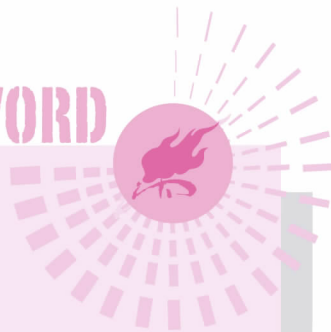




FOREWORD



思路决定出路

(代前言)

思路决定出路,创路决定活路。

不同的教学思路,就有不同的教学效果。不同的编写思路,就有不同的教辅用书。

正确的教学思路能使你好学乐学、如沐春风。科学的思维模式,能使你左右逢源、绝处逢生。

基于这种思考,我们深入研究了最新的课改精神和高考动态,吸收了最先进的教研成果,汇集了大批实力派名家名师全力打造、倾心推出了这套《导学大课堂》系列丛书。

丛书采用大单元、小课时的编写模式,设置“课前导引、课堂导学、课后导练”三大板块,充分体现“导学”的思想。“情境导学”设置学生熟悉的情境,以激发其自主学习的兴趣和动力;“问题导学”本着“教材内容问题化,基本知识能力化”的原则,将教材内容设置成一系列的问题,引导学生自主探究,并在探究的过程中体验到成功的喜悦和学习的快乐;“案例导学”通过经典案例的剖析来突破重难瓶颈,打通思维通道,掌握学习要领。本丛书具有以下特点:

● **科学设计 全程优化** 丛书与课堂教学同步,并在宏观上进行了科学安排,以达到“堂堂达标、单元过关”的目标。这不仅符合学生的认知规律和学习特点,还符合大多数地方的教学实际,尤其适合有教师指导下的课堂教学使用。

● **问题立意 激活思维** 学生解决问题的过程就是思考的过程、提高认识的过程。丛书通过对教材知识的挖掘和梳理,将知识设置成了一个一个问题。学生在探究问题的过程中,不仅激活了思维,挖掘出了潜能,还能改变传统的学习方式,提高学习的效率。



FOREWORD

● **源于基础 构建网络** 丛书在深入挖掘学科知识点的基础上 ,还特别注意梳理各部分知识间的内在联系 ,使零散、孤立的知识汇聚在一起 ,并形成了具有系统性、条理性的网络结构 ,供学生在解决问题时迅速地检索、提取和应用。

● **循序渐进 逐级提升** 丛书遵循由浅入深、由易到难、由简到繁的原则 ,例题和习题都设置了科学、合理的梯度与坡度 ,最大限度地兼顾了不同层次和不同水平的学生 ,既能让一般水平的学生吃饱、吃好 ,又能使学有余力的学生胃口大开。

● **一种思想 万千气象** 丛书的各学科既遵循统一的指导思想和编写理念 ,又根据各自的特点和创编者的个性 ,在栏目设置、体例设计、布局谋篇上形成自己独特的风格 ,使各学科分册在呈现出异彩纷呈、百花争妍态势的同时 ,又与其他学科自然和谐地组成一个有机的整体。

丛书编委会



CONTENTS

目录

第一章 集合与函数概念	1
1.1 集 合	1
1.1.1 集合的含义与表示	1
1.1.2 集合间的基本关系	5
1.1.3 集合的基本运算	9
1.2 函数及其表示	12
1.2.1 函数的概念	12
1.2.2 函数的表示法	18
1.3 函数的基本性质	25
1.3.1 单调性与最大(小)值	25
1.3.2 奇偶性	29
整合提升	34
第二章 基本初等函数(I)	39
2.1 指数函数	39
2.1.1 指数与指数幂的运算	39
2.1.2 指数函数及其性质	43
2.2 对数函数	48
2.2.1 对数与对数运算	48
2.2.2 对数函数及其性质	52
2.3 幂函数	58
整合提升	63



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS



第三章 函数的应用	68
3.1 函数与方程	68
3.1.1 方程的根与函数的零点	68
3.1.2 用二分法求方程的近似解	72
3.2 函数模型及其应用	76
3.2.1 几类不同增长的函数模型	76
3.2.2 函数模型应用举例	79
整合提升	84
模块综合测试(一)	90
模块综合测试(二)	92
参考答案	95



第一章 集合与函数概念

本章要览

1. 集合语言是现代数学的基本语言,通过本章的学习,要学会使用集合语言表示有关数学对象,并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换,感受集合语言的意义和作用.集合作为语言表示常用列举法和描述法.
2. 元素与集合是“属于”“不属于”关系,元素具有确定性、互异性、无序性.
3. 理解集合与集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
4. 会求两个简单集合的并集与交集,会求给定子集的补集.
5. 通过丰富实例,进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型,在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数,体会对应关系在刻画函数概念中的作用;了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域.
6. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图像法、列表法、解析法)表示函数.

1.1

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示



课前导引



问题导入

1. “所有的数学难题”能否构成一个集合?

解答: 由于“所有的数学难题”中的元素不确定,即无法判断一个数学题目是否是该集合中的元素,不能构成集合.

2. $\{x, x^2 - x\}$ 能否表示一个数集?

解答: 不一定. 若 $x = x^2 - x$, 即 $x = 0$ 或 $x = 2$ 时, $\{x, x^2 - x\}$ 不能表示一个数集.



知识结构

集合的含义与表示

1. 集合的概念: 把 _____ 称为集合, 把 _____

统称为元素.

2. 集合中元素的性质: (1) _____; (2) _____; (3) _____.

3. 集合的表示方法

(1) 列举法: 将集合中的元素 _____, 写在 _____ 内表示集合的方法. 使用列举法应注意: ① _____; ② _____; ③ _____.

(2) 描述法: 用集合所含元素的 _____ 来表示集合的方法. 使用描述法应注意: ① 写清楚集合中元素的 _____, 如 $\{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$, 不能写成 $\{x > 2\}$; ② 说明该集合中元素的 _____; ③ 所有描述的内容都写在 _____ 内.

