

目 录

MU LU

第一章 解三角形	1
1.1 正弦定理和余弦定理	1
1.1.1 正弦定理	1
1.1.2 余弦定理	8
1.2 应用举例(一).....	13
1.2 应用举例(二).....	19
1.3 实习作业	26
第二章 数列	35
2.1 数列的概念与简单表示法(一).....	35
2.1 数列的概念与简单表示法(二).....	40
2.2 等差数列(一).....	45
2.2 等差数列(二).....	51
2.3 等差数列的前 n 项和(一)	55
2.3 等差数列的前 n 项和(二)	61
2.4 等比数列(一).....	66
2.4 等比数列(二).....	71
2.5 等比数列的前 n 项和(一)	77
2.5 等比数列的前 n 项和(二)	84

第三章 不等式.....	104
3.1 不等关系与不等式	104
3.2 一元二次不等式及其解法(一)	110
3.2 一元二次不等式及其解法(二)	116
3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题	122
3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域	122
3.3.2 简单的线性规划问题	127
3.4 基本不等式 : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	134
模块测试卷(一).....	147
模块测试卷(二).....	151

第一章 解三角形

本章要览

● 目标导航

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能够解决一些简单的三角形度量问题.
2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

● 内容提要

本章是在学习了三角函数、平面向量等知识的基础上,进一步学习解三角形的知识.解三角形知识在数学和其他学科中有着广泛的应用,例如航海测量、地理测量、天文测量等领域都会应用到本章知识.本章的主要内容是两个重要定理,即正弦定理和余弦定理,以及这两个定理在解斜三角形中的应用.这两个定理是我们学习有关三角形知识的继续和发展,它进一步揭示了三角形的边角之间的关系,在生产、生活中有着广泛的应用.

● 学法指导

1. 学习本章知识应加强与向量知识的联系:在证明正弦、余弦定理时要注意与向量联系,将三角形中的量与向量中的量发生联系,特别是角的联系.
2. 学习本章知识应加强与三角函数知识的联系.
3. 学习本章过程中应注意正、余弦定理之间的联系.正弦定理和余弦定理是相通的,利用正弦定理解决的问题也可以用余弦定理解决,反之亦然,只是繁简程度不同.
4. 要熟练掌握两个定理的几种变形形式,积极总结适用正、余弦定理的题目特点,达到快速解决问题的目的.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理



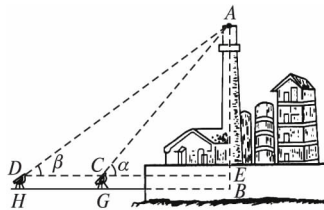
案例探究

【案例 1】某工厂有一个大烟囱 AB ,且烟囱的底部 B 是不可到达的,现要测量它的高度,应怎样去解决这个问题呢?

思路分析:由于建筑物的底部 B 是不可到达的,所以不能直接测量出建筑物的高.

由解直角三角形的知识,只要能测出一点 C 到建筑物的顶部 A 的距离 CA ,并测出由点 C 观察 A 的仰角,就可以计算出建筑物的高.所以应该设法借助解三角形的知识测出 CA 的长.

解析:选择一条水平基线 HG (如图),使 H 、 G 、 B 三点在同一条直线上.



由在 G 、 H 两点用测角仪器测得 A 的仰角分别是 α 、 β , $CD = a$,测角仪器的高是 h .

那么,在 $\triangle ACD$ 中,根据正弦定理可得

$$AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}, AB = AE + h = AC \sin \alpha + h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h.$$

第一章 解三角形

【案例 2】某海轮以 30 海里/时的速度航行，在 A 点测得海面上油井 P 在南偏东 60° ，向北航行 40 分钟后到达 B 点，测得油井 P 在南偏东 30° ，海轮改为北偏东 60° 的航向再行驶 80 分钟到达 C 点，求 P、C 间的距离。

解析：如图，在 $\triangle ABP$ 中，
 $AB = 30 \times \frac{40}{60} = 20$ ， $\angle APB = 30^\circ$ ， $\angle BAP = 120^\circ$ 。
 由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin \angle BPA} = \frac{BP}{\sin \angle BAP}$ 。
 即 $\frac{20}{\frac{1}{2}} = \frac{BP}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ，解得 $BP = 20\sqrt{3}$ 。
 在 $\triangle BPC$ 中， $BC = 30 \times \frac{80}{60} = 40$ ，
 由已知 $\angle PBC = 90^\circ$ 。
 $\therefore PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + 40^2} = 20\sqrt{7}$ (海里)。
 $\therefore P、C$ 间的距离为 $20\sqrt{7}$ 海里。



自学导引

1. 正弦定理：在一个三角形中，各边与它所对角的正弦值的比相等，即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

2. 三角形的元素：一般地，把三角形的三个角 A、B、C 和它的对边 a、b、c 叫做三角形的元素。

3. 解三角形：已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形。

4. 如何证明正弦定理？

证法一：(1) 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C = 90^\circ$ 时，根据直角三角形中的边角关系，知

$$\frac{a}{c} = \sin A, \frac{b}{c} = \sin B, \text{即} \frac{a}{\sin A} = c, \frac{b}{\sin B} = c,$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

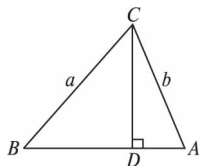
$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

(2) 当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，设边 AB 上的高是 CD，根据直角三角形的边角关系，得

$$CD = a \sin B, CD = b \sin A,$$

$$\text{所以 } a \sin B = b \sin A, \text{得到 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{同理，在 } \triangle ABC \text{ 中，} \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

(3) 当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时 (不妨设 $\angle C$ 为钝角)，过点 C 作 $CD \perp AB$ 。

根据直角三角形的边角关系，知 $CD = b \sin A$ ， $CD = a \sin B$ 。

$$\therefore b \sin A = a \sin B, \text{即} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

过 B 点作 $BE \perp AC$ 交 AC 的延长线于 E，根据直角三角形的边角关系，得 $BE = c \sin A$ ， $BE = a \sin(\pi - C)$ 。

$$\therefore c \sin A = a \sin(\pi - C) = a \sin C.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{即} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

由上述三种情况可知在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

证法二：若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，过点 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D，D 在线段 BC 内。

向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角

为 $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \angle B$ ，向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角 $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \angle C$ 。

由向量的减法法则，得 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 (\because \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}),$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos(\frac{\pi}{2} - B) - |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - C) = 0,$$

$$|\overrightarrow{AD}| (c \sin B - b \sin C) = 0,$$

$$\therefore c \sin B = b \sin C, \text{即} \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

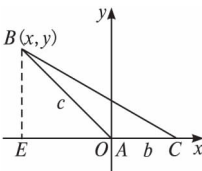
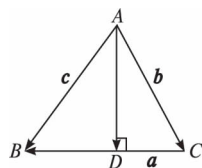
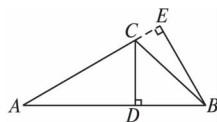
$$\text{同理，} \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，请同学们自己仿证。

证法三：如图，以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 为原点，边 AC 所在射线为 x 轴的正半轴建立直角坐标系。这时顶点 B 可看作角 A 终边上一个点，它到原点的距离 $r = c$ 。

设点 B 的坐标为 (x, y) ，由三角函数的定义可得 $x = c \cos A$ ， $y = c \sin A$ ，即点 B 为 $(c \cos A, c \sin A)$ 。



1.1 正弦定理和余弦定理

$c\sin A$). 容易知道, AC 边上高 BE 就等于 B 点的纵坐标 $c\sin A$, 于是 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot$

$$BE = \frac{1}{2} bc\sin A.$$

$$\text{同理可得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c\sin B, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C.$$

$$\therefore \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} c\sin B = \frac{1}{2} ab\sin C.$$

将等式等号分开的式子都除以 $\frac{1}{2} abc$, 可得

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$\text{即 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

5. 利用正弦定理可以解决怎样的解三角形问题呢?

