

前言

Foreword



《高中同步测控全优设计》系列丛书是志鸿优化隆重推出的最新教学研究成果。本丛书根据新的课堂教学模式,采用了双栏互动的形式,以学生为主体,着力培养学生的学习兴趣,挖掘学习潜能。在学习过程中充分体现了既“授人一鱼”又“授人以渔”的教育理念,使学生在掌握基础知识的同时,基本技能也相应得到提高,而基本技能的提高又促进了对基础知识的掌握,使繁重的学习环节演变为一个螺旋上升的良性循环过程。

丛书具有以下特点:

Overall 全

内容全:知识覆盖全面,对考纲考点及相关热点问题讲解细致;

过程全:结合中学教学的实际,对整个学习环节进行全程设计,科学组织内容,精心设计每个细微之处。

Outstanding 优

过程优:学无定法,但本丛书却能对繁杂的学习过程进行全面优化,科学把握,主次分明,组成了一个科学、实用的学习过程;

编者优:从全国各地名校中聘请一线教学骨干教师亲自执笔。

New 新

理念新:吸收最新教研成果,以人为本,帮助学生全面发展;

内容新:以最新教改精神为依据、以最新教材为蓝本,及时吸收新材料、新背景,全面提高内容的新颖性;

形式新:在呈现方式上,一改老面孔,以双栏互动、彩版设计的全新形式展现在广大读者面前,一对一地展示知识与方法,直接高效地指导教学。

由于时间、水平所限,书中难免存在一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正。

丛书编委会

栏目功能解读



温故知新



新知预习

以学案设计的形式,对本节主干知识进行梳理,帮助学生初步感知即将学习的知识内容和知识体系。



基础示例

对“新知预习”中的主要知识点进行例析,帮助学生掌握常见基础题型的解题思路和方法。



互动课堂



疏导引导

对本节的主干知识和重点、难点进行整合讲解、深入剖析,引导学生突破思路,掌握技巧,解决思想障碍,为学生全面扎实地掌握教材知识点、提升综合能力奠定坚实的基础。



活学巧用

针对“疏导引导”中的知识点,选取典型、新颖的例题,采用“解剖麻雀”的方式,进行全解全析,点拨思路,展示方法。



主动成长



夯基达标

针对所学内容,进行专项训练,巩固基础知识,培养基本技能。



走近高考

让学生提前感受高考,了解命题意图,把握命题趋势。

CONTENTS

目录

第一讲 坐标系	1	温故知新	21
一 平面直角坐标系	1	互动课堂	21
温故知新	1	主动成长	24
互动课堂	1	二 圆锥曲线的参数方程	25
主动成长	4	温故知新	25
二 极坐标系	6	互动课堂	26
温故知新	6	主动成长	28
互动课堂	6	三 直线的参数方程	30
主动成长	8	温故知新	30
三 简单曲线的极坐标方程	9	互动课堂	31
温故知新	9	主动成长	34
互动课堂	10	四 渐开线与摆线	36
主动成长	12	温故知新	36
四 柱坐标系与球坐标系简介	13	互动课堂	36
温故知新	13	主动成长	38
互动课堂	14	单元测评(一)	39
主动成长	15	单元测评(二)	40
单元测评(一)	16	模块综合测评(一)	43
单元测评(二)	18	模块综合测评(二)	46
第二讲 参数方程	21	解析与答案	49
一 曲线的参数方程	21		



第一讲 坐标系

一 平面直角坐标系



温故知新

新知预习

1. 通过直角坐标系, 平面上的点与 _____, 曲线与 _____ 建立了联系, 从而实现了 _____ 的结合. 根据几何对象的特征, 选择适当的坐标系, 建立它的 _____, 通过 _____ 研究它的性质及与其他几何图形的关系, 这就是研究几何问题的坐标法.

2. 设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点, 在变换 $\varphi: \begin{cases} x' = \text{_____} \\ y' = \text{_____} \end{cases}$ 的作用下, 点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$, 称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换, 简称 _____.



基础示例

- 1 曲线 $y = \sin 3x$ 由正弦曲线 $y = \sin x$ 经过怎样的变换得到... ()
- A. 横坐标不变, 纵坐标伸长为原来的 3 倍
B. 横坐标不变, 纵坐标缩为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
C. 横坐标伸长为原来的 3 倍, 纵坐标不变
D. 横坐标缩为原来的 $\frac{1}{3}$, 纵坐标不变
- 2 将正弦曲线 $y = \sin x$ 作如下变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 3y \end{cases}$, 得到的曲线方程为 ... ()
- ()
- A. $y' = 3\sin \frac{1}{2}x'$ B. $y' = \frac{1}{3}\sin 2x'$
C. $y' = \frac{1}{2}\sin 2x'$ D. $y' = 3\sin 2x'$



互动课堂



重难点突破

本课时的重点是坐标法思想与坐标伸缩变换, 难点是怎样建立适当的坐标系及注意问题, 对坐标伸缩变换的理解与应用.

一、坐标法思想

1. 坐标法是在坐标系的基础上, 把几何问题转化成代数问题, 通过代数运算研究几何图形性质的方法. 它是解析几何中最基本的研究方法. 例如在平面直角坐标系中, 根据确定直线位置的几何要素, 我们可以探索并掌握直线方程的几种形式(点斜式、两点式及一般式), 体会斜截式与一次函数的关系. 在空间坐标系中, 通过高次方程的计算, 使人们对一些星体的轨迹运动和变化规律有所了解 and 掌握.



活学巧用

【例1】究竟以什么样的方法建立平面直角坐标系, 才能够使方程最为简单呢? 在建立坐标系的过程中我们应该注意什么呢?

探究: 一般情况下我们有这样一个建立坐标系的规律:

- (1) 当题目中有两条互相垂直的直线, 以这两直线为坐标轴; (2) 当题目中有对称图形, 以对称图形的对称轴为坐标轴; (3) 当题目中有已知长度的线段, 以线段所在直线为对称轴, 以端点或中点为原点.

直角坐标系建立完后, 需仔细分析曲线的特征, 注意揭示隐含条件, 抓住曲线上任意点有关的等量关系、所满足的几何条件, 列出方程. 在将几何条件转化为代数方程的过程

2. 坐标法解决几何问题的“三部曲”: 第一步: 建立适当的坐标系, 用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素, 将几何问题转化为代数问题; 第二步: 通过代数运算, 解决代数问题; 第三步: 把代数运算结果“翻译”成几何结论.

坐标系包括平面直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系等. 对于不同类型的几何图形, 选用相应的坐标系可以使建立的方程更加简单. 如要确定体育馆内一个位置, 建立柱坐标系就比较适合, 通过柱坐标我们可以比较精确地找到这个位置的所在地.

3. “坐标法”应贯穿解析几何教学的始终, 帮助同学们不断地体会“数形结合”的思想方法. 在教学中应自始至终强化这一思想方法, 这是解析几何的特点. 在通过代数方法研究几何对象的位置以后, 还可以画出其图形, 验证代数结果; 同时, 通过观察几何图形得到数学结论, 对结论进行代数证明, 即用解析方法解决某些代数问题, 不应割断它们之间的联系.

4. 平面直角坐标系是解析几何的基础, 同学们应在已有知识的基础上做好自我完善, 从解决问题中提高学习兴趣, 激发学习的积极性和主动性, 养成不断探求知识、完善自我的良好个性品质. 进一步理解平面直角坐标系在对实际问题的解决中的重要作用, 会用平面直角坐标系解决实际问题.