4. 元素与集合的关系: 一般地用大写拉丁字母如 A, B, C 表示集合, 用小写拉丁字母 a, b, c 表示集合中的元素, 如果 a 是集合 A 中的元素就说 a _____ 集合 A , 记作 $a \in A$; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a _____ A , 记作 $a \notin A$.

集合

智慧越是遮掩越是明亮,正像你的美貌因为蒙上黑纱而十倍动人.——莎士比亚

5. 常用数集及其记法: $\mathbf{N}$ 为 _____ 组成的集合,即自然数集, $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 为 _____ 组成的集合; $\mathbf{Z}$ 为 _____ 组成的集合; $\mathbf{Q}$ 为 _____ 组成的集合, $\mathbf{R}$ 为 _____ 组成的集合.



三点剖析

一、集合的概念

【例1】判断下列命题是否正确,并说明理由.

- (1) $\{\mathbf{R}\} = \mathbf{R}$;
- (2) 方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y=x+1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x=1, y=2\}$;
- (3) $\{x|y=x^2-1\} = \{y|y=x^2-1\} = \{(x, y)|y=x^2-1\}$;
- (4) 平面内线段 MN 的垂直平分线可表示为 $\{P|PM=PN\}$.

思路分析: 以上几种命题都是同学们在初学过程中极易出错的几种典型类型. 处理此类问题关键在于要正确而深刻地理解集合的表示方法.

解: (1) $\{\mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ 是不正确的, $\mathbf{R}$ 通常为 $\mathbf{R} = \{x|x \text{ 为实数}\}$, 即 $\mathbf{R}$ 本身可表示为全体实数的集合, 而 $\{\mathbf{R}\}$ 则表示含有一个字母 $\mathbf{R}$ 的集合, 它不能为实数的集合.

(2) 方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y=x+1 \end{cases}$ 的解集为 $\{x=1, y=2\}$ 是不对的, 因为解集的元素是有序实数对 (x, y) , 正确答案应为 $\{(x, y)|\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\} = \{(1, 2)\}$.

(3) $\{x|y=x^2-1\} = \{y|y=x^2-1\} = \{(x, y)|y=x^2-1\}$ 是不正确的.

$\{x|y=x^2-1\}$ 表示的是函数自变量的集合, 它可以为 $\{x|y=x^2-1\} = \{x|x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

$\{y|y=x^2-1\}$ 表示的是函数因变量的集合, 它可以为 $\{y|y=x^2-1\} = \{y|y \geq -1\}$.

$\{(x, y)|y=x^2-1\}$ 表示点的集合, 这些点在二次函数 $y=x^2-1$ 的图象上.

(4) 平面上线段 MN 的垂直平分线可表示为 $\{P|PM=PN\}$ 是正确的.

温馨提示

正确理解集合表示方法对以后的学习有极大帮助. 特殊数集用特定字母表示有特别规定, 不能乱用; 二元一次方程组的解集必须为 $\{(x, y)|\begin{cases} x=? \\ y=? \end{cases}\}$ 的形式; 对描述法表示的集合一定要认清竖杠前面的元素是谁, 竖杠后其特征又是什么.



各个击破

类题演练 1

- (1) 下列命题是假命题的个数为 _____.
 - ① $\{1, 2\} = \{(1, 2)\}$ ② $\emptyset = \{x|x+1=1\}$
 - ③ $\begin{cases} x-y-8=0, \\ 2x+y+2=0 \end{cases}$ 解的集合为 $\{(x, y)|x=2 \text{ 或 } y=-6\}$ ④ $\sqrt{15} \in \{x|x \leq 3\sqrt{2}\}$ ⑤ $\{P|PO=3 \text{ cm}\}$ (O 是定点) 表示圆
- (2) 判断下列表示能否视为集合表示:
 - ① $\{1, 2, 3, \dots\}$;
 - ② $\{s=t^2+1\}$;
 - ③ $\{\text{正方形}\}$.

- (3) 可以表示方程组 $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3 \end{cases}$ 的解集的是 _____.
 - ① $\{x=2, y=1\}$ ② $\{(x, y)|(2, 1)\}$ ③ $\{2, 1\}$
 - ④ $\{(2, 1)\}$ ⑤ $\{(x, y)|x=2 \text{ 或 } y=1\}$ ⑥ $\{(x, y)|x=2 \text{ 且 } y=1\}$ ⑦ $\{(x, y)|\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}\}$

变式提升 1

实数 $\{3, x, x^2-2x\}$ 中的元素 x 应满足的条件为: _____.

【例2】已知 $a \in \{1, -1, a^2\}$, 则 a 的值为_____.

解析: 处理该类问题的关键是对 a 进行分类讨论, 利用元素的互异性解题.

$$\because a \in \{1, -1, a^2\},$$

$$\therefore a \text{ 可以等于 } 1, -1, a^2.$$

(1) 当 $a=1$ 时, 集合则为 $\{1, -1, 1\}$, 不符合集合元素的互异性. 故 $a \neq 1$.

(2) 同上, $a=-1$ 时也不成立.

(3) $a=a^2$ 时, 得 $a=0$ 或 $1, a=1$ 不满足舍去, $a=0$ 时集合为 $\{1, -1, 0\}$. 综上, $a=0$.

答案: 0

温馨提示

集合元素的互异性指集合中元素必须互不相同, 无序性指集合中的元素与顺序无关. 因此在处理元素为字母的集合问题时, 既要注意对字母进行讨论, 又要自觉注意集合元素的互异性、确定性.

二、运用集合的两种表示方法正确地表示集合

【例3】用列举法表示下列集合.

(1) $\{y | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\};$

(2) $\{(x, y) | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\}.$

思路分析: 首先认准描述法所表示集合的代表元素, 然后根据条件求其值, 用列举法将集合中的元素不计次序、不重复、不遗漏地列出来.