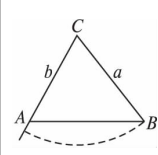
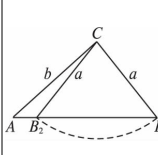
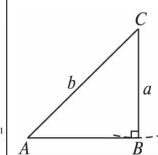
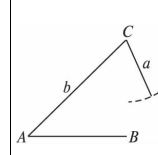
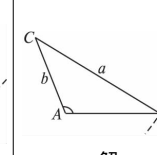
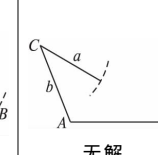
答: (1) 如果已知三角形的任意两个角与一边, 由三角形内角和定理, 可以计算出三角形的另一角, 再利用正弦定理求出另两边.

(2) 如果已知三角形的任意两边及其中一边的对角, 应用正弦定理, 可以求出另一边的对角的正弦值, 进而确定这个角和其他的边和角.

6. 关于已知三角形的两边及其中一边的对角, 如何判断三角形解的情况?

答: 已知两边和其中一边的对角, 不能唯一确定三角形的形状, 解这类三角形将出现无解、一解和两解三种情况, 应分情况予以说明.

下面以已知 a, b 和 A 时解三角形为例加以说明, 具体见下表:

$A < 90^\circ$				$A \geq 90^\circ$	
$a \geq b$	$a < b$			$a > b$	$a \leq b$
	$a > b\sin A$	$a = b\sin A$	$a < b\sin A$		
					
一解	两解	一解	无解	一解	无解

也可以这样判定: 由“三角形中大边对大角”可知, 若 $a \geq b$, 则 $A \geq B$, 从而 B 为锐角, 有一解; 若 $a < b$, 则 $A < B$, 此时, 由正弦定理得 $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ 的值. ① $\sin B > 1$, 无解; ② $\sin B = 1$, 一解; ③ $\sin B < 1$, 两解.

$$7. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ 是比例式的形式,}$$

我们知道在有意义的前提下比例式有如下性质: 内外项之积相等、更比性质和等比性质, 正弦定理有没有满足上述性质的结论呢?

答: (1) 利用更比性质可得 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 或 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 等.

$$(2) \text{ 利用等比性质可得 } \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{a+c}{\sin A + \sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



疑难剖析

【例 1】(1) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$, 解这个三角形.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 60$, $b = 50$, $A = 38^\circ$, 求 B (精确到 1°) 和 c (保留两个有效数字).

思路分析: 本题主要考查利用正弦定理解三角形问题. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知两边和其中一边的对角, 可运用正弦定理求解, 但要注意解的个数的判定.

$$\text{解: (1) 由正弦定理及已知条件有 } \frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{50}{\sin 45^\circ}, \text{ 得 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\because a > b, \therefore A > B = 45^\circ. \therefore A = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

$$\text{当 } A = 60^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ,$$

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ = 15^\circ,$$

$$c = \frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{综上, 可知 } A = 60^\circ, C = 75^\circ, c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ 或 } A =$$

$$120^\circ, C = 15^\circ, c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$(2) \because b < a, \therefore B < A. \therefore B \text{ 是锐角.}$$

$$\text{又 } \because \sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{50\sin 38^\circ}{60} \approx 0.5131,$$

第一章 解三角形

$$\therefore B = 31^\circ.$$

$$\therefore C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (38^\circ + 31^\circ) = 111^\circ.$$

$$\therefore c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{60 \sin 111^\circ}{\sin 38^\circ} \approx 91.$$

思维启示:已知三角形的两边及一边的对角解三角形时,利用正弦定理,要注意判定解的情况.务必做到不漏解、不多解.

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中,分别根据下列条件指出解的个数.

$$(1) a = 4, b = 5, A = 30^\circ;$$

$$(2) a = 5, b = 4, A = 60^\circ;$$

$$(3) a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, B = 120^\circ;$$

$$(4) a = \sqrt{3}, b = \sqrt{6}, A = 60^\circ.$$

思路分析:本题主要考查已知两边和其中一边的对角解三角形的解的个数问题,应根据不同的情况加以判断.

$$\text{解: (1)} \because a < b, b \sin A = \frac{5}{2} < 4 = a,$$

$$\therefore b \sin A < a < b.$$

$\therefore$ 有两解.

$$(2) \because a > b, A < 90^\circ, \therefore B < A < 90^\circ.$$

$\therefore$ 有一解.

$$(3) \because B > 90^\circ, a > b, \therefore A > B > 90^\circ.$$

$\therefore$ 无解.

$$(4) \because a < b, b \sin A = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又} \because a < b \sin A, \therefore \text{无解.}$$

思维启示:判断满足题意的三角形个数问题,不需要求解,只要判断解的个数即可.

【例 3】在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $c = 10$, 又知 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, 求 a, b 及 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径.

思路分析:本题综合考查正弦定理及三角函数的恒等变形问题,三角形内切圆半径的求法.解决本题的关键是将 $\frac{b}{a}$ 换成 $\frac{\sin B}{\sin A}$.

$$\text{解: 由 } \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{b}{a}, \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}, \text{ 可得 } \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}.$$

$$\text{变形为 } \sin A \cos A = \sin B \cos B,$$

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B.$$

$$\text{又} \because a \neq b, \therefore 2A = \pi - 2B, \therefore A + B = \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

$$\text{由 } \begin{cases} a^2 + b^2 = 10^2, \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = 6, b = 8.$$

$$\therefore \text{内切圆的半径为 } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{6+8-10}{2} = 2.$$

思维启示:要熟练掌握正弦定理的几种等价

变形,本题就是将 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ 作为突破口,使问题获解.

【例 4】在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ$, $3c = 4b$, 求 $\sin C$.

思路分析:易知 $B + C = 120^\circ$, 可借助正弦定理实施边角转化,再采取消元化归思想建立有关 C 的三角方程解之.

$$\text{解: } \because 3c = 4b, \therefore 3 \times 2R \sin C = 4 \times 2R \sin B, \text{ 即 } 3 \sin C = 4 \sin B.$$

$$\because B = 120^\circ - C,$$

$$\therefore 3 \sin C = 4 \sin(120^\circ - C) = 2\sqrt{3} \cos C + 2 \sin C.$$

$$\therefore \sin C = 2\sqrt{3} \cos C.$$

$$\therefore \sin^2 C + \cos^2 C = 1,$$

$$\therefore \sin^2 C + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \sin C\right)^2 = 1.$$

$$\therefore \sin^2 C = \frac{12}{13}.$$

$$\because \sin C > 0, \therefore \sin C = \frac{2}{13} \sqrt{39}.$$

思维启示:解决本题的关键是运用正弦定理进行边角转化,然后利用方程思想求解.

【例 5】在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A : \tan B = a^2 : b^2$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

思路分析:可从已知条件出发,寻找三角形的边角之间的关系,然后判断之.