二、用数学知识和方法解决实际问题

1. 教材中从实际问题引入数学方法, 逐步把实际问题归结为数学模型, 然后运用数学方法加以解决. 如: 利用两个不同的观测点测得同一炮弹爆炸声的时间差, 可以确定爆炸点所在的双曲线的方程, 此时还不能确定爆炸点的准确位置. 再增设一个观测点 C , 利用 B 、 C 两处测得的爆炸声的时间相同, 可以求出一条直线的方程, 解这两个方程组成的方程组, 就能确定爆炸点的准确位置.

2. 存在的问题: 把实际问题归结为数学模型是需要一定功底的, 而我们普遍存在着一些问题: (1) 不喜欢应用性问题中烦琐的文字叙述, 不愿读下去, 勉强读完也弄不清题意; (2) 学过的概念、公式、方法到解题时用不上, 找不到数学关系式, 思路不清, 容易混淆; (3) 平时学习中对应用性问题接触太少, 所以学习感到困难, 不知如何下手, 也不愿多做, 导致心理上不愿学等等.

我们应注意运用数学方法、思想、观点去观察和分析各种实际问题, 从中抽象出数学知识和数学规律, 建立数学模型, 并运用数学知识进行正确的运算和推理.

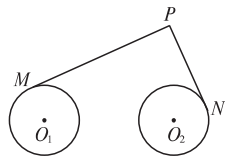
3. 要善于在普通语言中寻找数量关系, 找出哪些是已知量, 哪些是未知量, 哪些是直接未知量, 哪些是间接未知量, 用数学语言把这些数量关系表示出来.

4. 化实际问题为数学模型, 一方面要深入分析实际问题中的空间形式和各种数量关系, 另一方面在学习数学理论的过程中, 要仔细体会和寻求这些理论对解决实际问题的指导作用, 努力把它应用于现实世界, 以解决人们迫切需要解决的实际问题.

中, 要注意圆锥曲线定义和初中平面几何知识的应用, 还会用到一些基本公式, 如两点间的距离公式、点到直线的距离公式、直线斜率公式等.

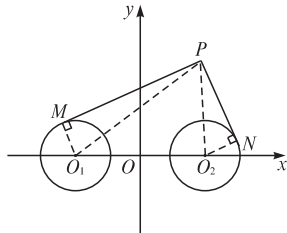
另外, 在化简过程中, 我们要注意运算和变形的合理性与准确性, 避免“失解”和“增解”. 这一步内容中学阶段不要求(从理论上讲则是必要的), 多数情况下不会有什么问题, 但若遇特殊情况则应该适当予以说明.

【例2】 2005 江苏高考 如图, 圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1, $|O_1O_2| = 4$, 过动点 P 分别作圆 O_1 、圆 O_2 的切线 PM 、 PN (M 、 N 分别为切点), 使得 $PM = \sqrt{2}PN$, 试建立适当的坐标系, 并求动点 P 的轨迹方程.



解析: 本题是解析几何中求轨迹方程问题, 由题意建立适当坐标系, 写出相关点的坐标, 由几何关系式: $PM = \sqrt{2}PN$, 即 $(PM)^2 = 2(PN)^2$, 结合图形, 由勾股定理转化为 $PO_1^2 - 1 = 2(PO_2^2 - 1)$, 设 $P(x, y)$, 由距离公式写出代数关系式, 化简整理可得.

解: 如图, 以直线 O_1O_2 为 x 轴, 线段 O_1O_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 则两圆心的坐标分别为 $O_1(-2, 0)$, $O_2(2, 0)$.



设 $P(x, y)$, 则 $PM^2 = PO_1^2 - MO_1^2 = (x+2)^2 + y^2 - 1$.

同理, $PN^2 = (x-2)^2 + y^2 - 1$.

$\because PM = \sqrt{2}PN$, 即 $(x+2)^2 + y^2 - 1 = 2[(x-2)^2 + y^2 - 1]$, 即 $x^2 - 12x + y^2 + 3 = 0$, 即 $(x-6)^2 + y^2 = 33$.

这就是动点 P 的轨迹方程.

点评: 这道高考题是考查解析几何中求点的轨迹方程的方法应用, 考查建立坐标系、数形结合思想、勾股定理、两点间距离公式等相关知识点, 及分析推理、计算化简技能、技巧等, 是一道很综合的题目.

【例3】 (1) 在同一平面直角坐标系中, 求下列方程所对应的图形经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = 4y \end{cases}$ 后的图形.

① $y^2 = 2x$; ② $y = 3\sin 2x$.

(2) 将曲线 C 按伸缩变换公式 $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y \end{cases}$ 变换后的曲线方程

为 $x'^2 + y'^2 = 1$, 则曲线 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

C. $4x^2 + 9y^2 = 36$ D. $4x^2 + 9y^2 = 1$

解: (1) 由伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = 4y, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 2x', \\ y = \frac{1}{4}y'. \end{cases}$ (*)

① 将 (*) 代入 $y^2 = 2x$, 得 $(\frac{1}{4}y')^2 = 2 \cdot (2x')$.

三、平面直角坐标系中的坐标伸缩变换

1. 设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点, 在变换 $\varphi: \begin{cases} x' = \lambda x, \lambda > 0, \\ y' = \mu y, \mu > 0 \end{cases}$ 的作用下, 点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$, 称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换, 简称伸缩变换.

2. 在坐标伸缩变换的作用下, 可以实现平面图形的伸缩. 因此, 平面图形的伸缩变换可以用坐标伸缩变换来表示.

3. 坐标伸缩变换与我们前面学的坐标变换之间的关系.

两者都是将平面图形进行伸缩平移的变换. 实质是一样的. 比如正弦曲线经过这两种变换后, 所得图形的形状是没有改变的. 在一定的变换规律下椭圆能够变成椭圆, 也能够变成圆. 只是说法上和认识上的一点不同.

我们结合函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的形成过程 (与 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 相类似), 看看在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况吧.

函数 $y = \sin \omega x, x \in \mathbf{R}$ (其中 $\omega > 0, \omega \neq 1$) 的图象, 可以看作把正弦曲线上所有点的横坐标缩短 (当 $\omega > 1$ 时) 或伸长 (当 $0 < \omega < 1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到. 平面直角坐标系伸缩变换认为是一个坐标伸缩过程: 保持纵坐标不变, 将 x 轴进行压缩或伸长.

函数 $y = A\sin x, x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega \neq 1$) 的图象, 可以看作把正弦曲线上所有点的纵坐标伸长 (当 $A > 1$ 时) 或缩短 (当 $0 < A < 1$ 时) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到. 平面直角坐标系伸缩变换认为是一个坐标伸缩过程: 保持横坐标不变, 将 y 轴进行压缩或伸长.

由此看出, 两者只是说法上的不同, 本质上是一样的.