解: (1) 因为 $x \leq 3, x \in \mathbf{N}$, 所以 $x=0, 1, 2, 3$. 所以 $y=-2, -1, 2, 7$. 所以 $\{y | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\}$ 用列举法表示为 $\{-2, -1, 2, 7\}$.

(2) 由上题可知, $\{(x, y) | y = x^2 - 2, x \leq 3, x \in \mathbf{N}\}$ 用列举法表示为 $\{(0, -2), (1, -1), (2, 2), (3, 7)\}$.

温馨提示

列举法适合于表示集合是有限集, 且元素个数较少, 但有时也可表示无限集或个数较多的集合, 如: $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

【例4】用描述法表示下列集合.

(1) 偶数集;

(2) $\{2, 4, 6, 8\};$

(3) 坐标平面内第一象限的点组成的集合.

解: (1) $\{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\};$

(2) $\{x | x = 2n, 1 \leq n \leq 4, n \in \mathbf{Z}\};$

(3) $\{(x, y) | x > 0, \text{ 且 } y > 0\}.$

温馨提示

用描述法表示集合时, 要弄清楚元素的特征, 使其具有符合性质的都属于集合, 不具有性质的不属于集合.

类题演练 2

集合 $A = \{a, \frac{b}{a}, 1\}, B = \{a^2, a+b, 0\}, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$. 若 $A=B$, 求 $a^{2006} + b^{2006}$ 的值.

变式提升 2

已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 + 2x + a = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求这个元素.

类题演练 3

用列举法表示下列集合.

(1) 不大于 10 的非负偶数;

(2) 方程 $(x-1)^2(x-3)=0$ 的解集;

(3) 方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集.

变式提升 3

2006 山东高考, 1 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}, B = (2, 3)$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ()
A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

类题演练 4

用描述法表示下列集合.

(1) 所有正奇数组成的集合;

(2) 坐标平面内 x 轴上的点组成的集合.

变式提升 4

用适当的方法表示下列集合.

(1) 由不等式 $x-3 > 2$ 的所有解组成的集合;

(2) 由方程组 $\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-4y=-8 \end{cases}$ 的所有解组成的集合;

(3) 由小于 10 的非负奇数组成的集合.

三、集合概念再理解

【例5】判断以下对象的全体能否组成集合.

- (1)高一·一班的身高大于 1.75 m 的学生;
(2)高一·一班的高个子学生.

思路分析:该例贴近于现实生活,能较好地帮助同学们正确理解集合元素的确定性.

解:(1)高一·一班中身高大于 1.75 m 的学生是确定的,因此身高大于 1.75 m 的学生可以组成集合.

(2)高一·一班中的高个子学生没有具体身高标准,因此高个子学生不能组成集合.

温馨提示

判断某组对象是否为集合必须同时满足三个特征:(1)确定性,(2)互异性,(3)无序性,特别是确定性比较难理解,是指元素和集合的关系是非常明确的,要么该元素属于集合,要么该元素不属于集合,而不是模棱两可.

类题演练 5

以下说法的对象能组成集合的有_____.

- ①所有的奇数 ②不小于-2 的数 ③满足方程 $2x-y=0$ 的解为坐标的点 ④很小的数 ⑤漂亮的花 ⑥不满足 $x+1=0$ 的实数

变式提升 5

已知满足“如果 $x \in A$,则 $6-x \in A$ ”的自然数 x 构成集合 A .

- (1)若 A 是一个单元素集,则 $A=$ _____;
(2)若 A 有且只有两个元素,则 $A=$ _____.



基础达标

- 给出的对象不能构成集合的是 ()
A. 直角坐标系中横纵坐标互为相反数的点
B. 平方后不等于 9 的实数
C. 无限靠近 2 的实数 x
D. 方程 $x+y=3$ 的解
- 下列集合中,不是方程 $(x-1)x(x+1)=0$ 解集的集合是 ()
A. $\{1,0,-1\}$
B. $\{0,-1,1\}$
C. $\{x|x(x+1)(x-1)=0\}$
D. $\{(-1,0,1)\}$
- 下列表示的关系中正确的个数有 ()
① $0 \notin \mathbf{N}$ ② $3.14 \notin \mathbf{Q}$ ③ $\pi \in \mathbf{R}$ ④ $3\sqrt{2} \in \{x|x \leq \sqrt{17}\}$
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 集合 $\{x|x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}\}$ 中元素的个数有 ()
A. 2 个 B. 3 个
C. 4 个 D. 无法说清
- 用列举法写出与集合 A, B 相等的集合.
 $A=\{x \in \mathbf{N} | x \geq 1 \text{ 且 } x \leq 2\} =$ _____;
 $B=\{x|x=1 \text{ 或 } x=2\} =$ _____.
- 集合 $M=\{x \in \mathbf{N} | x=5-m, m \in \mathbf{N}\}$ 中元素的个数为_____.

- 用描述法表示在自然数中被 7 除余 2 的数为_____.
- 若 $1 \in A=\{x|x^2-a=0\}$,则 $B=\{y|y=x+1, x \in A\} =$ _____.
- 下列几组集合中哪些是表示相同的集合:
(1)集合 $M=\emptyset, N=\{0\}$;
(2)集合 $M=\{x|x^2-3x+2=0\}, N=\{y|y^2-3y+2=0\}$;
(3)集合 $M=\{x|x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $N=\{x=4k \pm 1, k \in \mathbf{Z}\}$;
(4)集合 $M=\{\pi\}, N=\{3.141\ 5\}$.
- 用适当的方法表示下列集合.
(1)2008 年举办奥运会的国家所组成的集合;
(2)由 0,1,2 三个数字所组成的一切可能的无重复数字的自然数集合;
(3)直角坐标平面上 y 轴上的点的集合;
(4)方程组 $\begin{cases} 2x=y, \\ xy=1 \end{cases}$ 的解集.



