若 M 是一个界，那么 $M+1$ 也是一个界. 不是有界的函数，称为无界函数.	当 $x\in[0,2\pi]$，$\|\sin x\|\leq 1$，$y=\sin x$. 在 $[0,2\pi]$ 上有界，1 是它的一个界.  图 6
周期性	若存在常数 $T\neq 0$，使得对于定义域中任何 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数；T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 而使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期. 若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 nT ($n\in N$) 也是 $f(x)$ 的周期； 注意，存在着没有最小正周期的函数，例如狄里赫莱函数： $D(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}.\\ 1, & x\text{为无理数}.\end{cases}$	$y=\|\sin x\|$ $=\|\sin(x+\pi)\|=\|-\sin x\|$ $=\|\sin x\|$ $\therefore \pi$ 是 $\|\sin x\|$ 的一个周期. $y=\|\sin x\|$  图 7
连续性	若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有意义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续. 若 $y=f(x)$ 在其定义域 X 内每一点都连续，则称 $y=f(x)$ 是 X 上的连续函数.	初等函数是定义域上的连续函数.

三、初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数，统称为基本初等函数.

凡由基本初等函数和常数经过有限次四则运算以及有限次函数复合步骤而构成，并可用一个解析式来表示的函数叫初等函数.

本节知识结构如下:

- 初等函数
  - 代数函数
    - 有理函数
      - 有理整函数
      - 有理分函数
    - 无理函数
  - 超越函数

表 6　　一次函数、正比例函数、反比例函数的图像与性质

项目	一 次 函 数	正比例函数	反比例函数
一般形式	$y=kx+b\ (k\neq0)$	$y=kx\ (k\neq0)$	$y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$
值域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

(续上表)

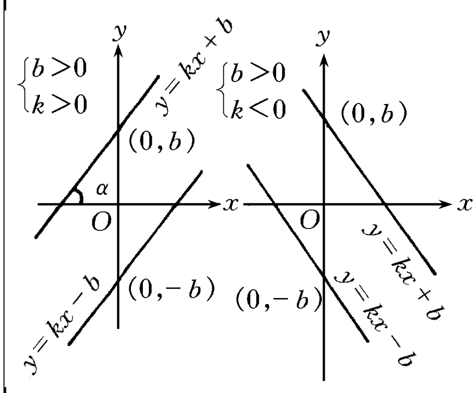
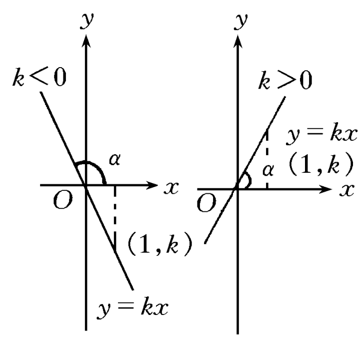
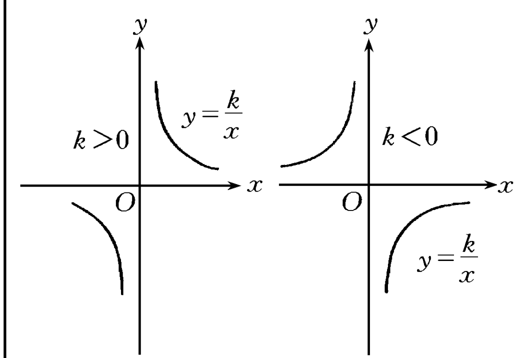
项目	一次函数	正比例函数	反比例函数
图像	 图 8	 图 9	 图 10
性质	1. 图像是过点(0, b)及$\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$的一条直线. 2. k > 0 时,函数为增函数. 3. k < 0 时,函数为减函数. 4. k > 0, b > 0 时,直线经过Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ象限;k > 0, b < 0 时,直线经过Ⅰ,Ⅲ,Ⅳ象限. k < 0, b > 0 时,经过Ⅰ,Ⅱ,Ⅳ象限,k < 0, b < 0 时,直线经过Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ象限(当 b = 0 时,图像性质即同正比例函数).	1. 图像是经过原点(0, 0)和(1, k)的一条直线. 2. k > 0 时,函数是增函数;k < 0 时,函数是减函数. 3. k > 0 时,直线经过Ⅰ,Ⅲ象限;k < 0 时,直线经过Ⅱ,Ⅳ象限. 4. y = kx 是奇函数.	1. 图像是双曲线,k > 0 时图像在Ⅰ,Ⅲ象限;k < 0 时图像在Ⅱ,Ⅳ象限. 2. k > 0 时,在(-∞, 0)和(0, +∞)上,函数为减函数,k < 0 时,在(-∞, 0)和(0, +∞)上,函数为增函数. 3. 以 x 轴,y 轴为渐近线. 4. |k|越大,图像距原点越远. 5. 函数为奇函数,图像关于原点对称.

