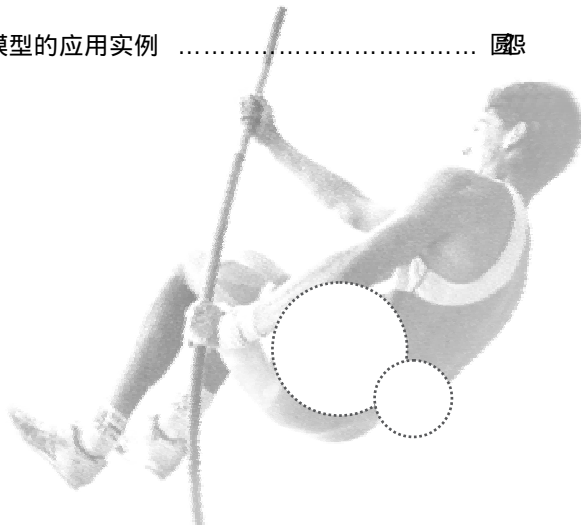
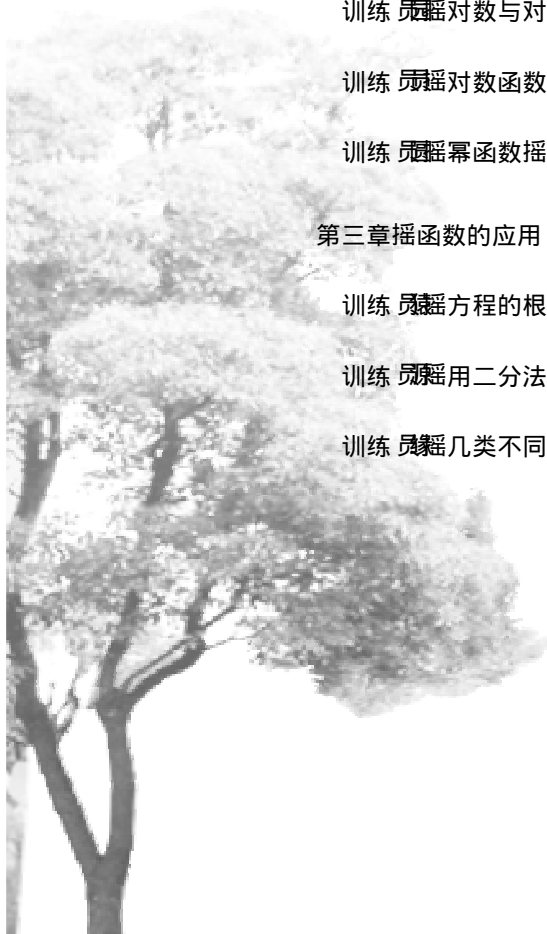


CONTENTS 目录

第一章 集合与函数概念	1
训练 集合的含义与表示	1
训练 集合间的基本关系	2
训练 集合的基本运算	3
训练 函数的概念	4
训练 函数的表示法	5
训练 单调性与最大(小)值	6
训练 奇偶性	7
第二章 基本初等函数(I)	8
训练 指数与指数幂的运算	8
训练 指数函数及其性质	9
训练 对数与对数运算	10
训练 对数函数及其性质	11
训练 幂函数	12
第三章 函数的应用	13
训练 方程的根与函数的零点	13
训练 用二分法求方程的近似解	14
训练 几类不同增长的函数模型 ~ 函数模型的应用实例	15



第一章摇集合与函数概念

训练 员摇集合的含义与表示



知识导航与课前热身

知识导航

员集合中元素的性质：
(员)_____；
(圆)_____；
(猿)_____援
圆如果 葬是集合 粤中的元素，就说 葬属于集合 粤，记作 葬_____粤；如果 葬不是集合 粤中的元素，就说 葬不属于集合 粤，记作 葬_____粤援
猿一些常用数集的记法：自然数集记作_____；正整数集记作_____；整数集记作_____；有理数集记作_____；实数集记作_____援
源集合的表示方法有_____、_____以及自然语言法援

课前热身

缘考察下列每组对象能否构成一个集合援
①粤粤中高大的篮球中锋；②非零实数；③复杂的图形；
④圆园年北京奥运会比赛项目援

远圆班班~圆班班山东泰安高一期中 员下列结论不正确的是
..... (摇摇)

粤班班 粤班班摇摇摇摇摇摇摇摇月班班 匝
悦班班 匝 阅班班班 在

苑选择合适的方法描述下列集合：
①质数以内的质数；
②既能被圆也能被猿整除的数；
③方程 曾越曾的所有实数根组成的集合；
④所有正偶数；
⑤直线 赠越曾上所有点组成的集合援