综合运用

- 11 已知集合 $A = \{y | y = -x^2 + 5x - 4, x \in \mathbf{R}\}$, 则有 ...
 ()
 A. $1 \in A$, 且 $4 \in A$ B. $1 \in A$, 但 $4 \notin A$
 C. $1 \notin A$, 但 $4 \in A$ D. $1 \notin A$, 且 $4 \notin A$
- 12 已知集合 $M = \{m | m = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则下列元素中属于集合 M 的元素个数是 ()
 ① $m = 1 + \sqrt{2}\pi$ ② $m = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ③ $m = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$
 ④ $m = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 13 集合 $M = \{y \in \mathbf{Z} | y = \frac{8}{x+3}, x \in \mathbf{Z}\}$ 的元素个数是 ...
 ()
 A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个
- 14 设集合 $P = \{3, 4, 5\}$, $Q = \{4, 5, 6, 7\}$, 定义 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则 $P * Q$ 中元素的个数是 ()
 A. 3 个 B. 7 个 C. 10 个 D. 12 个
- 15 已知 $A = \{x \in \mathbf{N} | \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}\}$, 试用列举法表示 A .

- 16 设 A 表示集合 $\{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, B 表示集合 $\{|a + 3|, 2\}$, 已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$. 求 a 的值.



拓展探究

- 17 规定集合中的元素有有限多个, 则称该集合为有限集, 集合中的元素有无限多个, 称集合为无限集. 不含任何元素的集合为空集.
 当 a, b 满足什么条件时, 集合 $A = \{x | ax + b = 0\}$ 是有限集、无限集、空集?
- 18 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$:
 (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 值, 并求出这个集合;
 (2) 若 A 中至多具有一个元素, 求 a 的取值范围.

1.1

1.1.2 集合间的基本关系



课前导引



问题导入

1. 你能正确地理解空集的含义吗? 你能举出一些空集的例子吗?
解答: 不含任何元素的集合叫做空集. 如 $M = \{x | x^2 + 1 = 0\}$.
2. 你能准确区分符号“ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”, “ $\subseteq$ ”与“ $\subsetneq$ ”的区别吗?
解答: “ $\in$ ”是用于表示元素与集合之间关系的, 若元素 a 是集合 A 中的元素, 则 $a \in A$. 而“ $\subseteq$ ”是用于表示两个集合之间关系的, 若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素, 则 $A \subseteq B$. 而“ $\subsetneq$ ”也是用于两个集合之间的关系, 若 $A \subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素不在 A 中, 则 $A \subsetneq B$.



知识结构

1. 子集: (1) 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中都是集合 B 中的元素, 称集合 A 为集合 B 的 _____, 记作 _____ 或 _____.
 当 A 不是 B 的子集时, 记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.
 (2) 符号语言表示子集: 若任意 $x \in A$, 有 $x \in B$, 则 _____.
2. 真子集: 若集合 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 _____, 称集合 A 是集合 B 的 _____, 记作 _____ 或 _____.
3. 空集: _____ 的集合, 记为 _____.
 规定: 空集是任何集合的子集, 用符号语言表示为

集
合

- _____;若 A 非空(即 _____),则有 $\emptyset \subseteq A$.
4. 子集、真子集的性质:① $A \subseteq A$, ② $\emptyset \subseteq A$, ③ $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$, ④ $A \subseteq B$, 且 $B \subsetneq C \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 两集合相等:若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.
6. 含 n 个元素的集合 A 的子集个数为 _____, 真子集个数为 _____, 非空真子集的个数为 _____.



第一章



三点剖析

一、集合间的关系

【例1】判断下列各式是否正确.

- (1) $\sqrt{2} \subseteq \{x | x \leq 2\}$;
- (2) $\sqrt{2} \in \{x | x \leq 2\}$;
- (3) $\{\sqrt{2}\} \subseteq \{x | x \leq 2\}$;
- (4) $\emptyset \in \{x | x \leq 2\}$;
- (5) $\emptyset \subseteq \{x | x \leq 2\}$;
- (6) $\{a, b, c, d\} \subseteq \{e, f, b, d, g\}$.

思路分析: 要注意元素与集合之间、集合与集合之间关系符号的不同, 绝对不能混淆.

解: 根据元素与集合、集合与集合之间的有关规定, (1)(4)(6)不正确, (2)(3)(5)正确.

温馨提示

一般来说, 元素与集合之间应该用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”; 而“ $\subseteq$, $\subset$ ”应该出现于集合与集合之间; $\emptyset$ 作为特殊集合应遵从 $\emptyset \subseteq A, \emptyset \subsetneq A$ (非空). 但这不是绝对的, 选择的关键在于具体分析二者的关系. 例 $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1\}\}$, 而 $\emptyset \in \{\emptyset, 1\}, \emptyset \subsetneq \{\emptyset, 1\}$ 都是对的.

二、运用集合间的关系解题

【例2】 $\{a, b\} \subseteq A \subsetneq \{a, b, c, d, e\}$, 求所有满足条件的集合 A .

思路分析: 从子集、真子集的概念着手解答.

解: 因为 $\{a, b\} \subseteq A$, 所以 A 中必有元素 a, b .

因为 A 是 $\{a, b, c, d, e\}$ 的真子集, 所以 A 中元素可以有 2 个, 3 个, 4 个三种情形. 具体为: $\{a, b\}$; $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, b, e\}$; $\{a, b, c, d\}$; $\{a, b, c, e\}$; $\{a, b, d, e\}$ 共 7 个.

温馨提示

1. 按顺序摆, 做到不重不漏.
2. 正确地把集合语言表述的问题“翻译”成普通数学语言.