解:由同角三角函数关系及正弦定理可推得

$$\frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}.$$

$$\because A, B \text{ 为三角形的内角,}$$

$$\therefore \sin A \neq 0, \sin B \neq 0.$$

$$\therefore \frac{\cos B}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sin B}, \therefore \sin 2A = \sin 2B.$$

$$\therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A = \pi - 2B.$$

$$\therefore A = B \text{ 或 } A = \frac{\pi}{2} - B.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰三角形或直角三角形.}$$

思维启示:题目中既有边又有角的混合已知条件,一般需要根据正弦定理将边统一成角的关系或将角统一成边的关系,这样便于问题解决.



拓展迁移

【拓展点 1】 $\triangle ABC$ 中,已知 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B =$

$$\frac{5}{13}, \text{ 则 } a : b : c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解析: $\because \cos A = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{5}{13}, 0 < A < \pi, 0 <$

$$B < \pi, \therefore \sin A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{12}{13}.$$

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65}.$$

$$\therefore a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$$

$$= \frac{3}{5}:\frac{12}{13}:\frac{63}{65}$$

$$= 13:20:21.$$

答案: 13:20:21

【拓展点 2】已知方程 $x^2 - (b\cos A)x + a\cos B = 0$ 的两根之和等于两根之积, 且 a, b 为 $\triangle ABC$ 的两边, A, B 为两个内角, 试判断这个三角形的形状.

思路分析: 利用正弦定理判断三角形的形状, 主要是将已知条件中的边角关系转化为角的关系. 本题应利用公式 $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ 和两角和与差的正弦公式进行求解.

解: 设方程的两根为 x_1, x_2 ,

$$\text{由韦达定理可知 } x_1 + x_2 = b\cos A, x_1 x_2 = a\cos B,$$

$$\text{根据题意, 得 } b\cos A = a\cos B,$$

$$\text{由正弦定理, 得 } 2R\sin B\cos A = 2R\sin A\cos B,$$

$$\therefore \sin A\cos B - \cos A\sin B = 0.$$

$$\therefore \sin(A-B) = 0.$$

$$\therefore A, B \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内角,}$$

$$\therefore 0 < A < \pi, 0 < B < \pi, -\pi < A-B < \pi.$$

$$\therefore A-B=0, \text{ 即 } A=B.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等腰三角形.}$$

【拓展点 3】在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} =$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

思路分析: 由于等式右边为边的关系, 因此要想办法将左边的角转化为边, 可利用正弦定理和余弦的二倍角公式 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ 进行证明.

$$\text{证明: 左边} = \frac{1-2\sin^2 A}{a^2} - \frac{1-2\sin^2 B}{b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{2\sin^2 A}{a^2} + \frac{2\sin^2 B}{b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{2(\frac{a}{2R})^2}{a^2} + \frac{2(\frac{b}{2R})^2}{b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2R^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \text{右边.}$$

故原等式成立.

【拓展点 4】如右图所示, 海中小岛

A 周围 38 海里内有暗礁, 某船正由北向南航行, 在 B 处测得小岛 A 在船的南偏东 30° , 航行 30 海里后, 在 C 处测得小岛 A 在船的南偏东 45° , 如果此船不改变航向, 继续向南航行, 有无触礁的危险?

思路分析: 船继续向南航行, 有无触礁的危险, 取决于 A 到直线 BC 的距离与 38 海里的大小. 于是, 只要先算出 AC (或 AB), 再算出 A 到 BC 所在直线的距离, 将它与 38 海里比较即得问题的解.

解: 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 30, \angle B = 30^\circ, \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$

$$\therefore \angle A = 15^\circ.$$

$$\text{由正弦定理知 } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

$$\therefore \frac{30}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}.$$

$$\therefore AC = \frac{30\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = 60\cos 15^\circ = 15(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

于是 A 到 BC 所在直线的距离为 $AC\sin 45^\circ = 15(\sqrt{3}+1) \approx 40.98$ (海里).

它大于 38 海里, 所以继续向南航行无触礁的危险.



自我检测

基础达标

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^\circ$, 则 B 等于 ()

- A. 60° B. 60° 或 120°
C. 30° 或 150° D. 120°

解析: $\because b=\sqrt{3} > a=1, A=30^\circ,$

$\therefore B$ 有两个解.

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$\therefore \sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore B = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

答案: B

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ, C=45^\circ, b=2$, 则此三角形的最小边长为 ()

- A. 2 B. $2\sqrt{3}-2$
C. $\sqrt{3}-1$ D. $2(\sqrt{2}-1)$

第一章 解三角形

解析: $\because A=60^\circ, C=45^\circ,$

$\therefore B=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$, 故 c 边最小.

$$\because \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \therefore c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}-2.$$

答案: B

3. $\triangle ABC$ 中, 根据下列条件, 确定 $\triangle ABC$ 有两解的是 ()

A. $a=18, b=20, A=120^\circ$

B. $a=60, c=48, B=60^\circ$

C. $a=3, b=6, A=30^\circ$

D. $a=14, b=16, A=45^\circ$

解析: 三角形有两解, 则已知角必为锐角, 故排除 A; B 是已知两边及夹角, 只有一解; 在 C 中,

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{6 \times \sin 30^\circ}{3} = 1, \text{ 只有一解.}$$

答案: D

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{3}, b=1, B=30^\circ$, 则其面积等于 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

解析: $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore A=60^\circ$ 或 120° .

当 $A=60^\circ$ 时, $C=90^\circ$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

当 $A=120^\circ$ 时, $C=30^\circ$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

答案: C

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b}$, 则 B 的值为...

()

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

解析: $\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b},$

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\cos B}{b}. \therefore \sin B = \cos B.$$

$\therefore B=45^\circ$.

答案: B

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B)$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 0

C. 1

D. π

解析: $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$

答案: B

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, $a \cos B = b \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 为 ()

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形

D. 钝角三角形

解析: $\because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B,$

$$\therefore \sin A \cos B = \sin B \cdot \cos A, \text{ 即 } \tan A = \tan B.$$

$\therefore A = B.$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

答案: A

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $C=2B$, 则 $\frac{\sin 3B}{\sin B}$ 等于 ()

A. $\frac{a}{b}$

B. $\frac{b}{a}$

C. $\frac{a}{c}$

D. $\frac{c}{a}$

解析: $\frac{\sin 3B}{\sin B} = \frac{\sin(2B+B)}{\sin B} = \frac{\sin(C+B)}{\sin B} =$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}.$$

答案: A

二、填空题

9. 三角形的两边分别为 3 cm 和 5 cm, 它们所夹角的余弦为方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根, 则这个三角形的面积是 _____.

答案: 6 cm^2

10. $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=2a, B=A+60^\circ$, 则 $A=$ _____.

解析: $\because \frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{1}{2},$

$$\text{即 } \frac{\sin A}{\sin(A+60^\circ)} = \frac{1}{2}.$$

整理得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos A$, 即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$\therefore A=30^\circ.$

答案: 30°

三、解答题

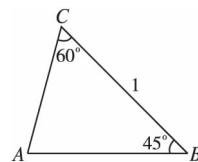
11. 已知三角形的两角分别是 $45^\circ, 60^\circ$, 它们夹边的长是 1, 求最小边长.