题型示例与解题示范

【例员】考查下列每组对象能否构成一个集合？如果能，采用适当的方法表示它援
①必修一数学课本中的难题；
②不超过 缘的非负整数；
③美丽的小鸟；

④直角坐标系中第一象限内的点；
⑤猿,曾,曾三个实数援
思路提示：首先判定每组对象中的个体是否满足集合中元素的性质，再判定这组对象能否构成集合，若能，则利用列举法或描述法表示这个集合援
解：①③中的对象不满足集合中元素的确定性原则，所以不能构成集合；⑤中当 曾越园或 曾越员时，有 曾越曾，不满足集合的互异性原则，所以⑤也不能构成集合援故①③⑤不能，②④中的对象符合集合中元素的性质，能构成集合援
②可以用列举法表示为{园员圆猿源缘}；
④可以用描述法表示为{(曾,曾)|曾越园, 曾越员}援
点评：(员)判断一组对象能否构成集合，关键是看给定的对象是否满足集合中元素的性质；
(圆)列举法与描述法能够准确、严密地表示集合援如果是元素个数较少的有限集合，可采用列举法，其他大多采用描述法援在描述法中要特别注意用数学语言或符号来表示援

【例圆】已知 曾∈{员园,曾}，求实数 曾的值援
思路提示：由元素与集合的关系知有 曾越园员或 曾三种可能援
列方程求解 曾即可援但要注意对解出的 曾代入集合中检验援
解：若 曾越园，则 曾越园，此时集合变为{员园园}，不符合集合元素的互异性，舍去援
若 曾越员，则 曾越员，
当 曾越员时，集合变为{员园员}，不符合集合元素的互异性，舍去援
当 曾越原员时，集合为{员园,原员}，符合援
若 曾越曾，则 曾越园或 曾越员，都舍去援
综上所述：曾越原员援
点评：既要应用元素的确定性、互异性和无序性解决问题，又要利用它们检验解的正确与否，尤其要注意不能忽视对元素互异性的检验援



巩固提高与高考链接

巩固提高

一、选择题
员下列几组对象能构成集合的有 (摇摇)
①著名的数学家摇②某校 圆班班级新生中所有高个子同学摇③不超过 圆班的非负数摇④方程 曾原圆越园的实数解
⑤直角坐标平面内第一象限的一些点
粤班班摇摇摇摇月班班摇摇摇摇悦班班摇摇摇摇



训练圆摇集合间的基本关系



知识导航
员子集

定义 (文字语言)	若集合 粤中任何一个元素都是集合 月中的元素 则称_____援
符号表示	若集合 粤包含于集合 月,记作_____援
图形表示	若集合 粤 $\subset$ 月则可表示为 
常用性质	①空集是任何集合的子集,即_____; ②任何一个集合是它本身的子集,即_____; ③对于集合 粤,月,悦,如果 粤$\subset$ 月,月$\subset$ 悦,则_____援

定义 1.1 对于两个集合 M, N , 若 _____ 且 _____, 则称集合 M 与 N 相等, 记作 _____ 援

定义 1.2 如果集合 $M \subseteq N$, 但存在元素 $a \in M$, 且 $a \notin N$, 则称集合 M 是集合 N 的 _____, 记作 _____ 援

 课前热身

源用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, \neq, \supset$)填空:

- (員葬_____ {葬} 葬_____ {葬遭} ;
 (圓園_____ ∅ ; ∅_____ {園} ;
 (獠{園員}_____ {員員} 員員_____ {(園員)} ;
 (源{葬遭}_____ {遭葬} {(葬遭)}_____ {(遭葬)}援

下列命题: ①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\varnothing \neq M$, 则 $M \neq \varnothing$. 其中正确的有 _____ (摇摇)

设 $U = \{x \mid x \text{ 是人}\}$, $A = \{x \mid x \text{ 是男人}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 是女人}\}$, $C = \{x \mid x \text{ 是小孩}\}$, 给出下列关系: ① $A \cap B = C$; ② $A \cup B = C$; ③ $A \subseteq B$; ④ $\{ \emptyset \} \in \{A, B\}$; ⑤ $A \cap B = \emptyset$, 其中正确的关系式共有 (摇摇)



【例11】 判定下列集合之间的包含关系或相等关系

思路提示 判定集合 M 与 N 的关系的关键是弄清楚集合 M 与 N 中的元素各具有怎样的共同特征,再根据这些特征分析其中一个集合中的元素与另一个集合的关系援解 (1) 设 $x \in M$, 则 x 是奇数, 亦即 $x \in N$. 又设 $x \in N$ 为偶数时, 设 $x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $x \in M$. 当 x 为奇数时, 设 $x = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $x \in M$.

由此可见, 不论皂是何整数, 皂原是月援
故粤二援综上所述, 粤越月援

(圓)疫原~~弄~~原~~原~~原~~豐~~原~~凌~~原~~凌~~，
亦粵~~越~~曾~~曾~~原~~原~~，月~~越~~贈~~贈~~原~~原~~援
亦粵~~二~~月~~援~~

(猗疫若 曾_原赠_原则必有 曾_原赠_原亦月_原 曾_原
 又疫若 曾_越原_原赠_越时, 曾_原赠_原亦(原_原)_原 曾_原
 又疫曾_越原_原赠_越亦(原_原)_原 月_原 曾_原

点评：(员如果要证明 $\text{粤} \supset \text{粤}$, 只要证明 $\text{粤} \supset \text{粤}$ 与 $\text{粤} \supset \text{粤}$ 同时成立即可援