各个击破

类题演练 1

下列各式中, 正确的个数是 _____ ()

- ① $\emptyset = \{0\}$ ② $\emptyset \subseteq \{0\}$ ③ $\emptyset \in \{0\}$ ④ $0 = \{0\}$
- ⑤ $0 \in \{0\}$ ⑥ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$

- A. 1 个 B. 2 个
- C. 3 个 D. 4 个

变式提升 1

在以下五个写法中, 写法正确的个数有 _____ ()

- ① $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$ ② $\emptyset \subsetneq \{0\}$ ③ $\{0, 1, 2\} \subseteq \{1, 2, 0\}$
- ④ $0 \in \emptyset$ ⑤ $1 \in \{x | x \subseteq \{1, 2\}\}$

- A. 1 个 B. 2 个
- C. 3 个 D. 4 个

类题演练 2

求满足条件 $\{x | x^2 + 1 = 0\} \subsetneq M \subseteq \{x | x^2 - 1 = 0\}$ 的集合 M 的个数.

变式提升 2

集合 $\{x \in \mathbb{N} | x = -y^2 + 6, y \in \mathbb{N}\}$, 试写出该集合的所有真子集.

【例3】集合 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{a^2\}$, 且 $B\subseteq A$, 求实数 a 的取值集合.

思路分析: 在利用 $B\subseteq A$ 这一条件时要注意对 a 进行讨论.

解: 由于 $B=\{a^2\}\subseteq A=\{1,3,a\}$,

因此, ① $a^2=1$, 得 $a=1$ (不合题意舍去) 或 $a=-1$;

② $a^2=3$ 得 $a=\pm\sqrt{3}$;

③ $a^2=a$ 得 $a=1$ (不合题意舍去) 或 $a=0$.

综上, 实数 a 的取值集合为 $\{-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\}$.

温馨提示

1. 分类讨论思想是很重要的思想方法, 注意掌握分类方法;

2. 在解决集合的元素问题时, 最后结论要注意检验元素是否具备互异性.

三、元素与集合之间、集合与集合之间的关系再讨论

【例4】已知集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{x|x\in A\}$, $C=\{x|x\subseteq A\}$, 试判断 A, B, C 之间的关系.

解: 集合 B 中的代表元素是 x , x 满足的条件是 $x\in A$, 因此 $x=a$ 或 $x=b$, 即 $B=\{a,b\}=A$, 而集合 C 则不然, 集合 C 的代表元素虽然也是 x , 但 x 代表的是集合, $x\subseteq A$, 因此, $x=\{a\}$ 或 $x=\{b\}$ 或 $x=\{a,b\}$ 或 $x=\emptyset$, 即 $C=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, 此时集合 C 中的元素是集合, 故 $B\subseteq C, A\in C$.

$\therefore A=B, B\subseteq C, A\in C$.

温馨提示

对于元素与集合、集合与集合之间的 $\in, \subseteq$ 关系要理解透彻, “ $\in$ ” 是用于描述元素与集合之间的关系, 即只要元素 a 是构成集合 A 的一个元素, 则 $a\in A$, 如 $\{1\}$ 与 $\{\{1\}, \{2\}\}$, 尽管 $\{1\}$ 是一个集合, 但是 $\{1\}$ 是构成集合 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 的一个元素, 故 $\{1\}\in\{\{1\}, \{2\}\}$, “ $\subseteq$ ” 是用于描述集合与集合之间的关系, 如 $\{1, 2, 3\}\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$.

类题演练 3

已知集合 $A=\{1,3,a\}$, $B=\{1, a^2-a+1\}$ 且 $A\supseteq B$, 求 a 的值.

变式提升 3

设 $A=\{x|4x+p<0\}$, $B=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>2\}$, 若使 $A\subseteq B$, 则 p 的取值范围是_____.

类题演练 4

集合 $A=\{(x,y)|\frac{y}{x}=1\}$ 与 $B=\{(x,y)|y=x\}$ 的关系是_____ ()

- A. $A=B$ B. $A\subseteq B$
C. $A\supseteq B$ D. $A\neq B$

变式提升 4

已知 $a, x\in\mathbf{R}$, $A=\{2, 4, x^2-5x+9\}$, $B=\{3, x^2+ax+a\}$, 求使 $2\in B, B\subseteq A$ 的 a 与 x 的值.



基础达标

- 1 下列表示中错误的是_____ ()
① $\{0\}=\emptyset$ ② $\{2\}\subseteq\{2,4,6\}$ ③ $\{2\}\in\{x|x^2-3x+2=0\}$ ④ $0\in\{0\}$

- A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ②③

- 2 设 $A=\{\text{正方形}\}$, $B=\{\text{矩形}\}$, $C=\{\text{平行四边形}\}$, $D=\{\text{梯形}\}$, 则下列包含关系中不正确的是_____ ()
A. $A\subseteq B$ B. $B\subseteq C$
C. $C\subseteq D$ D. $A\subseteq C$

- 3 已知集合 $M=\{x|x=2m, m\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{y|y=2(n+$

- 1), $n \in \mathbf{Z}$, 则 ()
- A. $M \subseteq N$ B. $M \supseteq N$
C. $M = N$ D. $M \neq N$
- 4 下列四个集合中, 是空集的是 ()
- A. $\{x | x^2 = 0\}$
B. $\{x | x - 1 < 0\}$
C. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$
D. $\{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$
- 5 集合 $M = \{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x | x = 6n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 M, N, P 的关系正确的是 ()
- A. $P \subseteq N \subseteq M$ B. $N = P \subseteq M$
C. $P \subseteq M = N$ D. $P \supseteq M = N$
- 6 若集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | \frac{x-1}{x-2} = 0\}$, 则集合 A 与 B 的关系为 _____.
- 7 集合 $M \subseteq \{2, 3, 5\}$, 且 M 中至多有一个奇数, 则这样的集合个数为 _____.
- 8 集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 2(k + 1), k \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $E = \{x | x = 2k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 写出上述集合中相等的集合: _____.
- 9 **2006 上海文科, 1** 已知集合 $A = \{-1, 3, m\}$, 集合 $B = \{3, 4\}$. 若 $B \subseteq A$. 则实数 $m =$ _____.
- 10 设 $M = \{(x, y) | mx + ny = 4\}$ 且 $\{(2, 1), (-2, 5)\} \subseteq M$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.