解: 如图所示, $A=75^\circ,$

故最小的边长为 b .

$$\therefore \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}.$$

解得 $b = \sqrt{3} - 1.$



12. 如图所示, $AB \perp BC$, $CD = 33$, $\angle ACB = 15^\circ$, $\angle BCD = 75^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$, 求 AB 的长.

解: 在 $\triangle DBC$ 中,

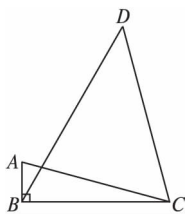
$$\angle DBC = 180^\circ - (\angle BDC + \angle BCD) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ.$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理, 得

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{DC}{\sin \angle DBC},$$

$$\therefore BC = \frac{33 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 11\sqrt{6}.$$

$$\text{在 Rt } \triangle ABC \text{ 中, } AB = BC \tan 15^\circ = 11\sqrt{6}(2 - \sqrt{3}) = 22\sqrt{6} - 33\sqrt{2}.$$



●更上一层楼

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, 且最长边为 1, 求:

(1) 角 C 的大小;

(2) $\triangle ABC$ 最短边的长.

解: (1) $\because \tan C = \tan(\pi - A - B) = -\tan(A + B)$

$$= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -1,$$

$$\therefore C = \frac{3\pi}{4}.$$

$$(2) \because \tan A = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \tan B, C = \frac{3\pi}{4},$$

$\therefore C$ 为最大角, B 为最小角.

$$\text{又 } \tan B = \frac{1}{3}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

由正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$

$$\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A + C = 2B$, $\tan A \cdot \tan C = 2 + \sqrt{3}$.

(1) 求 A, B, C 的值;

(2) 若顶点 C 的对边 c 上的高等于 $4\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 各边的长.

思路分析: 结合题目的条件, 由 $\tan A \cdot \tan C = 2 + \sqrt{3}$, $A + C = 2B$, 可知 $B = 60^\circ$, $A + C = 120^\circ$,

$\therefore$ 可利用两角和的正切公式求 $\tan A + \tan C$, 从而构造方程求 A 与 C 的正切值, 再求角 A 与 C .

解: (1) $\because A + C = 2B, A + C + B = 180^\circ,$

$$\therefore B = 60^\circ, \therefore A + C = 120^\circ.$$

$$\therefore \tan(A + C) = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \cdot \tan C} = -\sqrt{3},$$

$$\text{则 } \tan A + \tan C = 3 + \sqrt{3}.$$

那么 $\tan A, \tan C$ 即为 $x^2 - (3 + \sqrt{3})x +$

$(2 + \sqrt{3}) = 0$ 的两根.

$$\therefore \begin{cases} \tan A = 1, \\ \tan C = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \tan A = 2 + \sqrt{3}, \\ \tan C = 1. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} A = 45^\circ, \\ B = 60^\circ, \\ C = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} C = 45^\circ, \\ B = 60^\circ, \\ A = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ. \end{cases}$$

(2) 如图, 当

$$\begin{cases} A = 45^\circ, \\ B = 60^\circ, \\ C = 75^\circ \end{cases} \text{ 时,}$$

$$\therefore CD = 4\sqrt{3}, \therefore CB =$$

$$8, BD = 4, AD = 4\sqrt{3}, AC = 4\sqrt{6}.$$

$$\therefore AB = 4 + 4\sqrt{3}.$$

$$\text{当 } \begin{cases} A = 75^\circ, \\ B = 60^\circ, \\ C = 45^\circ \end{cases} \text{ 时, 如图.}$$

$$\therefore CD = 4\sqrt{3}, \therefore CB = 8,$$

$$BD = 4,$$

$$AC = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 75^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(45^\circ + 30^\circ)}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

$$= 4\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$= 4\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1).$$

$$\therefore AB = BD + AD = 4 + 4\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$= 8\sqrt{3} - 8.$$

3. 某人在草地上散步, 看到他西方有两根相距 6 米的标杆, 当他向正北方向步行 3 分钟后, 看到一根标杆在其西南方向上, 另一根标杆在其南偏西 30° 方向上, 求此人步行的速度.

解: 如图所示, A, B 两点

的距离为 6 米, 当此人沿

正北方向走到 C 点时, 测

得 $\angle BCO = 45^\circ,$

$\angle ACO = 30^\circ,$

$$\therefore \angle BCA = \angle BCO$$

$$- \angle ACO = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

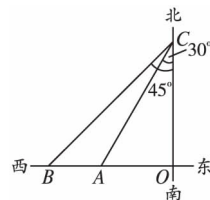
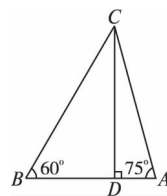
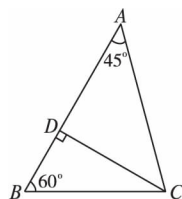
由题意, 知 $\angle BAC = 120^\circ, \angle ABC = 45^\circ.$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA},$$

$$\text{即有 } AC = \frac{AB \cdot \sin \angle ABC}{\sin \angle BCA} = \frac{6 \times \sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} =$$

$$6\sqrt{3} + 6.$$



第一章 解三角形

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中,有

$$OC = AC \cdot \cos 30^\circ = (6\sqrt{3} + 6) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 +$$

$3\sqrt{3}$.

设步行速度为 x 米/分,

$$\text{则 } x = \frac{9+3\sqrt{3}}{3} = 3+\sqrt{3} \approx 4.73.$$

即此人步行的速度约为 4.73 米/分.

1.1.2 余弦定理

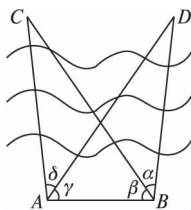


案例探究

在河的北岸有 C, D 两点,某人在河的南岸进行观测,应通过什么办法观测出 C, D 两点间的距离?

解析:测量者可以在河的南岸选定两点 A, B ,测得 $AB = a$,并且在 A, B 两点分别测得

$$\angle CBD = \alpha, \angle ABC = \beta, \\ \angle DAB = \gamma, \angle CAD = \delta,$$



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中应用正弦定理,有

$$BC = \frac{a \sin(\delta + \gamma)}{\sin[180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)]} = \frac{a \sin(\delta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)},$$

$$BD = \frac{a \sin \gamma}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)]} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

计算出 BC, BD 后,再在 $\triangle BCD$ 中,应用余弦定理计算出 CD 两点间的距离:

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cos \alpha} \\ = \sqrt{\left[\frac{a \sin(\delta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} \right]^2 + \left[\frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \right]^2 - 2 \cdot \frac{a \sin(\delta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} \cdot \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \cdot \cos \alpha}.$$



自学导引

1. 余弦定理:三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍.

$$\text{即 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

2. 余弦定理的推论:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

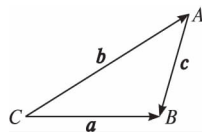
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

3. 如何推导余弦定理?

答:方法一:教科书中,利用向量的数量积推导出 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

下面,我们来推导另外两个等式.

如图,设 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$,那么 $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$,且 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 B .



$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= a^2 + c^2 - 2accosB,$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB.$$

又 $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$,且 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 $\pi - A$.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

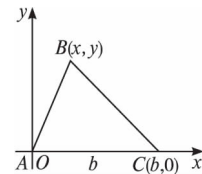
$$= b^2 + c^2 + 2bccos(\pi - A)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bccosA,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA.$$

方法二:利用解析几何中的两点间距离公式推导,

以 A 为原点, AC 为 x 轴建立直角坐标系,如图,则可得点 A, C 坐标分别为 $A(0, 0)$,



$C(b, 0)$.