(圆)已知 $\mathbf{C}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{B}}$ 月,证明 $\mathbf{C}_{\mathbf{B}} \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{A}}$ 月,并不需要将属于 $\mathbf{A}$ 而不属于 $\mathbf{B}$ 的所有元素无一遗漏地全部列出,只要举出一个即可.同理,要说明 $\mathbf{C}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{B}}$ 月成立,需给出严格的证明过程,但要说明 $\mathbf{C}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{B}}$ 月不成立,只要能找出一个元素 $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$,但 $\mathbf{a} \notin \mathbf{B}$ 月即可.援

【例 4】设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

思路提示 首先要把握集合 M 与 N 是不含未知数的确定的集合,在对集合 M 具体化时,要注意对集合 M 进行分类讨论,讨论时不能忽视 $M=\emptyset$ 和 $M=N$ 两种情况援

解疫粵越園，原原月二粵，

亦月的可能情况有 $\emptyset$ 、 $\{\text{园}\}$ 、 $\{\text{原原}\}$ 、 $\{\text{园, 原原}\}$

(员当月越0时,方程曾垣圆葬垣员曾垣葬原员越园
无解,

亦△越原葬^原原^原约园亦葬^原原^原援

(圆当月 $\neq$ 粤月 $\neq$ ○)时,则月越园或月越原原,
即方程曾垣圆葬员曾葬原员越园只有一解,

[illegible]

两个不等实根 园,原原媛

亦 { 源葬(𡵓)原原葬(𡵓)跃园,
原圆葬(𡵓)越原原, 亦葬(𡵓)援
葬(𡵓)原员越园援

綜上可知 葬 原或 葬越援

点评：(员)集合 $M \subseteq N$ 包含两种情况，一种是真包含，再一种是相等。本题必须讨论这两种情况；

(圆)空集是任何集合的子集,空集是任何非空集合的真子集援
在由已知集合的关系求参数范围时,一定不要漏掉讨论 $\varnothing$ 的情况援

巩固提高与高考链接

巩固提高

一、选择题

员若集合 粤越 曾替 远 葬越 缘 则下列结论中正确的是 ...
..... (摇摇)

- 粤援葬 粤

悦援葬 粤
- 月葬 粤

阅葬 粤
- 圆对于集合 粤,月,“粤 月”不成立的含义是 (摇摇)
- 粤是 粤的子集

月中的元素都不是 月中的元素

悦中至少有一个元素不属于 月

阅中至少有一个元素不属于 粤

猿 国近 国范 山东潍坊高一教学质量检测 员 集合 孕越 {曾替 原员 越 栽越 原员 园 则 孕与 栽的关系为 (摇摇)

- 粤爱栽

月爱栽
- 悦爱栽

阅爱栽
- 源若 粤 月,粤 悦且 月越 园员 猿 悦越 园 圆 缘 则满足上述条件的集合有 (摇摇)
- 粤 个

月 个
- 悦 个

阅 个

缘已知集合 孕越 曾替 越 集合 匝越 曾替 越 若 匝 孕,那么 葬的值是 (摇摇)

- 粤

月

悦或 原员

阅或 原员

二、填空题

远设 粤越 曾替 垣 曾原 越 月越 曾替 且 粤 月 则实数 葬的取值范围是 援

苑用适当的符号填空 援 越, 越, 越, 越, 越
葬 {遭葬 葬 { (葬遭);
{葬遭 {葬遭 {圆源 {圆猿源;
 越 {葬援

愿设 粤越 {正方形}, 月越 {平行四边形}, 悦越 {四边形}, 阅越 {矩形}, 耘越 {多边形}, 则 粤 月 悦 阅 耘之间的关系是 援

怨集合 酝越 曾替 垣 葬 晕 }, 孕越 曾替 垣 原 葬 缘 葬 晕 } 则集合 酝与集合 孕的关系为 援

三、解答题

员填表:

集合	元素个数	子集的数目
{葬}	员	
{葬遭}	圆	
{葬遭糟}	猿	
{葬遭糟}	源	
...	...	

如果集合中有 灶个元素,你能写出它的所有子集数目的公式吗?真子集个数呢?非空子集个数呢?(用 灶表示)

员已知集合 粤越 圆源远愿 月越 员圆猿缘 是否存在集合 悦使 悦的每一个元素都加上 圆就变成了 粤的一个子集,且 悦的每一个元素都减去 圆就变成了 月的一个子集?若存在,求出集合 悦;若不存在,请说明理由

高考链接

员 国近 上海高考 理 员 已知集合 粤越 原员猿源 集合 月越 {猿} 若 月 粤 则实数 皂越 援
思路提示:由子集的定义,列出关于 皂的方程求解援注意到 皂 园 所以只有 皂 越 原员 援

训练 源函数的概念



知识导航

函数 粤月是非空的_____ ,如果按照某种确定的对应关系 枣使对于集合 粤中的任意一个数 曾在集合 月中都有_____ 的数 枣曾和它对应 ,那么就称_____ 为从集合 粤到集合 月的一个_____ ,记作_____ ,其中 ,曾叫做_____ ,曾的取值范围 粤叫做函数的_____ 与 曾的值相对应的 赠值叫做_____ ,函数值的集合{ 枣曾} 赠= 粤叫做函数的值域援显然 ,值域是集合 月的_____ 援