表 7　　二次函数的图像与性质

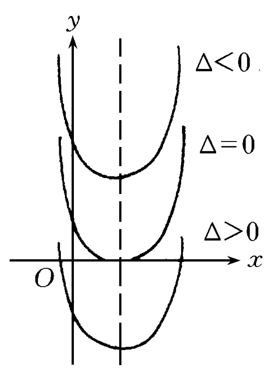
<table>
<tr><th colspan="2">项　目</th><th colspan="2">图　像　与　性　质</th></tr>
<tr><td rowspan="2">表达式</td><td>一般式</td><td colspan="2">$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$</td></tr>
<tr><td>顶点式</td><td colspan="2">$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\quad(a\neq 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">定义域</td><td colspan="2">$(-\infty,\ +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">值　域</td><td>$a>0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td>$\left[\frac{4ac-b^2}{a},\ +\infty\right)$</td><td>$\left(-\infty,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图　像</td><td>$\Delta=b^2-4ac$


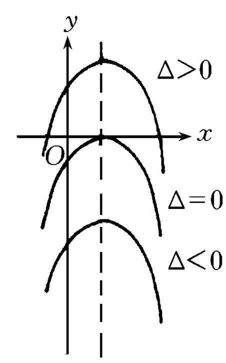
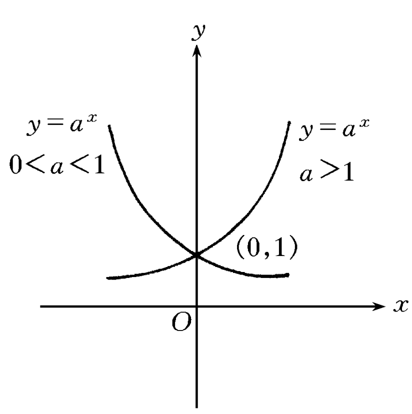
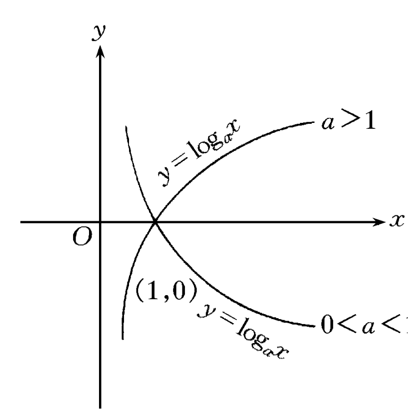
图 11</td><td>$\Delta=b^2-4ac$


图 12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">性质</td><td>顶　点</td><td colspan="2">$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$对称.</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>当 $x<-\frac{b}{2a}$时，减函数
当 $x>-\frac{b}{2a}$增函数</td><td>当 $x<-\frac{b}{2a}$时，增函数
当 $x>-\frac{b}{2a}$时，减函数</td></tr>
<tr><td colspan="2">最大值
与
最小值</td><td>当 $x=-\frac{b}{2a}$时
$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$</td><td>当 $x=-\frac{b}{2a}$时
$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$</td></tr>
</table>

(续上表)

项　目	图　像　与　性　质
截　距	在 y 轴上的截距为 $\lvert c\rvert$， 当 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 时，在 x 轴上的截距为 $\frac{\triangle}{\lvert a\rvert}$.
奇偶性	当 $b=0$ 时，函数为偶函数，图像关于 y 轴对称， 当 $b\neq 0$ 时，函数非奇非偶.

表 8　　指数函数与对数函数的图像与性质

项　目		指　数　函　数	对　数　函　数
表达式		$y=a^x$ （$a>0$，$a\neq 1$）	$y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq 1$）
定义域		$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$
值　域		$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
图　像		 图 13	 图 14
性质	$a>1$	1. 图像在 x 轴的上方，即 $y=a^x>0$ 2. $y=a^x$ 是增函数，图像经过点 $(0,1)$ 3. $y=a^x=\begin{cases}>1 & (x>0)\\ =1 & (x=0)\\ <1 & (x<0)\end{cases}$	1. 图像在 y 轴的右方，即 0 与负数无对数； 2. $y=\log_a x$ 是增函数，图像经过点 $(1,0)$； 3. $y=\log_a x=\begin{cases}>0 & (x>1)\\ =0 & (x=1)\\ <0 & (0<x<1)\end{cases}$