设点 B 的坐标为 (x, y) ,由三角函数的定义,

$$\text{得 } \frac{x}{c} = \cos A, \frac{y}{c} = \sin A.$$

即点 B 的坐标为 $(c \cos A, c \sin A)$.

根据两点间距离公式,得

$$a = |BC| = \sqrt{(c \cos A - b)^2 + (c \sin A - 0)^2},$$

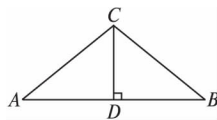
$$\text{也就是 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA.$$

同理,可得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2cacosB$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC.$$

方法三:利用平面几何方法推导.

如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,设 A 为锐角, CD 为 AB 边上的高,



$$\text{则 } CD = b \sin A, AD = b \cos A, BD = |c - b \cos A|,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } |BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2, \text{ 即 } a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA.$$

当 A 为直角或钝角时,同理可证 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$.

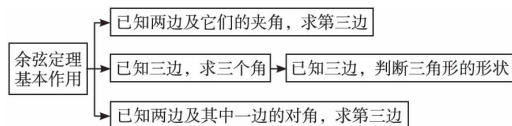
4. 余弦定理和勾股定理的区别与联系.

答:勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系,余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系.由余弦定理及余弦函数的性质可知,如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么第三边所对的角是直角;如果小于第三边的平方,则第三边所对的角是钝角;如果大

于第三边的平方,则第三边所对的角是锐角.因此,余弦定理可以看作是勾股定理的推广.

5. 余弦定理有何作用?

答:等式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 含有四个量 a, b, c 及 C , 从方程的角度看, 已知其中三个量, 可以求出第四个量, 可概括为



疑难剖析

【例 1】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{6} + \sqrt{2}, B = 45^\circ$, 求 b 及 A .

思路分析: 本题主要考查已知两边及其夹角解三角形的问题, 可通过余弦定理先求出第三边. 在求出第三边后, 求 A 应有两种思路: 一是利用余弦定理的变形形式, 根据三边求其余弦值, 进一步求解; 二是利用两边和一边对角结合正弦定理求解.

(1) 解: 由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times 2\sqrt{3} \times \cos 45^\circ = 8$.

$$\therefore b = 2\sqrt{2}.$$

(2) 解法一: 由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore A = 60^\circ.$$

解法二: 由正弦定理, 得

$$\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} > 2.4 + 1.4 = 3.8, 2\sqrt{3} < 2 \times 1.8 = 3.6,$$

$$\therefore c > a, \therefore 0 < A < 90^\circ. \therefore A = 60^\circ.$$

思维启示: 通过本题我们应该体会到在解三角形时, 如果正弦定理和余弦定理均可选用, 那么求边时两个定理均可应用, 而求角时则应用余弦定理, 这样可以免去判断取舍的麻烦.

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 3, c = 3\sqrt{3}, B = 30^\circ$, 求 a .

思路分析: 已知两边和其中一边对角解三角形, 一般用正弦定理, 但也可以用余弦定理求解.

解法一: (利用正弦定理)

$$\text{由正弦定理可得 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore c > b, \therefore C > B.$$

$\therefore C$ 有两解(锐角或钝角).

① 当 $C = 60^\circ$ 时, 则有 $A = 90^\circ$, 于是 $a = 6$.

② 当 $C = 120^\circ$ 时, 则有 $A = 30^\circ$, 于是 $a = 3$.

$\therefore a = 6$ 或 3 .

解法二: (利用余弦定理)

把 $b = 3, c = 3\sqrt{3}, B = 30^\circ$ 代入 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin B$, 可得

$$3^2 = a^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2a \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ, \text{ 即 } a^2 - 9a + 18 = 0.$$

解之得 $a = 6$ 或 3 .

思维启示: 用正弦定理解三角形时要注意解的个数, 往往需要讨论边角关系, 而用余弦定理求角时, 结果是钝角、直角还是锐角从余弦值的正负情况便可以判断出来; 如果求边则类似于本题, 一般可借助一元二次方程求解, 它的根的个数即是三角形解的个数.

【例 3】已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{3}, a = 2\sqrt{3}, b = 2$, 解三角形.

思路分析: 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$ 及已知条件可求得角 C , 再由余弦定理求 c 边, 再由正弦定理或余弦定理求其余角.

$$\text{解: } \because S = \frac{1}{2}ab\sin C, \text{ 即 } \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin C,$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore C = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ.$$

$$\text{若 } C = 30^\circ, \text{ 则 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

$$\therefore c = 2.$$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore A = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

当 $A = 60^\circ$ 时, $B = 90^\circ$, 不满足 $A > B$ (舍去, 因为 $a > b$);

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } B = 30^\circ.$$

$$\text{若 } C = 150^\circ, \text{ 则 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \cos 150^\circ = 16 + 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28.$$

$$\therefore c = 2\sqrt{7}.$$

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \approx 0.327 3.$$

$$\therefore A \approx 19.10^\circ = 19^\circ 6'.$$

$$\therefore B = 10^\circ 54'.$$

思维启示: 选择正弦定理求角时, 一定要注意分类讨论.

【例 4】已知 $\triangle ABC$ 的一个角为 60° , 面积为

第一章 解三角形

$10\sqrt{3}$ cm, 周长为 20 cm, 求此三角形各边的长.

思路分析: 此题所给的题设条件除一个角外, 面积、周长都不是构成三角形的基本元素, 故可设出边长, 利用所给条件建立方程, 通过解方程(组)求得.

解: 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且 $B = 60^\circ$,

$$\text{则依题意, 有 } \begin{cases} \cos 60^\circ = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \frac{1}{2}ac \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}, \\ a + b + c = 20, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - ac, & \text{①} \\ ac = 40, & \text{②} \\ a + b + c = 20. & \text{③} \end{cases}$$

由③得

$$b^2 = [20 - (a + c)]^2 = 400 + a^2 + c^2 + 2ac - 40(a + c). \quad \text{④}$$

将①代入④, 得 $400 + 3ac - 40(a + c) = 0$.

再将②代入上式, 得 $a + c = 13$.

$$\text{由 } \begin{cases} a + c = 13, \\ ac = 40, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 5, \\ c_1 = 8, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_2 = 8, \\ c_2 = 5. \end{cases}$$

此时, $b_1 = 7, b_2 = 7$.

所以三角形三边长分别为 5 cm, 7 cm, 8 cm.

思维启示: 注意正、余弦定理的结构特征, 灵活地把题目条件进行变形, 构造正、余弦定理形式解题. 例如, 已知 $\triangle ABC$ 中三边 a, b, c 的关系式: $a^2 - c^2 = b^2 - bc$, 则可将此关系式变形为 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 此时由余弦定理可得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 从而可求得 $A = \frac{\pi}{3}$. 根据条件合理选择公式建立有关未知量的方程组进行计算, 但要确保公式的使用能较简捷地联系所要解决的问题.

【例 5】已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$, 求 $\triangle ABC$ 各角的度数.

思路分析: 本题主要考查正、余弦定理的综合运用. 可运用正弦定理将三角的正弦比转化为三边的比, 然后通过余弦定理求解.