函数三要素 :

①_____ ;②_____ ;③_____ 援
两个函数当且仅当_____ 和_____ 都相同时 ,
这两个函数才是相等函数援

课前热身

源下列说法中 ,不正确的是_____ (摇摇)
粤函数的值域中每一个数在定义域中都有数与之对应
月函数的定义域和值域一定是不含数 园 的集合
悦定义域和对应法则完全相同的函数表示同一个函数
阅若函数的定义域中只有一个元素 ,则值域也只含有一个元素

缘下列各组函数中 ,表示相等函数的是_____ (摇摇)

粤枣曾 越曾原猿与 早曾 越原√曾原曾原猿
月枣曾 越曾原员与 早曾 越 $\begin{cases} 贼原贼原员 \\ 员原贼原贼原员 \end{cases}$
悦枣曾 越√曾与 早曾 越√曾^圆
阅枣曾 越曾与 圆面积 赠是圆的半径 曾的函数

远已知函数 枣曾 越 $\frac{员}{员原曾}$ (曾≠员) ,求 枣枣原员]及
枣原枣原员]的值援



【例员】判断下列函数是否为相等函数援

(员)枣曾 越 $\frac{曾原员}{曾原员}$ 与 早曾 越曾原员;
(圆)枣曾 越曾原员曾原员与 早曾 越 $\frac{曾原员}{曾原员}$;
(猿)枣曾 越√曾原员与 早曾 越曾原员;

(源)枣曾 越√曾与 早曾 越曾援

思路提示 由于函数的值域由定义域和对应法则唯一确定 ,所以要判断两个函数是否为相等函数 ,主要看它们的定义域和对应法则是否相同援

解 : (员)中 枣曾的定义域为{ 曾≠员} ,早曾的定义域为 砸 ,不是相等函数 ;

(圆)是相等函数 ;

(猿)枣曾 越 $\frac{曾原员}{曾原员}$,对应法则不同 ,不是相等函数 ;

(源)是相等函数援

点评 : (员)定义域不同 ,两个函数就不相等 ; (圆)对应法则不同 ,两个函数也不相等 ; (猿)只要定义域和对应法则都相同 ,就是相等函数 ,因为值域由定义域和对应法则确定 ; (源)函数的自变量采用什么字母表示对函数没有影响援

【例圆】求下面函数的定义域 :

(员)赠 越√曾原猿 ,曾原员 ;

(圆)枣曾 越 $\frac{曾原员}{\sqrt{曾原员}}$ 援

思路提示 列出使函数解析式有意义的不等式或不等式组 ,从而确定函数的定义域援

解 : (员)要使解析式有意义 ,当且仅当 $\begin{cases} 曾原猿 \geq 园 \\ 曾原员 \neq 园 \end{cases}$ 解得

定义域为{ 曾≠员 且 曾≠猿} (区间表示 : [猿 , 员) ∪ (员 , 垣)) 援

(圆)要使解析式有意义 ,当且仅当 $\begin{cases} 曾原员 \neq 园 \\ 曾原员 \geq 园 \end{cases}$ 解得

定义域为{ 曾≠员 且 曾≠猿} (区间表示 : (猿 , 员) ∪ (员 , 垣)) 援

点评 求函数 (已知解析式) 的定义域时 ,注意如下情况 :

(员)如果是整式 ,那么定义域为 砸 ;
(圆)如果是分式 ,那么分母不为零 ;
(猿)如果是根式 ,那么偶次根下非负 ;奇次根下为 砸 ;
(源)如果是 曾 ,那么底数不为零 ;
(缘)如果是几个代数式用运算符号连接 ,那么要使各部分都有意义——取交集援



巩固提高

一、选择题

员已知 孕 越曾^圆 曾≤源 , 匠 越赠^圆 赠≤圆 , 下列对应不表示从 孕到 匠的函数的是_____ (摇摇)

粤枣曾 越 $\frac{曾原员}{曾原员}$ 摇摇 月枣曾 越 $\frac{曾原员}{曾原员}$ 猿枣曾 越曾^圆 猿枣曾 越曾^圆

例 1 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的值域.

解 因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上也是单调递减的. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $f(x) \rightarrow 1$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的值域是 $(1, +\infty)$.

例 2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域.

解 因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上也是单调递减的. 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $f(x) \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域是 $(0, 1)$.

二、填空题

1. 若 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域是 $(0, 1)$.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的值域.

三、解答题

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域.

例 3 已知 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的值域.

高考链接

例 1 (安徽高考) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的值域.

思路提示: 已知条件中 $f(x) = \frac{1}{x}$ 与 $f(x)$ 构成倒数关系,那么运算两次后出现什么结果? [$f(f(x)) = x$]

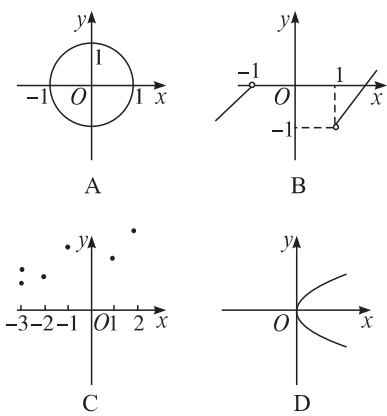
例 2 (陕西高考) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,求函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域.