综合运用

- 11 集合 $P = \{x, 1\}$, $Q = \{y, 1, 2\}$, 其中 $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 且 P 是 Q 的真子集, 把满足上述条件的一对有序整数 (x, y) 作为一个点, 这样点的个数是 _____.
- 12 设 $M = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则 a 的值为 _____.
- 13 若 $x \in \mathbf{R}$, $A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\}$, 求使 $A = \{2, 3, 4\}$ 的 x 值.

- 14 $a, x \in \mathbf{R}$, $B = \{3, x^2 + ax + a\}$, $C = \{x^2 + (a + 1)x - 3, 1\}$, 求使 $B = C$ 的 a 与 x 的值.

- 15 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 3x + 3 = 0\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} | y^2 - 5y + 6 = 0\}$, $A \subseteq P \subseteq B$, 求满足条件的集合 P .

- 16 已知 $A = \{1, 1 + d, 1 + 2d\}$, $B = \{1, q, q^2\}$, 当 $A = B$ 时, 求 d, q 的值.



拓展探究

- 17 设集合 $M = \{x | 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$, $N = \{x | mx = 1\}$, 且 $N \subseteq M$, 求实数 m 的取值集合.
- 18 若集合 $A = \{x | x = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbf{R}\}$, 试确定集合 A, B 之间的关系.

1.1.3 集合的基本运算



课前导引



问题导入

- 你能准确地利用并集、交集、补集的概念解决集合运算吗？
- 如何利用集合运算的性质作依据解决相关问题？



知识结构

1. 并集的概念

- 自然语言表示：由____属于集合 A ____属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的____。
- 符号语言表示： $A \cup B =$ _____。
- 图形语言(venn图)表示：_____。

2. 交集的概念

- 自然语言表示：由属于集合 A ____属于集合 B 的所有元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的_____。

- 符号语言表示： $A \cap B =$ _____。
- 图形语言表示(Venn图)：_____。

3. 补集的概念

- 自然语言表示：对于集合 A ，由____中不属于集合 A 的所有元素所组成的集合，称为集合 A 相对于全集 U 的____，简称为集合 A 的补集。
- 用符号语言表示： $\complement_U A =$ _____。
- 用图形语言表示(Venn图)：_____, 阴影部分表示 $\complement_U A$ 。

4. 有关集合运算的性质

- $A \cup B$ ____ $B \cup A$; $A \cup A =$ ____; $A \cup \emptyset =$ _____。
- $A \cap B$ ____ $B \cap A$; $A \cap A =$ ____; $A \cap \emptyset =$ _____。
- $(\complement_U A) \cup A =$ ____; $(\complement_U A) \cap A =$ ____; $\complement_U (\complement_U A) =$ _____。
- $A \cap B = A \Leftrightarrow$ ____; $A \cup B = B \Leftrightarrow$ ____; $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$ 。
- $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 。

1.1



课堂导学



三点剖析

一、交集、并集、补集的概念与运算

【例1】若全集 $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbb{N}^*\}$, $M = \{1, 7, 8\}$, $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $S = \{1, 4, 7\}$, 则 $(M \cup P) \cap (\complement_U S) =$ _____。

解析： $U = \{x | x \leq 9, x \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(M \cup P) \cap (\complement_U S) = \{2, 3, 5, 8\}$ 。

答案： $\{2, 3, 5, 8\}$

温馨提示

- 进行集合运算应首先要弄清楚各集合是由什么元素构成的，然后再根据交集、并集、补集的概念进行运算。
- 集合间的包含关系的判断及集合的运算一般使用韦恩图。



各个击破

集合

类题演练 1

- 设全集 $U = \mathbb{N}$, $P = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \{x | x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则 $\mathbb{N}$ 可以表示为 _____ ()
- $P \cap Q$
 - $(\complement_U P) \cup Q$
 - $P \cup (\complement_U Q)$
 - $(\complement_U P) \cup (\complement_U Q)$

变式提升 1

- 设全集 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $A = \{1, |a-5|, 9\}$, $\complement_U A = \{5, 7\}$, 则 a 的值是 _____ ()
- 2
 - 8
 - 2 或 8
 - 2 或 8

【例2】已知全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x|-4<x<\frac{1}{2}\}$, $B=\{x|x+4\leq 0\}$, $C=\{x|2x\geq 1\}$, 则集合 C 等于..... ()

- A. $A\cap B$ B. $A\cup B$
C. $\complement_U(A\cap B)$ D. $\complement_U(A\cup B)$

解析: 利用数轴解决有关不等式的数集运算是最有效的工具, 借助数轴易得 $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=\{x|x<\frac{1}{2}\}$, 所以 $C=\complement_U(A\cup B)$.

答案: D

温馨提示

数集的运算一般使用数轴.

二、交集与并集的概念符号之间的区别与联系

【例3】已知 $A=\{y|y=x^2-2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=x, x\in\mathbf{R}\}$. 求 $A\cap B, A\cup B$.

思路分析: 本题注重考查集合概念及运算, 其中集合中的元素 y 的本质是许多同学认识不足的, 它其实是函数的因变量, 集合为函数因变量的取值集合.

解: $A=\{y|y=x^2-2, x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geq -2\}$, $B=\{y|y=x\}=\mathbf{R}$, 则 $A\cap B=\{y|y\geq -2\}$, $A\cup B=\mathbf{R}$.

温馨提示

1. 对于描述法给出的集合, 要抓住竖线前的代表元素及它具有的性质再进行运算.
2. 本题中的两个集合都是数集, 且是每个函数的函数值构成的集合.

三、集合运算性质的运用

【例4】集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|ax-2=0\}$, 若 $A\cup B=A$, 则 a 能取到的所有值的集合为_____.