解: $\because \sin A : \sin B : \sin C = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$,

$$\therefore a : b : c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1).$$

$$\therefore \text{令 } a = 2k, b = \sqrt{6}k, c = (\sqrt{3} + 1)k.$$

由余弦定理, 有

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore A = 45^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 6}{2 \times 2 \times (\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore B = 60^\circ.$$

$$\therefore C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ.$$

思维启示: 根据问题给出的条件 $\sin A :$

$\sin B : \sin C = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$ 转化为 $a : b : c = 2 : \sqrt{6} : (\sqrt{3} + 1)$, 然后设出 $a = 2k, b = \sqrt{6}k, c = (\sqrt{3} + 1)k$. 为使用余弦定理求角创造条件, 这是解答本题的关键一步; 在已知三边求角时, 一般先求小角后求大角, 因为同一个三角形中大边对大角, 所以较小的边所对的角一定是锐角. 如果用余弦定理先求大角, 由于大角可能是钝角, 余弦值为负值, 应求相应锐角的补角, 这样计算较复杂.



拓展迁移

【拓展点 1】已知锐角三角形的三边长为 5、12、 x , 则 x 的取值范围是_____.

解析: 通过这个变量可以巩固余弦定理、三角形两边之和大于第三边等相关知识.

(1) 当 12 是最大边时, 设其对应的角为

$$A, \text{ 可得 } \begin{cases} \cos A = \frac{x^2 + 5^2 - 12^2}{2 \times 5x} > 0, \\ 0 < x \leq 12, \\ 5 + x > 12. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \sqrt{119} < x \leq 12.$$

(2) 当 x 是最大边时, 设其对应的角为 B ,

$$\text{可得 } \begin{cases} \cos B = \frac{5^2 + 12^2 - x^2}{2 \times 5 \times 12} > 0, \\ 12 \leq x, \\ 5 + 12 > x. \end{cases}$$

$$\text{解得 } 12 \leq x < 13.$$

综合 (1) (2) 可得 x 的取值范围是

$$\sqrt{119} < x < 13.$$

答案: $\sqrt{119} < x < 13$

【拓展点 2】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan B + \tan C = \sqrt{3}(\tan B \tan C - 1)$, $B > C$, 且 b, c 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + m = 0$ 的两个实数根, $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 m 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的三边长.

思路分析: 联想两角和正切公式, 求特殊角. 再利用根与系数关系、三角形面积公式、余弦定理解三角形.

解: (1) $\because \tan B + \tan C = \sqrt{3}(\tan B \tan C - 1)$,

$$\therefore \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -\sqrt{3}, \text{ 即 } \tan(B + C) = -\sqrt{3}.$$

$$\because 0^\circ < B + C < 180^\circ, \therefore B + C = 120^\circ.$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

$\because b, c$ 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + m = 0$ 的两根,

$$\therefore bc = m.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} m \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} m =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore m = 2.$$

$$(2) \text{ 由 } x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0, \text{ 得 } x = \sqrt{3} \pm 1.$$

$$\therefore B > C, \therefore b > c.$$

$$\therefore b = \sqrt{3} + 1, c = \sqrt{3} - 1, \text{ 再由余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA = (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} = 6, \text{ 得 } a = \sqrt{6}.$$

$$\therefore \text{所求三边长分别为 } a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3} + 1, c = \sqrt{3} - 1.$$

【拓展点 3】如图所示,在

$\triangle ABC$ 中,已知 $BC = 15$, $AB : AC = 7 : 8$,

$\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$,求 BC 边上

的高 AD 的长.

思路分析:由已知设 $AB = 7x$, $AC = 8x$,因此要求 AD 的长只需求出 x . $\triangle ABC$ 中已知三边只需再有一个角,根据余弦定理便可求出 x ,而用正弦定理恰好求角 C .

解:在 $\triangle ABC$ 中,由已知设 $AB = 7x$, $AC = 8x$,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{7x}{\sin C} = \frac{8x}{\sin B},$$

$$\therefore \sin C = \frac{7x \sin B}{8x} = \frac{7}{8} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore C = 60^\circ (C = 120^\circ \text{ 舍去, 否则由 } 8x > 7x,$$

知 B 也为钝角,不合要求).

再由余弦定理得

$$(7x)^2 = (8x)^2 + 15^2 - 2 \times 8x \times 15 \cos 60^\circ,$$

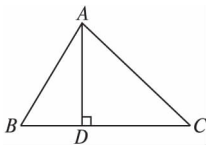
$$\therefore x^2 - 8x + 15 = 0,$$

$$\therefore x = 3, \text{ 或 } x = 5.$$

$$\therefore AB = 21, \text{ 或 } AB = 35.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } AD = AB \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7} AB,$$

$$\therefore AD = 12\sqrt{3}, \text{ 或 } AD = 20\sqrt{3}.$$



自我检测

基础达标

一、选择题

1. $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 非钝角三角形

答案:C

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 - c^2 + b^2 = ab$, 则角 C 为 ()

- A. 60° B. 45° 或 135°
C. 120° D. 30°

答案:A

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$, 则 $\triangle ABC$ 的最大角为 ()

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

解析: $\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$,

$$\therefore \text{可设 } a = 3k, b = 5k, c = 7k.$$

$$\text{于是 } \cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = -\frac{1}{2}, \therefore C = 120^\circ.$$

故 $\triangle ABC$ 的最大角为 120° .

答案:D

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 6$, $b = 4$, $C = 120^\circ$, 则 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{\sqrt{57}}{19}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{38}$ D. $-\frac{\sqrt{57}}{19}$

$$\text{解析: } \therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ = 76,$$

$$\therefore c = \sqrt{76}.$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{76}} = \frac{\sqrt{57}}{19}.$$

答案:B

5. $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C + \sin^2 C$, 则 A 等于 ()

- A. 30° B. 60° C. 150° D. 120°

解析: $\therefore \sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C + \sin^2 C$,

$$\therefore \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} + \left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

$$\text{即 } ① a^2 = b^2 + c^2 + bc, \text{ 由余弦定理得 } ② a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$\text{由 } ① ②, \text{ 得 } \cos A = -\frac{1}{2}, \therefore A = 120^\circ.$$

答案:D

6. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$, 则角 C 的度数为 ()

- A. 135° B. 120° C. 60° D. 45°

$$\text{解析: } \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

$$\therefore \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2), \text{ 即 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin C.$$

$$\text{又根据余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$\therefore -2ab \sin C = -2ab \cos C, \text{ 即 } \sin C = \cos C.$$

第一章 解三角形

$$\therefore C=45^\circ.$$

答案:D

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=45^\circ, c=2\sqrt{2}, b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 则

A 的值是 ()

A. 15°

B. 75°

C. 105°

D. 75° 或 15°

解析: $\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because b < c, \therefore C = 60^\circ$ 或 120° .

当 $C = 60^\circ$ 时, $A = 75^\circ$;

当 $C = 120^\circ$ 时, $A = 15^\circ$.

答案:D

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $C = 120^\circ$, 两边 a, b 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 则 c 等于 ()

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{11}$

D. $\sqrt{13}$

解析: $\because a, b$ 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根,

$$\therefore a + b = 3, ab = 2, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C =$$

$$(a + b)^2 - 2ab - 2ab \cos C = 9 - 4 - 4 \cos 120^\circ = 7.$$

$$\therefore c = \sqrt{7}.$$

答案:B

二、填空题

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 60^\circ, c = 2, S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $a =$ _____.

$$\text{解析: } \because S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore b = 1. \therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 1^2 + 2^2 -$$

$$2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3.$$

$$\therefore a = \sqrt{3}.$$

答案: $\sqrt{3}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边的长为连续自然数, 且最大角是钝角, 这个三角形三边的长分别为_____.