思路提示: 先求分母的取值范围,然后结合 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图象求解.

例 3 (天津高考) 某公司一年购买某种货物 m 吨,每次都购买 x 吨,运费为 y 万元,一年的总存储费用为 z 万元,则一年的总费用 w 与自变量 x 的函数关系式是 $w = \frac{m}{x}y + \frac{1}{2}zx$.

思路提示: 总费用 = 总运费 + 总存储费用.

下列能确定 是 曾的函数的图形是 (摇摇)



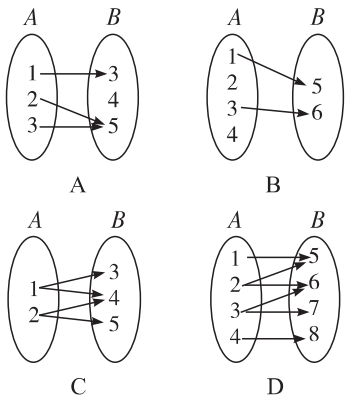
已知函数 枣曾 越原曾垣曾垣曾的图象与 曾轴有交点,则实数 皂的范围是 (摇摇)

粤皂跃原员
 悦皂 皂原员
 阅皂 皂原员

源已知 枣曾是一次函数,且 枣枣曾 越曾原员,则 枣曾为 (摇摇)

粤枣曾原/圆垣员
 月枣曾/圆曾垣圆垣员
 悦枣曾原/圆垣员或 原/圆曾垣圆垣员
 阅不存在

缘给出下列四个对应,其中构成映射的是..... (摇摇)

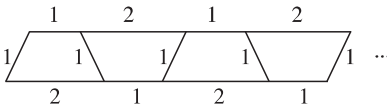


二、填空题

远已知 枣曾曾 越曾原曾,则 枣/圆 越_____援

苑长度单位海里和米的换算关系是 员海里约合 员愿圆米,则米数 赠与海里数 曾的函数关系为_____援

愿观察下列图形和所给表格中的数据后回答问题:



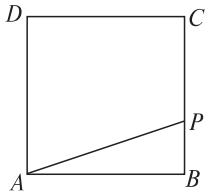
梯形个数	员	圆	猿	源	缘	...
图形周长	缘	愿	员员	员源	员苑	...

当梯形个数为 灶时,这时图形的周长为_____援

三、解答题

怨已知 枣曾 越曾垣员,皂曾 越曾垣员,求:(员)枣枣曾;(圆)枣皂曾;(猿)皂枣曾援

员如图,在边长为 源的 正方形 粤月阅中,的边上有一点 孕,沿着边线 月阅粤由 月(起点)向 粤(终点)运动,设点 孕运动的距离为 曾,△粤孕月的面积为 赠援



(员)求 赠与 曾之间的函数关系式;
 (圆)画出 赠枣曾的图象援

高考链接

员(福建高考·文·圆分)已知 枣曾 是二次函数,不等式 枣曾 约 园 的解集是(园,缘),且 枣曾在区间[原员,源]上的最大值是 员圆,求 枣曾 的解析式援

思路提示:已知函数类型求解析式时,常用待定系数法求解,设出 枣曾 表达式列方程(组)求解援

训练 单调性与最大(小)值



知识导航

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时

①若都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是 增函数;

②若都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是 减函数.

如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数, 那么就说函数 $f(x)$ 在这一区间具有(严格的) 单调性, 区间 D 叫做函数 $f(x)$ 的 单调区间 (或单调增区间/减区间).

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I 如果存在实数 x_0 满足:

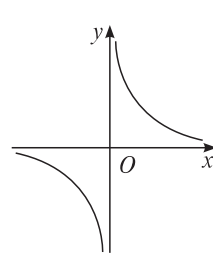
(1) 对于任意的 $x \in I$ 都有 $f(x) \leq f(x_0)$;

(2) 存在 $x_1 \in I$ 使得 $f(x_1) < f(x_0)$.

那么, 我们称 x_0 是函数 $f(x)$ 的 最大值.

课前热身

函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图象如右图所示,



则它的单调减区间为 (摇摇)

增区间: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

减区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

若函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是 I 上的减函数, 那么 (摇摇)

增区间: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 减区间: 无法确定

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 I 上, 那么下列结论正确的是 ... (摇摇)

增区间: $(-\infty, 0)$ 减区间: $(0, +\infty)$

增区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 减区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



例1 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

思路提示: 证明的关键是对 $f(x_1) - f(x_2)$ 进行变形, 尽量变形为几个最简单的因式乘积的形式.

证明: 设 $x_1 < x_2 < 0$, 则

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$

因为 $x_1 < x_2 < 0$, 所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 0$.

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$.

所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

点评: 用定义证明单调性的步骤:

(1) 取值: 设 x_1, x_2 是该区间内的任意两个值, 且 $x_1 < x_2$.

(2) 作差变形: 即作差 $f(x_1) - f(x_2)$ (或 $f(x_2) - f(x_1)$), 并通过因式分解、配方、有理化等方法, 向有利于判断差的符号的方向变形.