解析: 处理此类问题有两处值得同学们注意, 一是明确 $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$; 二是 $B=\{x|ax=2\}\neq\{x|x=\frac{2}{a}\}$, 要注意对 a 是否为 0 进行讨论.

$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}$, $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$. 因此集合 B 只能为单元素集或 $\emptyset$.

当 $B=\{1\}$ 时, 即 $1\in B=\{x|ax-2=0\}$, 得 $a=2$;

同理, 当 $B=\{2\}$ 时, 得 $a=1$;

当 $B=\emptyset$ 时, 即 $ax=2$ 无解, 得 $a=0$.

综上, a 能取到的值所组成的集合为 $\{0, 1, 2\}$.

答案: $\{0, 1, 2\}$

温馨提示

1. $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$, $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$ 两个性质常常作为“等价转化”的依据, 要特别注意当 $A\subseteq B$ 时, 往往需要按 $A=\emptyset$ 和 $A\neq\emptyset$ 两种情况分

类题演练 2

已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x<1$ 或 $x>2\}$, 集合 $B=\{x|x<-3$ 或 $x\geq 1\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$, $A\cap B$, $A\cup B$.

变式提升 2

集合 $M=\{x|-1\leq x\leq 2\}$, $N=\{x|x-a\geq 0\}$, 若 $M\cap N\neq\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

类题演练 3

已知 $A=\{y\in\mathbf{N}|y=x^2-4x+10\}$, $B=\{y\in\mathbf{N}|y=-x^2-2x+12\}$, 求 $A\cap B$.

变式提升 3

2006 江苏高考, 7 若 A, B, C 为三个集合, $A\cup B=B\cap C$, 则一定有..... ()

- A. $A\subseteq C$ B. $C\subseteq A$
C. $A\neq C$ D. $A=\emptyset$

类题演练 4

若集合 $P=\{1, 2, 3, m\}$, $Q=\{m^2, 3\}$, 满足 $P\cap Q=Q$, 求 m 的值.

变式提升 4

设集合 $M=\{x|x<3\}$, $N=\{x|x>-2\}$, $Q=\{x|x-a\geq 0\}$, 令 $P=M\cap N$.

(1) 求集合 P ;

(2) 若 $P\subseteq Q$, 求实数 a 的取值范围;

类讨论,而这一点却很容易被忽视.如本题中由 $B \subseteq A$ 应分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种情况考虑,尽管本题中 $B = \emptyset$ 不适合题意,但也不要遗漏这种情况.

2. 要注重集合语言与数学文字语言之间的转化.

(3) 若 $P \cap Q = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 求实数 a 的取值范围;

(4) 若 $P \cap Q = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



基础达标

- 1 满足 $A \cup \{a\} = \{a, b, c\}$ 的集合 A 的个数为 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 2 集合 $S = \{x \in \mathbb{N}^* | -2 < x < 9\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $P = \{1, 3, 6\}$, 则 $\{2, 7, 8\}$ 是 ()
A. $M \cup P$ B. $M \cap P$
C. $(\complement_S M) \cup (\complement_S P)$ D. $(\complement_S M) \cap (\complement_S P)$
- 3 设 M, P 是两个非空集合, 规定 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 根据规定, $M - (M - P)$ 等于 ... ()
A. M B. P
C. $M \cup P$ D. $M \cap P$
- 4 已知 $I = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 7\}$, 集合 $A = \{3, 5, 7\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 ()
A. $\complement_I A = \{1, 2, 4, 6\}$
B. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
C. $A \cap \complement_I B = \emptyset$
D. $B \cap \complement_I A = \{2, 4\}$
- 5 集合 $M = \{x | 2x^2 + 3ax + 2 = 0\}$, $N = \{x | 2x^2 + x + b = 0\}$, $M \cap N = \{\frac{1}{2}\}$, 则 $a + b =$
- 6 若集合 $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x^2 \leq 25\}$, 则 $A \cup B$ 中元素个数有
- 7 集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则 $M \cap N =$
- 8 集合 $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 6\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围为
- 9 某中学高中一年级学生参加数学小组的有 45 人, 参加物理小组的有 37 人, 其中同时参加数学小组和物理小组的有 15 人, 数学小组和物理小组都没有参加的有 127 人, 问该校高中一年级共有多少

学生?

- 10 已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$.
(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.



综合运用

- 11 设 U 为全集, M, G 是非空集合, $M \not\subseteq U, G \not\subseteq U, M \not\subseteq G, G \not\subseteq M$, 则 $(M \cap G) \cup M$ 等于 ()
A. $M \cap G$ B. $\complement_U M$ C. $\emptyset$ D. M
- 12 设集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 7\}$, $S = \{x | k + 1 \leq x \leq 2k - 1\}$, 若 $M \cap S = \emptyset$, 则 k 的取值范围是 ()
A. $k \leq 4$ B. $k < 2$ 或者 $k > 6$
C. $k < 0$ 或者 $k > 6$ D. $k < 0$
- 13 已知全集 $U = \{2, 0, 3 - a^2\}$, $P = \{2, a^2 - a - 2\}$, 且 $\complement_U P = \{-1\}$, 求实数 a .

一个能思想的人,才真正是一个力量无边的人.——巴尔扎克

- 14 设集合 $A = \{ |a+1|, 3, 5 \}$, 集合 $B = \{ 2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1 \}$, 当 $A \cap B = \{ 2, 3 \}$ 时, 求 $A \cup B$.

- 15 $A = \{ (x, y) | ax - y^2 + b = 0 \}$, $B = \{ (x, y) | x^2 - yx - b = 0 \}$, 已知 $A \cap B \supseteq \{ (1, 2) \}$, 求 a, b .

- 16 设全集 $U = \{ x \in \mathbf{N}^* | -2 < x+1 < 6 \}$, $A = \{ x | x^2 - 5x + m = 0 \}$, 若 $\complement_U A = \{ 1, 4 \}$, 求 m 的值.