解析: 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 $x-1, x, x+1$.

则最大角的余弦值为 $\cos \alpha =$

$$\frac{(x-1)^2 + x^2 - (x+1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x^2 - 4x}{2x(x-1)} =$$

$$\frac{x-4}{2(x-1)},$$

$\because$ 最大角为钝角,

$$\therefore \cos \alpha = \frac{x-4}{2(x-1)} < 0.$$

$$\therefore \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-4 < 0, \end{cases} \text{ 即 } 1 < x < 4.$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } 3.$$

当 $x = 2$ 时, 三边长分别为 $1, 2, 3$, 不能构成三角形, 故应舍去;

当 $x = 3$ 时, 三边长分别为 $2, 3, 4$, 满足条件.

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长分别为 $2, 3, 4$.

答案: $2, 3, 4$

三、解答题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $b = 7, B = \frac{\pi}{3}, S_{\triangle ABC} = 10\sqrt{3}$. 求

边 a, c 的长.

思路分析: 知一边及一边对角, 一般考虑余弦定理, 而三角形面积也自然运用两边及夹角的公式.

$$\text{解: } \because \frac{1}{2} ac \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore ac = 40. \quad \text{①}$$

$$\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\therefore a^2 + c^2 - ac = 49.$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 89.$$

$$\because (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 89 + 80 = 169,$$

$$\therefore a+c = 13. \quad \text{②}$$

由①②解得 $a = 5, c = 8$ 或 $a = 8, c = 5$.

12. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边, S 是 $\triangle ABC$ 的面积. 若 $a = 4, b = 5, S = 5\sqrt{3}$, 求 c 的长度.

$$\text{解: } \because S = \frac{1}{2} ab \sin C, \therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是 $C = 60^\circ$ 或 $C = 120^\circ$.

$$\text{又 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

(1) 当 $C = 60^\circ$ 时, $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, 得 $c = \sqrt{21}$;

(2) 当 $C = 120^\circ$ 时, $c^2 = a^2 + b^2 + ab$, 得 $c = \sqrt{61}$.

故 c 的长度为 $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{61}$.

●更上一层楼

1. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 已知 a, b, c 满足 $b^2 = ac$, 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$, 求 A 的大小及 $\frac{b \sin B}{c}$ 的值.

$$(1) \text{解: } \because b^2 = ac, \therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc.$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore A = 60^\circ.$$

(2) 解法一: 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

$$\because b^2 = ac, A = 60^\circ,$$

$$\therefore \frac{b \sin B}{c} = \frac{b^2 \sin 60^\circ}{ca} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解法二: 在 $\triangle ABC$ 中, 由面积公式, 得

$$\frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a c \sin B.$$

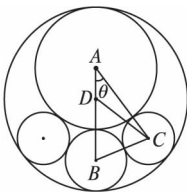
$$\because b^2 = ac, \therefore b c \sin A = b^2 \sin B.$$

$$\therefore \frac{b \sin B}{c} = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. 一块直径为 30 cm 的圆形铁板, 已截去直径分别为 20 cm、10 cm 的圆形铁板各一块, 现要求在所剩余的铁板中再截出同样大小的铁板两块, 问这两块铁板的半径最大为多少厘米?

思路分析: 分析各圆内切、外切的关系, 构造出三角形, 利用三角形的边角关系解题.

解: 如图, $\odot A$ 与 $\odot B$ 外切, 且都与 $\odot D$ 内切.



由题意分析可知, 所求最大 $\odot C$ 与 $\odot A$, $\odot B$ 都外切, 且与 $\odot D$ 内切.

设所求最大 $\odot C$ 的半径为 x , 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos \theta = \frac{15^2 + (10+x)^2 - (5+x)^2}{2 \times 15 \times (10+x)} = \frac{30+x}{30+3x}.$$

又在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理, 得

$$\cos \theta = \frac{(10+x)^2 + 5^2 - (15-x)^2}{2 \times (10+x) \times 5} = \frac{5x-10}{x+10}.$$

$$\therefore \frac{30+x}{30+3x} = \frac{5x-10}{x+10}.$$

$$\text{整理, 得 } 7x^2 + 40x - 300 = 0.$$

$$\therefore x_1 = \frac{30}{7}, x_2 = -10 (\text{舍去}).$$

$\therefore$ 在剩余的铁板中还可以截出半径最大为

$$\frac{30}{7} \text{ cm 的同样大小的圆形铁板两块.}$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, A 最大, C 最小, 且 $A = 2C$, $a + c = 2b$, 求此三角形的三边之比.

解: 由正弦定理得

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin 2C}{\sin C} = 2 \cos C, \text{ 即 } \cos C = \frac{a}{2c}.$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$\frac{(a+c)(a-c) + b^2}{2ab},$$

$$\because a + c = 2b,$$

$$\therefore \cos C = \frac{2b(a-c) + b \cdot \frac{a+c}{2}}{2ab} =$$

$$\frac{2(a-c) + \frac{a+c}{2}}{2a},$$

$$\therefore \frac{a}{2c} = \frac{2(a-c) + \frac{a+c}{2}}{2a}.$$

$$\text{整理得 } 2a^2 - 5ac + 3c^2 = 0,$$

$$\text{解得 } a = c \text{ 或 } a = \frac{3}{2}c.$$

$$\because A = 2C,$$

$$\therefore a = c \text{ 不成立,}$$

$$\therefore a : b : c = \frac{3}{2}c : \frac{5}{4}c : c = 6 : 5 : 4.$$

1.2 应用举例(一)



案例探究

【案例 1】已知 $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$, 试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

$$\text{解析: 由 } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}, \text{ 得}$$

$$\sin A (\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C.$$

$$\text{由正、余弦定理, 得 } \frac{a}{2R} \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \right.$$

$$\left. \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R},$$

$$\text{上式化简, 得 } b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2bc^2, \text{ 即 } (a^2 - b^2 - c^2)(b+c) = 0,$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2, \text{ 故 } \triangle ABC \text{ 是直角三角形.}$$

【案例 2】在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 求证: $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

思路分析: 等式特点, 左边皆为边的形式, 右边皆为角的形式, 可以考虑从一边借助正、余弦定理实施边角转化证向另一边.

$$\text{证法一: 右边} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin C}$$

$$= \frac{a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{c}$$

$$= \frac{2a^2 - 2b^2}{2c^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

= 左边.

$\therefore$ 原式得证.

$$\begin{aligned}
 \text{证法二: 左边} &= \frac{(b^2 + c^2 - 2bccosA) - b^2}{c^2} \\
 &= \frac{c^2 - 2bccosA}{c^2} = \frac{c - 2bccosA}{c} \\
 &= \frac{\sin C - 2\sin B \cos A}{\sin C} \\
 &= \frac{\sin(A+B) - 2\sin B \cos A}{\sin C} \\
 &= \frac{\sin(A-B)}{\sin C}.
 \end{aligned}$$



自学导引

1. 正弦定理: 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边, 则 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
2. 余弦定理: 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 A, B, C 的对边, 则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$.
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, 则 $A = 60^\circ$; 若 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 则 $A = 120^\circ$; 若 $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc$, 则 $A = 45^\circ$; 若 $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$, 则 $A = 150^\circ$.
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $acosA = bcosB$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为等腰或直角三角形.