另外, 我们应该注意到: 通过一个表达式, 平面直角坐标系中坐标伸缩变换将 x 与 y 的伸缩变换统一成一个式子了, 即 $\begin{cases} x' = \lambda x, \lambda > 0, \\ y' = \mu y, \mu > 0. \end{cases}$ 我们在使用时, 要注意点的对应性, 即分清新旧. $P'(x', y')$ 是变换图形后的点的坐标, $P(x, y)$ 是变换前图形的点的坐标.

$$\therefore y'^2 = 64x'.$$

$\therefore$ 经过伸缩变换后抛物线 $y^2 = 2x$ 变成了抛物线 $y'^2 = 64x'$.

$$\textcircled{2} \text{ 将 } (*) \text{ 代入 } y = 3\sin 2x, \text{ 得 } \frac{1}{4}y' = 3\sin 2 \cdot (2x'),$$

$$\therefore y' = 12\sin 4x'.$$

$\therefore$ 经过伸缩变换后, 曲线 $y = 3\sin 2x$ 变成了曲线 $y' = 12\sin 4x'$.

$$(2) \text{ 将 } \begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y \end{cases} \text{ 代入方程 } x'^2 + y'^2 = 1, \text{ 得 } 4x^2 + 9y^2 = 1.$$

故选 D.

【例4】在同一平面直角坐标系中, 将直线 $x - 2y = 2$ 变成直线 $2x' - y' = 4$, 求满足图象变换的伸缩变换.

解: 设变换为 $\begin{cases} x' = \lambda x, \lambda > 0, \\ y' = \mu y, \mu > 0. \end{cases}$ 代入方程 $2x' - y' = 4$, 得 $2\lambda x - \mu y = 4$, 与 $x - 2y = 2$ 比较系数得 $\lambda = 1, \mu = 4$.

$$\therefore \begin{cases} x' = x, \\ y' = 4y, \end{cases} \text{ 即直线 } x - 2y = 2 \text{ 上所有点的横坐标不变, 纵坐标伸长为原来的 4 倍可得到直线 } 2x' - y' = 4.$$

点评: (1) 求满足图象变换的伸缩变换, 实际上是让我们求出其变换公式, 我们将新旧坐标分清, 代入对应的直线方程, 然后比较系数就可得了.

(2) 原曲线的方程 $f(x, y) = 0$, 新曲线的方程 $g(x', y') = 0$, 以及坐标伸缩变换公式 $\begin{cases} x' = \lambda x, \lambda > 0, \\ y' = \mu y, \mu > 0 \end{cases}$ 中, “知二可求一”.

【例5】已知 $f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \cos \omega x (\omega > 0), f_2(x)$ 的图象可以看作是把 $f_1(x)$ 的图象在其所在的坐标系中的横坐标压缩到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到的, 则 ω 为 ()

$$A. \frac{1}{2} \quad B. 2 \quad C. 3 \quad D. \frac{1}{3}$$

解析一: $f_1(x) = \cos x \rightarrow f_2(x) = \cos 3x$.

$$\text{解析二: } \because \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x, \\ y' = y, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 3x', \\ y = y'. \end{cases}$$

将其代入 $y = \cos x$, 得到 $y' = \cos 3x'$, 即 $f_2(x) = \cos 3x$.

答案: C

点评: 本题直接考查变换规律: 函数 $y = \cos \omega x, x \in \mathbf{R}$ (其中 $\omega > 0, \omega \neq 1$) 的图象, 可以看作把余弦曲线上所有点的横坐标缩短 (当 $\omega > 1$ 时) 或伸长 (当 $0 < \omega < 1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变) 而得到. 应用时谨防出错.



夯基达标

- 1 在同一平面直角坐标系中,经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = 3y \end{cases}$ 后,曲线 C 变为曲线 $2x'^2 + 8y'^2 = 1$,则曲线 C 的方程为 ()
- A. $50x^2 + 72y^2 = 1$ B. $9x^2 + 100y^2 = 1$
C. $25x^2 + 36y^2 = 1$ D. $\frac{2}{25}x^2 + \frac{8}{9}y^2 = 1$

- 2 将曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 伸缩变换为 $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$ 的伸缩变换公式为 ()

A. $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$ B. $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$
C. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$ D. $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$

- 3 在平面直角坐标系中,求下列方程所对应的图形经过伸缩

变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}$ 后的图形.

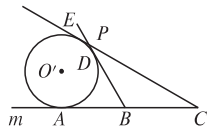
- (1) $5x + 2y = 0$;
(2) $x^2 + y^2 = 1$.

- 4 在同一平面直角坐标系中,将曲线 $x^2 - 36y^2 - 8x + 12 = 0$ 变成曲线 $x'^2 - y'^2 - 4x' + 3 = 0$,求满足图象变换的伸缩变换.

- 5 $\triangle ABC$ 中,若 BC 的长度为 4,中线 AD 的长为 3,则 A 点的轨迹方程是_____.

- 6 在气象台 A 正西方向 300 千米处有一台风中心,它以每小时 40 千米的速度向东北方向移动,距台风中心 250 千米以内的地方都要受其影响.问:从现在起,大约多长时间后,气象台 A 所在地将遭受台风影响持续多长时间?

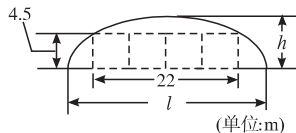
- 7 如图,已知 A, B, C 是直线 m 上的三点,且 $|AB| = |BC| = 6$, $\odot O'$ 切直线 m 于点 A ,又过 B, C 作 $\odot O'$ 异于 m 的两切线,切点分别为 D, E ,设两切线交于点 P ,



- (1) 求点 P 的轨迹方程;

- (2) 经过点 C 的直线 l 与点 P 的轨迹交于 M, N 两点,且点 C 分 $\overrightarrow{MN}$ 所成的比等于 $2:3$,求直线 l 的方程.

- 8 如右图,某隧道设计为双向四车道,车道总宽 22 m,要求通行车辆限高 4.5 m,隧道全长 2.5 km,隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



- (1)若最大拱高 h 为 6 m,则隧道设计的拱宽 l 是多少?
 (2)若最大拱高 h 不小于 6 m,则应如何设计拱高 h 和拱宽 l ,才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小?(半个椭圆的面积公式为 $S = \frac{\pi}{4}lh$,柱体体积为底面积乘以高.结果精确到 0.1 m)

- 9 某河上有抛物线型拱桥,当水面距拱顶 5 m 时,水面宽 8 m,一木船宽 4 m,高 2 m,载货后木船露在水面上的部分高为 $\frac{3}{4}$ m,问水面上涨到与抛物线拱顶相距多少米时,木船开始不能通航?

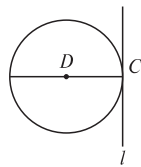
- 10 我们有一种数学方法:数形结合.如果要采取这种方法,基本上都是要建立适当的坐标系,我们为什么要采取这种方法呢?



- 1 2006 江苏高考,4 为了得到函数 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象,只需把函数 $y = 2\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象上所有的点...

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍(纵坐标不变)
 B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍(纵坐标不变)
 C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍(纵坐标不变)
 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍(纵坐标不变)

- 2 2004 云南三月检测题改编 如图,已知直线 l 与半径为 1 的 $\odot D$ 相切于点 C ,动点 P 到直线 l 的距离为 d ,若 $\frac{|PD|}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,建立适当的直角坐标系,求点 P 的轨迹方程.



- 3 2006 全国高考卷 I,20 在平面直角坐标系 xOy 中,有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆.设椭圆在第一象限的部分为曲线 C ,动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x 、 y 轴的交点分别为 A 、 B ,且向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 求:
 (1)点 M 的轨迹方程;
 (2) $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值.

二 极坐标系

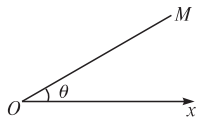


温故知新

新知预习

1. 用_____与_____确定平面上点的位置的坐标系,就是极坐标系.