拓展探究

- 17 已知集合 $A = \{ 1, 3, -a^2 \}$, $B = \{ 1, a-2 \}$, 是否存在实数 a , 使得 $A \cup B = A$? 若存在 a , 求出集合 A, B ; 若不存在, 请说明理由.

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念



课前导引

集合与函数概念



问题导入

- 你对函数是定义域到值域的对应怎样理解? 构成函数的三要素有哪些? 你能举一些生活中构成函数的例子吗?
- $y = f(x)$ 中的 f 指什么? 函数一定有解析式吗?
- 如何求函数的定义域?



知识结构

- 函数的定义: 设 A, B 是 _____ 的数集, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 _____ 的一个数, 在集合 B 中都有 _____ 确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 _____, $x \in A$. 其中 x 叫做 _____, x 的取值范围 A 叫做函数的 _____; 与 x 的值对应的值为 _____, 即 y 值叫做 _____, 函数值的集合 $\{ f(x) | x \in A \} = \{ y | y = f(x) \}$, 叫函

数的 _____.

2. 函数的三要素

- 函数的 _____、_____、对应关系, 符号表示 $f: A \rightarrow B$, A 为 _____, B 为 _____, f 为 _____.
- $y = f(x)$ 的内涵为: 当自变量为 x 时, 经过 _____ 对应的函数值为 _____ 即 y , $f(x)$ 不一定有具体解析式.
- 两个函数相等 $\Leftrightarrow$ 两个函数三要素相同 $\Leftrightarrow$ _____、_____、_____ 相同 $\Leftrightarrow$ 定义域、_____ 相同.
- 正比例函数 _____, 定义域为 _____, 值域为 _____; 一次函数 _____, 定义域为 _____, 值域为 _____; 反比例函数 _____, 定义域为 _____, 值域为 _____; 二次函数 _____, 定义域为 _____, 当 $a > 0$ 时, 值域为 _____, 当 $a < 0$ 时, 值域为 _____.
- $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$ 规定数集 $\{ x | a \leq x \leq b \}$ 用区间表示为 _____; 数集 $\{ x | a \leq x < b \}$ 用区间表示为 _____; 数集 $\{ x | a < x < b \}$ 用区间表示为 _____; 数集 $\{ x | x \geq a \}$ 用区间表示为 _____; 数集 $\{ x | x < b \}$ 用区间表示为 _____; 实数集 $\mathbf{R}$ 用区间表示为 _____. 以上各区间读者可试用数轴表示.



三点剖析



各个击破

一、函数的概念

【例1】下列对应是从集合 M 到集合 N 的函数的是 ... ()

- A. $M=\mathbf{R}, N=\mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x+1}$
 B. $M=\mathbf{R}, N=\mathbf{R}^+$ (正实数组成的集合), $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$
 C. $M=\{x|x \geq 0\}, N=\mathbf{R}, f: x \rightarrow y^2 = x$
 D. $M=\mathbf{R}, N=\{y|y \geq 0\}, f: x \rightarrow y = x^2$

思路分析: 本题主要考查函数的定义.

解: A. 对于 M 中的元素 -1 , N 中没有元素与之对应, 故该对应不是从 M 到 N 的函数. B. 对于 M 中的元素 -1 , N 中没有元素与之对应, 该对应 $f: M \rightarrow N$ 不是函数. C. 对于 M 中的任一元素如 $x=4$, 通过对应法则 $f: x \rightarrow y^2 = x$ 得到 N 中有两个元素 ± 2 与之对应, 故 $f: x \rightarrow y^2 = x$ 不是从 M 到 N 的函数.

答案: D

温馨提示

判断一个对应法则是否构成函数, 关键是看给出定义域内任一值, 通过给出的对应法则, y 是否有且只有一个元素与之对应.

【例2】下列四组函数中, 有相同图象的一组是 ... ()

- A. $y=x-1, y=\sqrt{(x-1)^2}$
 B. $y=\sqrt{x-1}, y=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$
 C. $y=2, y=\frac{2x^2+4}{x^2+2}$
 D. $y=1, y=x^0$

解析: $y=x-1$ 与 $y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ 的对应法则不同; $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, $y=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 两函数的定义域不同; $y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $y=x^0$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 两函数定义域不同; $y=2$ 与 $y=\frac{2x^2+4}{x^2+2}$ 是两相等的函数, 所以图象相同. 选 C.

答案: C

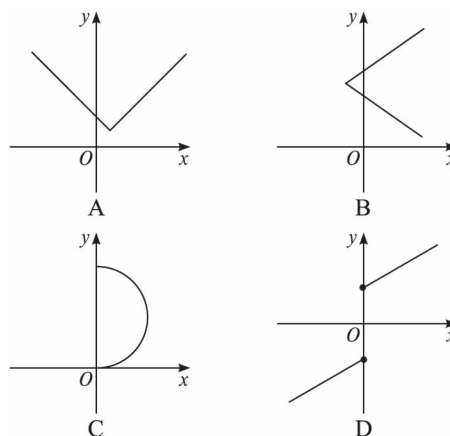
类题演练 1

下列关系中确定是函数关系吗?

- (1) $L=2\pi R$, 其中 R 表示圆的半径, L 表示圆的周长;
 (2) $S=S_0+vt$, 其中 S 表示物体运动的距离, t 表示运动时间, S_0 表示初始距离, v 表示匀速常数;
 (3) $A=\{x|x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}, B=\mathbf{R}$, 从集合 A 到集合 B 的对应关系是“求平方根”.

变式提升 1

下列图象可以作为函数 $y=f(x)$ 图象的是 ... ()



类题演练 2

下列四组函数中, 表示同一函数的是 ... ()

- A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$
 B. $f(x)=x^2+1, g(t)=t^2+1$
 C. $f(x)=x^2, g(x)=(x+1)^2$
 D. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

变式提升 2

下列各小题中的两个函数是否表示同一函数.

- (1) $y=\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 与 $y=\sqrt{x^2-1}$;