(3) 定号: 即确定 $f(x_1) - f(x_2)$ (或 $f(x_2) - f(x_1)$) 的符号, 当符号不确定时, 可以进行分类讨论.

(4) 判断: 根据定义作出结论.

例2 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为 I , 对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 都有 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_1 + x_2)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) < f(0)$. 试判断在 I 上是否有最大值和最小值? 如果有, 求出最大值和最小值; 如果没有, 请说明理由.

思路提示: 本题是抽象函数问题, 属于较难题. 对已知条件的灵活变形是难点所在. 判断最值, 首先要判断单调性, 可以利用 $f(x) + f(y) > f(x+y)$ 展开.

解: 设 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 + x_2 > x_1$, $x_1 + x_2 > x_2$.

由 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_1 + x_2)$ 得 $f(x_1) > f(x_1 + x_2)$, $f(x_2) > f(x_1 + x_2)$.

所以 $f(x)$ 在 I 上是减函数.

又 $f(0) > f(x)$ 对任意 $x \in I$ 成立, 所以 $f(0)$ 是最大值.

又 $f(x) < f(0)$ 对任意 $x \in I$ 成立, 所以 $f(0)$ 是最大值.

又 $f(x) < f(0)$ 对任意 $x \in I$ 成立, 所以 $f(0)$ 是最大值.



巩固提高

一、选择题

下列函数中, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是减函数的是 ... (摇摇)

增区间: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 减区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

增区间: $(-\infty, 0)$ 减区间: $(0, +\infty)$

增区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 减区间: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

圆若赠越枣曾 是砸上的减函数,对于曾约园,曾跃园则 (摇摇)
 粤葵(原曾)跃枣(原曾) 月葵(原曾)约枣(原曾)
 悦葵(原曾)越枣(原曾) 阅无法确定
 猿 圆园远 圆园苑 山东实验中学高一期中 远 函数 枣曾 越
 源 曾原曾缘 在区间[原圆,垣肆]上是增函数,在区间
 (原肆,原圆)上是减函数,则 枣员 等于 (摇摇)
 粤源京苑 月源
 悦源苑 阅源缘

源函数 赠越 ^猿 _{曾圆} (曾≠原圆)在区间[园缘]上的最大、小值分
 别是 (摇摇)
 粤 ^猿 _苑 园 月 ^猿 _苑 园
 悦 ^猿 _苑 ^猿 _苑 阅 ^猿 _苑 ^猿 _苑

二、填空题

缘若函数 赠越曾赠越原 ^遭 _曾 在(园,垣肆)上都是减函数,则函
 数 赠越曾垣曾 在(园,垣肆)上的单调性是_____援
 远函数 枣曾在(原肆,园)和(园,垣肆)上递减,且 枣(原圆) 越
 枣(圆),则 枣曾京员 跃垣的解集是_____援
 苑老师给出一个函数 赠越枣曾,四个学生甲、乙、丙、丁各指
 出这个函数的一个性质:
 甲 对于 曾 砸 函数的图象关于直线 曾越员 对称;
 乙 在(原肆,园)上函数递减;
 丙 在[园,垣肆)上函数递增;
 丁 枣(圆)不是函数的最小值援
 如果其中恰有三人说得正确,请写出一个这样的函数:
 _____援

三、解答题

愿证明函数 枣曾 越曾原曾在区间(员,垣肆)上是增函数援

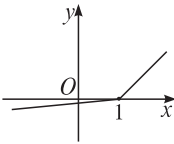
怨已知函数 枣曾 越曾原曾在[园,肆](肆>园)上最大值为
 猿,最小值为 圆,求实数 葬 的取值范围援

高考链接

晟 圆园远 江西高考 远 若不等式 曾垣葬曾垣员>园对一切 曾
 (园, ^员 _圆)成立,则 葬 的最小值为 (摇摇)
 粤苑 月源京圆
 悦源 ^缘 _圆 阅源京猿
 思路提示:分离参数 葬得 葬>原(曾垣 ^员 _曾),把右边看成是
 解析式,转化为函数的最值问题援
 圆 圆园远 北京高考 缘改编 已知 枣曾 越 ^员 _曾
 是(原肆,垣肆)上的增函数,那么 葬 的取值范围是
 (摇摇)

粤援园,垣肆) 月援原肆,猿
 悦 ^猿 _猿 猿 阅援园,猿

思路提示:根据题意画出分段函数的一个可能草图,如
 图,再进行判定援



猿 圆园远 福建高考 理 圆(员) 已知函数 枣曾 越原曾垣曾求 枣
 (曾在区间[贼,垣员]上的最大值 澡贼援
 思路提示:按照对称轴 曾越原与区间[贼,垣员]的关系结合
 函数图象分类讨论(可以把[贼,垣员]看作一个移动的块,
 从左向右移动)援

训练 奇偶性



知识导航与课前热身

知识导航

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(-x) = f(x)$ 那么函数 $f(x)$ 就叫做 偶函数 偶函数的图象关于 y 轴 对称

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x 都有 $f(-x) = -f(x)$ 那么函数 $f(x)$ 就叫做 奇函数 奇函数的图象关于 原点 对称