2. 如图,设 M 是平面内一点,极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的_____,记为_____,以极轴 Ox 为始边,射线 OM 为终边的角 $\angle xOM$ 叫做点 M 的_____,记为_____.有序数对_____叫做点 M 的极坐标,记作 M _____.



3. 极坐标与直角坐标的互化公式:

_____;

_____.



基础示例

① 点 A 的极坐标为 $(2, -\pi)$, 它的直角坐标是_____.

② 把点 M 的直角坐标 $(-\sqrt{3}, -1)$ 化成极坐标.

③ 把直角坐标系的原点作为极点, x 轴的正半轴作为极轴, 并且在两种坐标系中取相同的长度单位. 若曲线的极坐标方程是 $\rho^2 = \frac{1}{4\cos^2\theta - 1}$, 则它的直角坐标方程是_____.



互动课堂

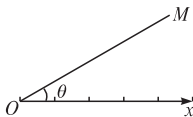


重难点突破

一、极坐标的概念

1. 在生活中,如台风预报、地震预报、测量、航空、航海中等,我们经常用距离和方向来表示一点的位置.用距离和方向表示平面上一点的位置,就是极坐标.

2. 如图,极坐标系内一点的极坐标的规定:对于平面上任意一点 M ,用 ρ 表示线段 OM 的长度,用 θ 表示从 Ox 到 OM 的角度, ρ 叫做 M 的极径, θ 叫做点 M 的极角,有序数对 (ρ, θ) 就叫做 M 的极坐标.把定义弄清楚,我们就会用极坐标确定点的位置.



特别注意: (1) ①极点, ②极轴, ③长度单位, ④角度单位和它的正方向构成了极坐标系的四要素,缺一不可.

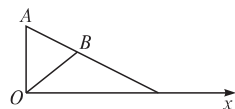
(2) 特别地,当 M 在极点时,它的极坐标 $\rho=0, \theta$ 可以取



活学巧用

【例1】已知两点的极坐标 $A(3, \frac{\pi}{2})$ 、 $B(3, \frac{\pi}{6})$, 则 $|AB| =$ _____, AB 与极轴正方向所成的角为_____.

解析: 如图,根据极坐标的定义可得 $|AO| = |BO| = 3$, $\angle AOB = 60^\circ$, 即 $\triangle AOB$ 为正三角形.



答案: $3 \quad \frac{5\pi}{6}$

点评: 在极坐标系中,点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 、 $P_2(\rho_2, \theta_2)$ ($\rho_1, \rho_2 > 0$), 则 P_1P_2 两点距离 $|P_1P_2| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$. 请同学们推导一下.

【例2】在极坐标系中,若等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点是 $A(2, \frac{\pi}{4})$ 、 $B(2, \frac{5\pi}{4})$, 那么顶点 C 的坐标可能是_____ ()

A. $(4, \frac{3\pi}{4})$ B. $(2\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4})$ C. $(2\sqrt{3}, \pi)$ D. $(3, \pi)$

任意值. 极点 O 的坐标为 $(0, \theta) (\theta \in \mathbf{R})$.

(3) 一般地, 不作特殊说明时, $\rho \geq 0, \theta$ 可取任意实数.

3. 建立极坐标系后, 给定 $\rho (\rho \geq 0)$ 和 θ , 就可以在平面内唯一确定点 M . 确定的方法是:

(1) 由 θ 定射线. 根据 θ 角确定点 M 所在的射线 OM ;

(2) 由 ρ 取点. 在射线 OM 上取 $|OM| = \rho$, 点 M 的位置即可确定.

4. 给定平面内任意一点 M , 也可以找到它的极坐标 (ρ, θ) ($\rho \geq 0$).

特别注意: (1) 一般地, 极坐标 (ρ, θ) 与 $(\rho, \theta + 2k\pi) (k \in \mathbf{Z})$ 表示同一个点. 和直角坐标不同, 平面内一个点的极坐标有无数种表示.

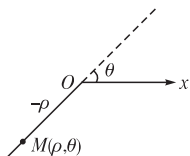
(2) 如果规定 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$, 那么除极点外, 平面内的点可用唯一的极坐标 (ρ, θ) 表示; 同时, 极坐标 (ρ, θ) 表示的点也是唯一确定的.

5. 为完整起见, 现作一补充: 若 $\rho < 0$, 则 $-\rho > 0$, 我们规定点 $M(\rho, \theta)$ 与点 $P(-\rho, \theta)$ 关于极点对称. 点 $M(\rho, \theta) (\rho < 0)$ 的位置的确定方法是:

(1) 由 θ 定射线. 先找出 θ 角的终边所在的射线, 确定其反向延长线 OM .

(2) 由 ρ 取点. 在射线 OM 上取 $|OM| = -\rho$, 点 M 的位置即可确定, 如图.

进一步可以得出, 极坐标 (ρ, θ) 与 $(\rho, \theta + 2k\pi) (k \in \mathbf{Z})$ ($-\rho, \theta + \pi + 2k\pi) (k \in \mathbf{Z})$ 表示同一点. 应当指出, 若 $\rho < 0$, 应有说明; 否则, 可认为 $\rho \geq 0$.



二、极坐标和直角坐标的互化

平面内的一个点既可以用直角坐标表示, 也可以用极坐标表示. 我们要理解极坐标的概念, 会正确进行点的极坐标与直角坐标的互化, 利用两种坐标的互化, 可以把不熟悉的问题转化为熟悉的问题.

1. 互化的前提条件: ① 极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合; ② 极轴与 x 轴的正半轴重合; ③ 两种坐标系中取相同的长度单位.

2. 极坐标与直角坐标的互化公式:

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta.$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0).$$

3. 极坐标与直角坐标的互化, 常用方法有代入法、平方法等, 还经常用到同乘以(或除以) ρ 等技巧.

4. 由直角坐标化成极坐标时, 要注意点所在象限, 从而确定极角 θ .

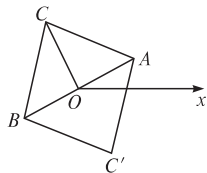
试一试:

(1) 已知点 A 的极坐标 $(-4, \frac{5\pi}{3})$, 求它的直角坐标;

(2) 已知点 B, C, D 的直角坐标为 $(2, -2), (0, -15), (-12, 5)$, 求它的极坐标 ($\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$).

解析: 如图, 由题设可知 A, B 两点关于极点 O 对称, 即 O 是 AB 的中点.

又 $|AB| = 4, \triangle ABC$ 为正三角形, $|OC| = 2\sqrt{3}, \angle AOC = \frac{\pi}{2}$, C 对应



的极角 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$, 即 C 点极

坐标为 $(2\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4})$ 或 $(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4})$.

答案: B

点评: 在找点的极坐标时, 把图形画出来, 可以帮助我们解决问题, 从图形中很容易找到极角和极径. 这一点跟直角坐标系中的方法是一致的, 数形结合.

【例3】 在极坐标系中与点 $A(3, -\frac{\pi}{3})$ 关于极轴所在的直线对称的点的极坐标是 _____ ()

A. $(3, \frac{2\pi}{3})$ B. $(3, \frac{\pi}{3})$ C. $(3, \frac{4\pi}{3})$ D. $(3, \frac{5\pi}{6})$

解析: 极坐标中的点 (ρ, θ) 关于极轴所在的直线对称的点的极坐标为 $(\rho, 2k\pi - \theta) (k \in \mathbf{Z})$, 利用这一规律即可.