疑难剖析

正弦定理和余弦定理是解斜三角形和判定三角形类型的重要工具, 其主要作用是将已知条件下的边、角关系转化为角的关系或边的关系.

【例 1】 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别表示 A, B, C 所对边长, 若 $(a^2 + b^2) \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B)$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

思路分析: 本题主要考查应用正、余弦定理判定三角形的形状. 题目条件中给出的关系式既有边也有角, 需利用正、余弦定理转化为角的关系或边的关系, 下面用两种方法分别求解.

解法一: $\because (a^2 + b^2) \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B)$,

$$\begin{aligned}
 &\therefore (a^2 + b^2)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\
 &= (a^2 - b^2)(\sin A \cos B + \cos A \sin B),
 \end{aligned}$$

化简, 得 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \sin A \cos B$.

$$\because a = 2R \sin A, b = 2R \sin B,$$

$$\therefore \sin^2 A \cos A \sin B = \sin A \sin^2 B \cos B,$$

$$\text{即 } \sin A \cos A = \sin B \cos B,$$

$$\text{即 } \sin 2A = \sin 2B.$$

从而 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$, 即 $A = B$ 或

$$A + B = \frac{\pi}{2}.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

解法二: 由条件化简得 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \sin A \cos B$,

$$\because \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin A = \frac{a}{2R},$$

将其代入上式, 得 $a^2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{2R} = b^2 \cdot$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a}{2R},$$

$$\text{即 } a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2).$$

$$\text{整理得 } (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

$\therefore a = b$ 或 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

思维启示: 根据已知条件判断三角形的形状, 主要有两条途径: (1) 化边为角, 走三角变形之路, 常用的转化方式有 ① $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c =$

$$2R \sin C; \text{ ② } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

$$\text{③ } \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A,$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B.$$

(2) 化角为边, 走代数变形之路, 常用的转化方式有

$$\text{① } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R};$$

$$\text{② } \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}, \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c};$$

$$\text{③ } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

【例 2】 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 2, BC = 6, CD = DA = 4$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

思路分析: 本题主要考查三角函数的基础知识、余弦定理以及三角形的面积公式等. 四边形为圆内接四边形, 故四边形的对角互补, 从而可知 $\sin A = \sin C$, 再结合四边形的四边已知, 易求出四边形的两条对角线, 从而求出其面积.

解: 如图所示, 连结 BD ,

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 则

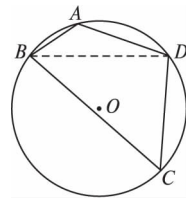
$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A +$$

$$\frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin C.$$

$$\text{又 } \sin A = \sin C (\because A, C \text{ 互补}),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (2 \times 4 + 6 \times 4) \sin A = 16 \sin A.$$



$$\begin{aligned} & \text{又} \because BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A \\ & = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C, \\ & \text{且} \cos A = -\cos C (\because A, C \text{ 互补}), \end{aligned}$$

$$\therefore 64\cos A = -32, \text{ 即 } \cos A = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又} \because 0^\circ < A < 180^\circ,$$

$$\therefore A = 120^\circ, \text{ 即 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S = 16\sin A = 8\sqrt{3}.$$

【例 3】 已知 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且满足 $(\sin A + \sin B)^2 - \sin^2 C = 3\sin A \sin B$, 求证: $A + B = 120^\circ$,

思路分析: 由于 $A + B + C = 180^\circ$, 所以可将证明 $A + B = 120^\circ$ 转化到证明 $C = 60^\circ$ 上来. 又已知条件为三角函数关系, 因此应考虑向三角函数方向转化. 在 $(0^\circ, 180^\circ)$ 上, 余弦函数严格单调, 所以可证明 $\cos C = \frac{1}{2}$, 这就考虑余弦定理的推论 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 因此应首先把已知条件中角的关系转化为边的关系.

证明: 由 $(\sin A + \sin B)^2 - \sin^2 C = 3\sin A \sin B$, 可得

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin B,$$

$$\text{又} \because \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R},$$

$$\therefore \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} - \frac{c^2}{4R^2} = \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R},$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

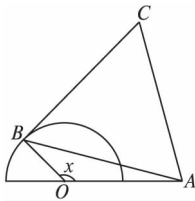
$$\text{又} \because 0^\circ < C < 180^\circ, \therefore C = 60^\circ.$$

$$\therefore A + B = 180^\circ - C = 120^\circ.$$

思维启示: (1) 运用余弦定理与正弦定理进行有关三角形内角的证明时, 余弦定理会省去取余的麻烦, 但同时要注意在根据三角函数值求角时, 应首先确定角的范围.

(2) 在将已知条件中角的关系转化为边的关系时, 运用了正弦定理的变形形式: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. 这一转化技巧要求我们熟练掌握.

【例 4】 如图, 半圆 O 的直径为 2, A 为直径的延长线上的一点, $OA = 2$, B 为半圆周上的动点, 以 AB 为边, 向形外作等边 $\triangle ABC$, 问 B 点在什么位置时, 四边形 $OACB$ 的面积最大? 并求出这个最大面积.



思路分析: 本题主要综合考查正、余弦定理及函数的最值等问题, 首先应建立四边形 $OACB$ 面积的函数关系式, 然后讨论最值.

解: 设 $\angle AOB = x$, 由 $OA = 2, OB = 1$.

$$\text{知 } AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos x = 5 - 4\cos x.$$

$\triangle ABC$ 与 $\triangle AOB$ 的面积分别为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (5 - 4\cos x),$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin x = \sin x.$$

所以四边形 $OACB$ 的面积为

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (5 - 4\cos x) + \sin x,$$

$$\text{整理得 } S = \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2\sin(x - 60^\circ).$$

由上式可知, 当 $x - 60^\circ = 90^\circ$, 即 $x = 150^\circ$ 时, 四边形 $OACB$ 的面积最大, 且其最大面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4} + 2$.

思维启示: 以三角形为背景, 余弦定理为辅助工具建立以 x 为自变量的三角函数, 将问题转化为三角函数的最值问题.



拓展迁移

【拓展点 1】 如图, 在四

边形 $ABCD$ 中, $BC = a, DC = 2a$, 四个角 A, B, C, D 度数之比为 $3 : 7 : 4 : 10$, 求 AB 的长.

思路分析: 可先由四边形的内角和与各角之比求出各内角的大小, 再通过解三角形就可求出 AB 的长.

解: 设四个角 A, B, C, D 的度数依次为 $3x, 7x, 4x, 10x$, 由四边形的内角和定理有

$$3x + 7x + 4x + 10x = 360^\circ \Rightarrow x = 15^\circ.$$

$$\text{所以 } A = 45^\circ, B = 105^\circ, C = 60^\circ, D = 150^\circ.$$

连结 BD ,

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得

$$BD^2 = a^2 + (2a)^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2.$$

$$\text{所以 } BD = \sqrt{3}a.$$

此时, $DC^2 = BD^2 + BC^2$, 则 $\triangle BCD$ 是以 DC 为斜边的直角三角形,

$$\text{所以 } \angle CDB = 30^\circ, \angle ADB = 120^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得

$$AB = \frac{BD \cdot \sin \angle ADB}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}a \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\text{所以 } AB \text{ 的长为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}a.$$