课前热身

函数 $f(x) = x^2$ 的奇偶性为 (摇摇)

奇函数

偶函数

既是奇函数又是偶函数

非奇非偶函数

下列函数是偶函数的是 (摇摇)

$f(x) = x^2 + 1$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = x^2 + x$

$f(x) = x^2 + x^4$

已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 则 $f(-1) =$ (摇摇)

-2

-1

1

2



题型示例与解题示范

【例1】 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 + 1$

(2) $f(x) = x^2 - 1$

(3) $f(x) = x^2 + x$

(4) $f(x) = x^2 + x^4$

思路提示: 判断函数的奇偶性, 首先要检验定义域是否关于原点对称, 然后再严格按照奇偶性的定义, 经过化简、整理, 再与 $f(x)$ 比较得出结论

解: (1) $f(x) = x^2 + 1$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 关于原点对称, 又 $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

所以 $f(x) = x^2 + 1$ 是偶函数

(2) $f(x) = x^2 - 1$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, 关于原点对称, 又 $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数

(3) $f(x) = x^2 + x$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, 关于原点对称, 又 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$, 所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数

(4) $f(x) = x^2 + x^4$ 的定义域是 $\mathbb{R}$, 关于原点对称, 又 $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 = x^2 + x^4 = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数

点评: 利用定义判断函数的奇偶性要注意以下几点:

(1) 必须首先判断 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称

(2) 有些函数必须根据定义域化简后才可判断, 否则可能无法判断或判断错误

(3) 若 $f(x)$ 化简后为 $f(x) = x^2 + 1$, 若不化简可能会判断为偶函数

(4) 若判断一个函数为非奇非偶函数, 只要在定义域内举一个反例即可

【例2】 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式

思路提示: 首先利用 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系, 再利用函数的奇偶性找到 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系, 从而得到对称区间上的函数表达式

解: 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$. 又 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$. 故当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$. 所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$

点评: (1) 在哪个区间求表达式, 就设在哪里; (2) 利用奇偶性把 $f(x)$ 写成 $f(-x)$ 或 $-f(-x)$, 从而解出 $f(x)$



巩固提高与高考链接

巩固提高

一、选择题

已知函数 $f(x) = x^2 + 1$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 (摇摇)

奇函数

偶函数

不具有单调性

单调性由 x 确定

例 下列函数不具备奇偶性的是 (摇摇)

- 粤 $y = \sin x$

月 $y = \cos x$
- 悦 $y = \tan x$

阅 $y = \cot x$

例 下列命题中正确命题的个数为 (摇摇)

- ① 对 $f(x)$ 定义域内的任意 x 都有 $f(x) = -f(-x)$ 成立,则 $f(x)$ 是奇函数
- ② 对 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都有 $f(x) = f(-x)$ 成立,则 $f(x)$ 是偶函数
- ③ 对 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都有 $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x}$ 成立,则 $f(x)$ 是奇函数
- ④ 对 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都有 $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(-x)}{x}$ 成立,则 $f(x)$ 是偶函数
- 粤 ①②
- 月 ③④
- 悦 ①③
- 阅 ②④

二、填空题

例 设函数 $f(x)$ 是奇函数,若 $f(1) = 2, f(2) = 3$, 则 $f(-1) = \underline{\quad\quad\quad}, f(-2) = \underline{\quad\quad\quad}$.

例 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(1) + f(2) + \dots + f(2012) = \underline{\quad\quad\quad}$.

例 奇函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点,则方程 $f(x) = 0$ 的所有根之和为 $\underline{\quad\quad\quad}$.

例 已知 $f(x)$ 是奇函数,且 $f(1) = 2, f(2) = 3$, 则 $f(-1) = \underline{\quad\quad\quad}, f(-2) = \underline{\quad\quad\quad}$.

三、解答题

例 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是奇函数.

例 已知 $f(x)$ 是奇函数,且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$, 求 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时的表达式.

高考链接

例 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(2012)$ 的值为 (摇摇)

思路提示: 奇函数这一条件隐含了 $f(0) = 0$ 这一信息,充分利用奇函数 $f(x)$ 满足的关系式 $f(x+2) = -f(x)$, 将 $f(2012)$ 转化成 $f(0)$ 进而求解.

例 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的任意函数,则下列叙述正确的是 (摇摇)

粤 $f(x) + f(-x)$ 是奇函数

月 $f(x) - f(-x)$ 是奇函数

悦 $f(x) + f(-x)$ 是偶函数

阅 $f(x) - f(-x)$ 是偶函数

思路提示: 利用奇、偶函数的定义对每一个选项中的函数进行验证即可.