答案: B

点评: 一般地, 在极坐标系中点 (ρ, θ) 关于极轴所在的直线对称的点的极坐标为 $(\rho, 2k\pi - \theta) (k \in \mathbf{Z})$; 点 (ρ, θ) 关于极点对称的点的极坐标为 $(\rho, 2k\pi + \pi + \theta) (k \in \mathbf{Z})$; 点 (ρ, θ) 关于过极点且垂直于极轴的直线对称的点的极坐标为 $(\rho, 2k\pi + \pi - \theta) (k \in \mathbf{Z})$.

【例4】 (1) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 的直角坐标方程是 _____;

(2) 极坐标方程 $\rho = \sin \theta + 2\cos \theta$ 所表示的曲线是 _____.

解析: (1) 根据极坐标的定义, $\therefore \tan \theta = \frac{y}{x}, \therefore \tan \frac{3\pi}{4} = \frac{y}{x}$, 即 $y = -x (x \leq 0)$.

(2) 将极坐标方程化为直角坐标方程即可判断曲线的形状, 因为给定的 ρ 不恒等于零, 用 ρ 同乘方程的两边得 $\rho^2 = \rho \sin \theta + 2\rho \cos \theta$.

化成直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = y + 2x$, 即 $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$, 这是以点 $(1, \frac{1}{2})$ 为圆心, 半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的圆.

答案: (1) $y = -x (x \leq 0)$ (2) 以点 $(1, \frac{1}{2})$ 为圆心, 半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 的圆

点评: 当极坐标方程中含有 $\sin \theta, \cos \theta$ 时, 可将方程两边同乘以 ρ , 凑成含有 $\rho \sin \theta, \rho \cos \theta$ 的项, 然后再代入互化公式便可化为直角坐标方程, 此法是常用技巧.

【例5】 进行直角坐标方程与极坐标方程的互化.

(1) $y^2 = 4x$; (2) $y^2 + x^2 - 2x - 1 = 0$; (3) $\theta = \frac{\pi}{3}$; (4) $\rho \cos^2 \frac{\theta}{2} =$

1; (5) $\rho^2 \cos 2\theta = 4$; (6) $\rho = \frac{1}{2 - \cos \theta}$.

解: (1) 将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 $y^2 = 4x$, 得 $(\rho \sin \theta)^2 = 4\rho \cos \theta$,

化简得 $\rho \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$.

解: (1) 点 A 的直角坐标为 $(-2, 2\sqrt{3})$.

(2) $\because \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1$, 且点位于第四象限, (注意!)

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$, 点 B 的极坐标为 $(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$.

又 $\because x=0, y<0, \rho=15$, $\therefore$ 点 C 的极坐标为 $(15, \frac{3\pi}{2})$.

对于 $D(-12, 5)$, $\rho=13$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$.

$\because D$ 在第二象限内, $\therefore \theta = \pi - \arctan \frac{5}{12}$.

$\therefore D$ 点坐标为 $(13, \pi - \arctan \frac{5}{12})$.

(2) 将 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入 $y^2 + x^2 - 2x - 1 = 0$, 得
 $(\rho\sin\theta)^2 + (\rho\cos\theta)^2 - 2\rho\cos\theta - 1 = 0$,

化简得 $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 1 = 0$.

(3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $\therefore \tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$, 化简得 $y = \sqrt{3}x (x \geq 0)$.

(4) $\because \rho\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$,

$\therefore \rho \frac{1+\cos\theta}{2} = 1$, 即 $\rho + \rho\cos\theta = 2$.

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2$, 化简得 $y^2 = -4(x-1)$.

(5) $\because \rho^2 \cos 2\theta = 4$, $\therefore \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 4$, 即 $x^2 - y^2 = 4$.

(6) $\because \rho = \frac{1}{2-\cos\theta}$,

$\therefore 2\rho - \rho\cos\theta = 1$.

$\therefore 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$, 化简得 $3x^2 + 4y^2 - 2x - 1 = 0$.

点评: 在进行两种坐标间的互化时, 我们要注意:

(1) 互化公式是有三个前提条件的, 极点与直角坐标系的原点重合; 极轴与直角坐标系的横轴的正半轴重合; 两种坐标系的单位长度相同.

(2) 由直角坐标求极坐标时, 理论上不是唯一的, 但这里约定只在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 范围内求值.

(3) 由直角坐标方程化为极坐标方程, 最后要化简.

(4) 由极坐标方程化为直角坐标方程时要注意变形的等价性, 通常总要用 ρ 去乘方程的两端, 应该检查极点是否在曲线上, 若在, 是等价变形, 否则, 不是等价变形.



主动成长



夯基达标

- 点 P 的直角坐标为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 那么它的极坐标可表示为 ()
 A. $(2, \frac{\pi}{4})$ B. $(2, \frac{3\pi}{4})$ C. $(2, \frac{5\pi}{4})$ D. $(2, \frac{7\pi}{4})$
- 点 $P(\rho_0, \theta_0) (\rho_0 \neq 0)$ 关于极点的对称点的极坐标是 ()
 A. $(-\rho_0, \theta_0)$ B. $(\rho_0, -\theta_0)$
 C. $(-\rho_0, -\theta_0)$ D. $(-\rho_0, \theta_0 + \pi)$
- 方程 $\rho^2 \cos 2\theta = c^2 (c > 0)$ 的曲线是 ()
 A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线
- 曲线的极坐标方程为 $a\rho\cos^2 \theta + b\cos\theta - \sin\theta = 0 (a \neq 0)$, 则曲线是 ()
 A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线
- 点 $P_1(2, \frac{\pi}{4}), P_2(-3, -\frac{\pi}{4})$, 则 $|P_1P_2|$ 的值为 ... ()
 A. $\sqrt{13}$ B. 5
 C. $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$

- 已知点 $A(-2, -\frac{\pi}{2}), B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}), O(0, \theta)$, 则 $\triangle ABO$ 为 ...
 ()
 A. 正三角形 B. 直角三角形
 C. 锐角等腰三角形 D. 等腰直角三角形
- 直线 l 过点 $A(3, \frac{\pi}{3}), B(3, \frac{\pi}{6})$, 则直线 l 与极轴夹角等于
- 极坐标方程 $\rho = \frac{2+2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ 所对应的直角坐标方程为
- 已知下列各点的极坐标为 $A(5, \frac{\pi}{2}), B(2, 0), C(6, -\frac{5}{6}\pi)$,
 $D(-4, \frac{\pi}{6}), E(0, \frac{\pi}{3})$, 画出这些点, 并求出它们的直角坐标.

10 在极轴上求与点 $A(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 距离为 5 的点 M 的坐标.

11 舰 A 在舰 B 的正东 6 km 处, 舰 C 在舰 B 的北偏西 30° 且与 B 相距 4 km 处, 它们围捕海洋动物. 某时刻 A 发现动物信号, 4 秒后 B, C 同时发现这种信号. A 发射麻醉炮弹. 设舰与动物均为静止的, 动物信号的传播速度是 1 km/s, 炮弹运行的初速度是 $\sqrt{\frac{20\sqrt{3}g}{3}}$ km/s, 其中 g 为重力加速度. 若不计空气阻力与舰高, 问若以舰 A 所在地为极点建立极坐标系, 求舰 A 发射炮弹的极坐标.



- 1 (经典回放) 极坐标方程 $4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是 ()
A. 圆 B. 椭圆
C. 双曲线的一支 D. 抛物线
- 2 (经典回放) 极坐标方程 $4\sin^2\theta=3$ 表示的曲线是... ()
A. 两条射线 B. 两条相交直线
C. 圆 D. 抛物线
- 3 (经典回放) 极坐标方程 $\rho=\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)$ 所表示的曲线是... ()
A. 双曲线 B. 椭圆 C. 抛物线 D. 圆
- 4 (经典回放) 已知直线的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则极点到此直线的距离是_____.
- 5 (2006 上海高考, 8) 在极坐标系中, O 是极点, 设点 $A(4, \frac{\pi}{3}), B(5, -\frac{5\pi}{6})$, 则 $\triangle OAB$ 的面积是_____.

三 简单曲线的极坐标方程



新知预习

1. 圆心在极点 O , 半径为 r 的圆的极坐标方程是_____.
2. 圆心在 $C(a, 0) (a>0)$, 半径为 a 的圆的极坐标方程是_____.
3. 经过极点, 且与极轴所成的角是 α 的直线 l 的极坐标方程是_____.
4. 经过点 $A(a, 0) (a>0)$, 且垂直于极轴的直线 l 的极坐标方程是_____.

基础示例

- 1 已知半径为 a 的圆的圆心为 $C(a, \frac{\pi}{2})$, ($a>0$), 求圆 C 的极坐标方程.
- 2 设点 P 的极坐标为 (ρ_1, θ_1) , 直线 l 过点 P 且与极轴所成的角为 α , 求直线 l 的极坐标方程.



重难点突破

本课时的重点、难点是求曲线的极坐标方程,要重点掌握特殊情形的直线与圆的极坐标方程。

一、在极坐标系中,平面曲线的极坐标方程 $f(\rho, \theta) = 0$.

1. 一般地,在极坐标系中,如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中至少有一个满足方程 $f(\rho, \theta) = 0$, 并且坐标适合方程 $f(\rho, \theta) = 0$ 的点都在曲线 C 上, 那么方程 $f(\rho, \theta) = 0$ 称为曲线 C 的极坐标方程。

2. 在直角坐标系中, 曲线可以用含有变量 x, y 的方程表示; 同样地, 在极坐标系中, 曲线可以用含有 ρ, θ 这两个变量的方程 $f(\rho, \theta) = 0$ 来表示, 这种方程即为曲线的极坐标方程。

3. 求曲线的极坐标方程的方法、步骤和求直角坐标方程的步骤类似, 就是把曲线看作适合某种条件的点的集合或轨迹; 将已知条件用曲线上点的极坐标 ρ, θ 的关系式 $f(\rho, \theta) = 0$ 表示出来, 就得到曲线的极坐标方程。具体如下:

- (1) 建立适当的极坐标系, 设 $P(\rho, \theta)$ 是曲线上任意一点;
- (2) 由曲线上的点所适合的条件, 列出曲线上任意一点的极径 ρ 和极角 θ 之间的关系式;
- (3) 将列出的关系式进行整理、化简, 得出曲线上的极坐标方程;
- (4) 证明所得方程就是曲线的极坐标方程, 若方程的推导过程正确, 化简过程都是同解变形, 这一证明可以省略。

注意: (1) 在找平面曲线的极坐标方程时, 就要找极径 ρ 和极角 θ 之间的关系式, 常用解三角形(正弦定理, 余弦定理)的知识以及利用三角形的面积相等来建立 ρ, θ 之间的关系。此法称作三角形法。

(2) 在求曲线的极坐标方程时, 关键是找出曲线上的点满足的几何条件, 将它用坐标表示, 再通过代数变换进行化简。

二、用极坐标与直角坐标来表示点和曲线的区别。

1. 对极径 $\rho < 0$ 的理解。

根据极径定义, 极径是距离, 当然是正的。极径是负的, 等于极角增加 π 。负极径的负与数学中历来的习惯相同, 用来表示“反向”, 比较来看, 负极径比正极径多了一个操作, 将射线 OP “反向延长”。而反向延长也可以说成旋转 π , 因此, 所谓“负极径”实质是管方向的。这与数学中通常的习惯一致, 用“负”表示“反向”。如: 直角坐标系中点的坐标是负的; 两个向量对应的数一正一负, 方向也表示是相反的。

一般情况下, 如果不作特殊说明, 极径都指的是正的。

2. 在平面直角坐标系内, 点与有序实数对即坐标 (x, y) 是一一对应的, 可是在极坐标系内, 虽然一个有序实数对 (ρ, θ) 只能与一个点 P 对应, 但一个点 P 却可以与无数多个有序实数

活学巧用

【例1】求: (1) 过 $A(2, \frac{\pi}{4})$ 且平行于极轴的直线方程;

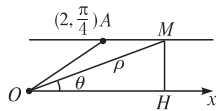
(2) 过 $A(3, \frac{\pi}{3})$ 且和极轴成 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线方程。

解析: (1) 在直线上任意取一点 M , 根据已知条件想办法找到变量 ρ, θ 之间的关系。我们可以通过图中的直角三角形来解决, 因为已知 OA 的长度, 还知 $\angle AOx = \frac{\pi}{4}$, 还可以得到 MH 的长度, 从而在 $Rt\triangle OMH$ 中找到变量 ρ, θ 之间的关系。

(2) 在三角形中利用正弦定理来找到变量 ρ, θ 之间的关系。

解: (1) 如图所示, 在直线 l 上任意取

点 $M(\rho, \theta)$, $\therefore A(2, \frac{\pi}{4})$,



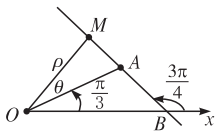
$$\therefore |MH| = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \text{ 在}$$

$Rt\triangle OMH$ 中, $|MH| = |OM| \sin \theta$, 即 $\rho \sin \theta = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 过 $A(2, \frac{\pi}{4})$ 且平行于极轴的直线方程为 $\rho \sin \theta = \sqrt{2}$.

(2) 方法一: 如图所示, $A(3, \frac{\pi}{3})$,

$|OA| = 3$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 由已知



$\angle MBx = \frac{3\pi}{4}$,

$$\therefore \angle OAB = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}.$$

$$\therefore \angle OAM = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}.$$

又 $\angle OMA = \angle MBx - \theta = \frac{3\pi}{4} - \theta$, 在 $\triangle MOA$ 中, 根据正弦

定理得 $\frac{3}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)} = \frac{\rho}{\sin \frac{7\pi}{12}}$,

$$\therefore \sin \frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

将 $\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$ 展开, 化简上面的方程, 可得 $\rho(\sin \theta + \cos \theta) =$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$. $\therefore$ 过 $A(3, \frac{\pi}{3})$ 且和极轴成 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线方程为

$$\rho(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}.$$

方法二: 利用教材 P₁₅ 例 3 的结论可得 $\rho \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) =$

$$\rho \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = 3 \sin \frac{5\pi}{12}.$$

对 (ρ, θ) 对应. 例如 $(\rho, 2n\pi + \theta)$ 与 $(-\rho, (2n+1)\pi + \theta)$ ($n \in \mathbb{Z}$)表示的是同一个点, 所以点与极坐标 (ρ, θ) 不是一一对应的.