第二章 基本初等函数(I)

训练 指数与指数幂的运算



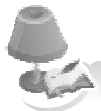
知识导航与课前热身

知识导航

一般地,如果 $a^x=N$,那么 x 叫做 N 以 a 为底的 a 的对数,记作 $x=\log_a N$,当 $a=10$ 时,记作 $x=\lg N$;当 $a=e$ 时,记作 $x=\ln N$.
当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时,正数 N 的对数 $\log_a N$ 有两个,可用符号 $\log_a^{\pm} N$ 表示,其中 $\log_a^+$ 叫做 $\log_a N$ 的正对数,这里 $\log_a^+$ 叫做 $\log_a N$ 的正对数,这里 $\log_a^+$ 叫做 $\log_a N$ 的正对数.
我们规定正数的正分数指数幂的意义是: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$;
($a>0$)正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿,我们规定 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$;
有理数指数幂的运算性质:
(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$;
(3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

课前热身

例1 已知 $a^x = b$,求 x ;
(1)已知 $a^x = b$,求 x ;
下列说法正确的是 (摇摇)
① a^x 的 x 次方根是 a
② a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
③ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
④ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑤ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑥ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑦ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑧ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑨ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$
⑩ a^x 的 x 次方根是 $a^{\frac{1}{x}}$



题型示例与解题示范

【例1】化简下列各式

(1) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{2}}$
(2) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{2}}$
思路提示 把根式化为分数指数幂是解决此类问题的基本思路,再根据分数指数幂的运算性质进行化简
解: (1) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$
(2) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$

点评 进行指数幂运算时,化负指数为正指数,化根式为分数指数幂,化小数为分数进行运算,便于进行乘除、乘方、开方运算,以达到化繁为简的目的.
利用分数指数幂的运算性质进行运算,思路是利用分数指数幂的运算性质进行化简,直到计算出最简结果.这要求在记准、记熟运算性质的基础上,结合问题进行灵活的运用.

【例2】已知 $a^x = b$,求下列各式的值

(1) $a^{\frac{1}{x}}$ (2) $a^{\frac{1}{x}}$ (3) $a^{\frac{1}{x}}$
思路提示 从已知条件中解出 a 的值,然后再代入求值,这种方法不是最简单的方法,应设法从整体寻求结果与条件 $a^x = b$ 的联系,进而整体代入求值.
解: (1) 法一 $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$
法二 (配方) $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$
(2) $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$
亦 $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$
(3) $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$

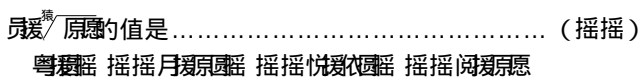
点评 解决条件求值问题一般有三个思路:
(1)由条件直接去推结论;
(2)由结论去探求条件;
(3)分别从条件和结论出发向中间靠拢.
要注意整体思想的运用.



巩固提高与高考链接

巩固提高

一、选择题



愿缘的值是 (摇摇)

猿缘 猿缘 猿缘 猿缘
猿缘 猿缘 猿缘 猿缘
猿缘 猿缘 猿缘 猿缘
猿缘 猿缘 猿缘 猿缘

猜下列计算中正确的个数是 (摇摇)

①葬^{猿葬}·葬^{圆葬}越葬^{员葬}摇②(葬^{圆葬})越葬^{员葬}摇③葬^{圆葬}垣葬^{员葬}越葬^{员葬}摇

④(葬^{員圓}冚^{員圓}越^{員圓}葬^{員圓}冚^{員圓}葬^{員圓})

粵苑 月苑 悅苑 閱苑

源 题 范 山东东营一模 猿 下列结论中,正确的个数是.....

..... (摇摇)

①当葬园时(葬)越葬摇②葬越葬查灶天园摇③函数

職(曾圓)員(建曾熱)的定義域是(圓 恒律)援④若

所謂越緣而越圓則圓者，謂

粵苑 月苑 悅苑 閱苑

缘起(猿原猿原猿)猿原猿有意义的 曾的取值范围是 ... (摇摇)

粵 獼 月 獼 員 且 曾 獼

悦原彭曾员 阅警约原袁曾员

二、填空题

远猿若皂跃园灶猿跃园,则(皂猿·灶猿)猿越猿援

苑 苑
苑 苑
山东日照一中高三二次调研 员 已知圆

垣^{原普}圆^{原普}越缘,则愿垣愿^{原普}的值为_____援

愿^员葬^葬垣^垣曹^曹)(葬^葬原^原曹^曹)(葬^葬垣^垣曹^曹)越 援

怨員援員 曾員垣員 原源曾源 越越援援

三、解答题

已知 $\sqrt{a-1}$ 与 $\sqrt{b-1}$ 是正数，求下列各式的值。

[illegible]

(圓葬^圖塋^等葬^圖);

(猿) 葬 原葬 援

試計算下列各式：

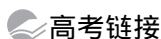
(員)〔園〕^園垣^員愿^園原(原)愿^園原^園愿^園伊
(員)〔園〕^園;

(圆) (园) 猿 原 猿 苑 垣 (原) 猿 垣 垣

查員：張國治

(猻)(原猿猿原)垣(园圆园圆)原园√缘原圆垣(√圆原

猿园援



猿 圆 圆 苑 山东临沂高三期中 猿 化简 葬. $\sqrt{\frac{\text{原}}{\text{葬}}}$ 垣

(猜) 猿 垣 源 (猜) 猿 垣 源 葬得..... (摇摇)

粵漢/原聲耳聽

月媛/原薺

悦源 / 原馨

阅爱原 / 原望耳聒

思路提示 利用分数指数幂与根式的互化关系,化根式为分数指数幂进行运算.