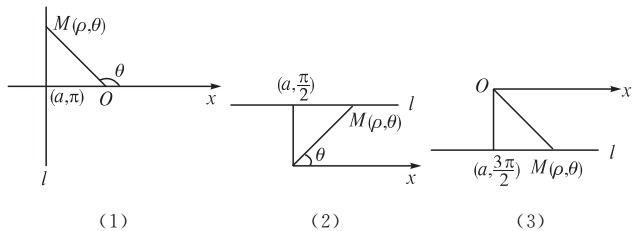
3. 在直角坐标系内, 一条曲线如果有方程, 那么曲线和它的方程是一一对应的(解集完全相同且互相可以推导的等价方程, 只看作一个方程). 可是在极坐标系内, 虽然是一个方程只能与一条曲线对应, 但一条曲线却可以与多个方程对应. 如

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbb{R}$) 与 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbb{R}$) 表示同一条直线.

4. 在直角坐标系内, 曲线上每一点的坐标一定适合它的方程, 可是在极坐标系内, 曲线上一点的所有坐标不一定都适合方程. 例如给定曲线 $\rho = \theta$, 设点 P 的一极坐标为 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 那么点 P 适合方程 $\rho = \theta$, 从而是曲线上的一个点, 但点 P 的另一个极坐标 $(\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$ 就不适合方程 $\rho = \theta$ 了. 所以在极坐标系内, 确定某一个点 P 是否在某一曲线 C 上, 当且仅当点 P 的极坐标中是否有一对坐标 $\rho = \theta$ 适合曲线 C 的方程.

三、以下几种特殊位置的直线的极坐标方程是要掌握的.

1. 过点 $(a, 0)$ ($a > 0$) 且垂直于极轴的直线方程是 $\rho \cos \theta = a$.
2. 过点 (a, π) ($a > 0$) 且垂直于极轴的直线方程是 $\rho \cos \theta = -a$, 如图(1).
3. 过点 $(a, \frac{\pi}{2})$ ($a > 0$) 且平行于极轴的直线方程是 $\rho \sin \theta = a$, 如图(2).
4. 过点 $(a, \frac{3\pi}{2})$ ($a > 0$) 且平行于极轴的直线方程是 $\rho \sin \theta = -a$, 如图(3).
5. 过极点倾角为 α 的直线方程是 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}$).



四、以下几种特殊位置的圆的极坐标方程也需要掌握.

1. 以极点为圆心且半径为 r 的圆的极坐标方程 $\rho = r$.
2. 过极点且圆心坐标为 $(a, 0)$ ($a > 0$) 的圆的极坐标方程为 $\rho = 2a \cos \theta$.
3. 过极点且圆心坐标为 (a, π) ($a > 0$) 的圆的极坐标方程为 $\rho = -2a \cos \theta$, 如图(1).
4. 过极点且圆心坐标为 $(a, \frac{\pi}{2})$ ($a > 0$) 的圆的极坐标方程为 $\rho = 2a \sin \theta$, 如图(2).

点评: 可以看到, 在求曲线方程时, 关键是找出曲线上的点满足的几何条件, 将它用坐标表示, 再通过代数变换进行化简.

【例2】判断点 $(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3})$ 是否在曲线 $\rho = \cos \frac{\theta}{2}$ 上?

解析: 在极坐标系内, 判断点是否在直线上与在直角坐标系内是不同的. 不能只是简单地将点的坐标代入, 当点的坐标代入不能满足方程时, 我们还要找到这个点的其他坐标是否符合曲线方程.

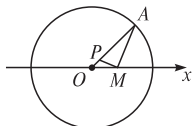
解: $\because$ 点 $(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3})$ 和点 $(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$ 是同一点, 而 $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 $(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$ 在曲线 $\rho = \cos \frac{\theta}{2}$ 上, 即点 $(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3})$ 在曲线 $\rho = \cos \frac{\theta}{2}$ 上.

点评: 我们容易根据直角坐标系的习惯, 当把点的坐标代入, 不满足方程时就说点不在曲线上, 这是不对的. 在这个问题上, 两种坐标系是不相同的. 在极坐标系中, 尽管点 $(-\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3})$ 并不满足 $\rho = \cos \frac{\theta}{2}$, 但是据此并不能肯定这个点不在曲线上.

【例3】设 M 是定圆 O 内一定点, 任作半径 OA , 连结 MA , 自 M 作 $MP \perp MA$ 交 OA 于 P , 求 P 点的轨迹方程.

解: 以 O 为极点, 射线 OM 为极轴, 建立极坐标系, 如图.



设定圆 O 的半径为 r , $OM = a$, $P(\rho, \theta)$ 是轨迹上任意一点.

$\because MP \perp MA, \therefore |MA|^2 + |MP|^2 = |PA|^2$, 由余弦定理可知 $|MA|^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$, $|MP|^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta$, 而 $|PA| = r - \rho$, 由此可得

$$a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta + a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \theta = (r - \rho)^2, \text{ 整理化简, 得 } \rho = \frac{a(a - r \cos \theta)}{a \cos \theta - r}.$$

点评: 寻找一个关键三角形, 使动点的极半径和极角与已知条件成为该三角形的元素, 借助于三角形的边角关系建立起动点的轨迹方程, 这种方法称为三角形法. 若三角形为直角三角形, 可利用勾股定理及其他边角关系建立动点的极坐标方程; 若三角形为一般三角形, 可利用正、余弦定理建立动点的极坐标方程.

【例4】极坐标方程分别是 $\rho = \cos \theta$ 和 $\rho = \sin \theta$ 的两个圆的圆心距是

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

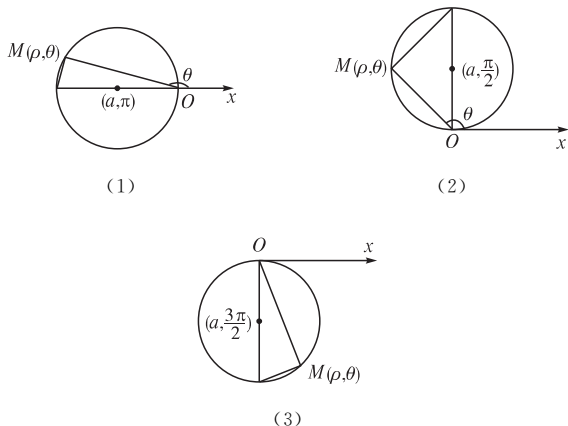
解法一: 两圆圆心的极坐标分别是 $(\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$, 这两圆心的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二: 将方程化为直角坐标方程. 因为 ρ 不恒为零, 可以用 ρ 分别乘方程两边, 得 $\rho^2 = \rho \cos \theta$ 和 $\rho^2 = \rho \sin \theta$.

$$\therefore x^2 + y^2 = x \text{ 和 } x^2 + y^2 = y.$$

它们的圆心分别是 $(\frac{1}{2}, 0)$ 、 $(0, \frac{1}{2})$, 圆心距是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 过极点且圆心坐标为 $(a, \frac{3\pi}{2})$ ($a > 0$) 的圆的极坐标方程为 $\rho = -2a \sin \theta$, 如图(3).



答案:D

点评:可以用极坐标方程与直角坐标方程互化来判断曲线的形状,求解其他问题等.但记住特殊位置的曲线的极坐标方程会给解题带来方便.

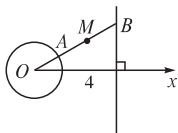
主动成长

夯基达标

- 已知点 $P(\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$, 若点 P 的极角 θ 满足 $-\pi < \theta < \pi, \rho \in \mathbf{R}$, 下列点中与点 P 重合的是 ()
 A. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}), (\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}), (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3})$
 B. $(\sqrt{2}, \frac{8\pi}{3}), (\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}), (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3})$
 C. $(-\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3}), (-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3}), (\sqrt{2}, -\frac{4\pi}{3})$
 D. $(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3})$
- 圆 $\rho = \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta)$ 的圆心的坐标是 ()
 A. $(1, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ C. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ D. $(2, \frac{\pi}{4})$
- 极坐标系中, 方程 $\rho = \cos \theta (\theta \in [0, \pi], \rho \in \mathbf{R})$ 表示的曲线是 ()
 A. 以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为圆心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的上半个圆
 B. 以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为圆心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆
 C. 以 $(1, 0)$ 为圆心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的上半个圆
 D. 以 $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$ 为圆心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆
- 方程 $\rho = \sin \theta + \cos \theta + K$ 的曲线不经过极点, 则 K 的取值范围是 ()
 A. $K \neq 0$ B. $K \in \mathbf{R}$
 C. $|K| > \sqrt{2}$ D. $|K| \leq \sqrt{2}$

- 在极坐标系中, 点 $P(2, \frac{11\pi}{6})$ 到直线 $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = 1$ 的距离等于 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. $1 + \sqrt{3}$
- 点 M 在直线 $\rho \cos \theta = a (a > 0)$ 上, O 为极点, 延长 OM 到 P 使 $|MP| = b (b > 0)$, 则 P 的轨迹方程是
- 画出极坐标方程 $(\theta - \frac{\pi}{4})\rho + (\frac{\pi}{4} - \theta)\sin \theta = 0$ 的图形.
- 证明过 $A(\rho_1, \theta_1)$ 和 $B(\rho_2, \theta_2)$ 两点的直线 l 的极坐标方程是 $\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\rho} = \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{\rho_2} + \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{\rho_1}$.

- 9 已知圆 $\rho=2$, 直线 $\rho\cos\theta=4$, 过极点作射线交圆于 A , 直线于 B , 求 AB 中点 M 的轨迹方程.



- 10 从原点 O 引直线交直线 $2x+4y-1=0$ 于点 M , P 为 OM 上一点, 已知 $|OP| \cdot |OM|=1$, 求 P 点的极坐标方程.

- 11 从极点 O 作圆 $C: \rho=8\cos\theta$ 的弦 ON , 求 ON 的中点 M 的轨迹方程.

- 12 O 为已知圆外的定点, M 在圆上, 以 OM 为边作正三角形 OMN , 当点 M 在圆上移动时, 求点 N 的轨迹方程 (O, M, N 逆时针排列).



走近高考

- (经典回放) 曲线的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化成直角坐标方程为 ()
 A. $x^2+(y+2)^2=4$ B. $x^2+(y-2)^2=4$
 C. $(x-2)^2+y^2=4$ D. $(x+2)^2+y^2=4$
- (经典回放) 在极坐标系中, 过点 $M(2, \frac{\pi}{2})$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程是_____.
- (经典回放) 设有半径为 4 的圆, 它在极坐标系内的圆心的坐标为 $(4, \pi)$, 则这个圆的极坐标方程是_____.

四 柱坐标系与球坐标系简介



温故知新

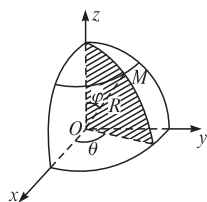
新知预习

- 点 P 的柱坐标 (ρ, θ, z) 中, $\rho \in$ _____, $\theta \in$ _____, $z \in$ _____.
- 柱坐标系又称 _____, 它是由 _____ 及空间直角坐标系中的一部分建立起来的.
- 球坐标系又称 _____, 点 P 的球坐标 (r, φ, θ) 中, $r \in$ _____, $\theta \in$ _____, $\varphi \in$ _____.



基础示例

如图, 请你说出点 M 的球坐标.



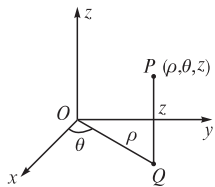


重难突破

本课时的重点与难点均为对柱坐标系、球坐标系概念的理解及简单应用。

一、柱坐标系

1. 定义:如图,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,设 P 是空间任意一点,它在 Oxy 平面上的射影为 Q ,用 (ρ, θ) ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) 来表示点 Q 在平面 Oxy 上的极坐标.这时点 P 的位置可用有序数组 (ρ, θ, z) ($z \in \mathbf{R}$) 表示.这样,我们建立了空间的点与有序数组 (ρ, θ, z) 之间的一种对应关系,把建立上述对应关系的坐标系叫做柱坐标系,有序数组 (ρ, θ, z) 叫做点 P 的柱坐标,记作 $P(\rho, \theta, z)$,其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty$.

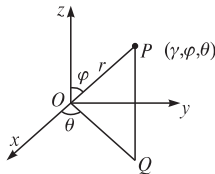


2. 空间点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, θ, z) 之间的

$$\text{变换公式为} \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

二、球坐标系

1. 定义:如图,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,设 P 是空间任意一点,连结 OP ,记 $|OP| = r$, OP 与 Oz 轴正向所夹的角为 φ ,设 P 在 Oxy 平面上的射影为 Q , Ox 轴按逆时针方向旋转到 OQ 时所转过的最小正角为 θ .这样点 P 的位置就可以用有序数组 (r, φ, θ) 表示.这样,空间的点与有序数组 (r, φ, θ) 之间建立了一种对应关系,把建立上述对应关系的坐标系叫做球坐标系(或空间极坐标系),有序数组 (r, φ, θ) 叫做点 P 的球坐标,记作 $P(r, \varphi, \theta)$,其中 $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi$.



2. 空间点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (r, φ, θ) 之间的

$$\text{变换关系为} \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

3. 球坐标系在地理学、天文学中有着广泛的应用.在测量实践中,球坐标中的角 θ 称为被测点 $P(r, \varphi, \theta)$ 的方位角, $90^\circ - \varphi$ 称为高低角.

可以看出,球坐标系与柱坐标系都是在空间直角坐标系的基础上建立的.

在直角坐标系中,我们需要三个长度: (x, y, z) ,而在球坐标系与柱坐标系中,我们需要长度,还需要角度.它是从长度、方向来描述一个点的位置,需要 (ρ, θ, z) 或者 (r, φ, θ) .

三种坐标系互相不同,互相有联系,互相能够转化,都是刻画空间一点的位置,只是描述的角度不同.

活学巧用

【例1】一个圆形体育馆,自正东方向起,按逆时针方向等分为十六个扇形区域,顺次记为一区,二区, ..., 十六区,我们设圆形体育场第一排与体育中心的距离为 500 m,每相邻两排的间距为 1 m,每层看台的高度为 0.7 m,现在需要确定第九区第四排正中的位置 A ,请建立适当的坐标系,把点 A 的坐标求出来.

解:以圆形体育场中心 O 为极点,选取以 O 为端点且过正东入口的射线 Ox 为极轴,在地面上建立极坐标系.则点 A 与体育场中轴线 Oz 的距离为 504 m,极轴 Ox 按逆时针方向旋转 $\frac{17\pi}{16}$,就是 OA 在地平面上的射影. A 距地面的高度为 2.8 m,因此我们可以用柱坐标来表示点 A 的准确位置.

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的柱坐标为 } (504, \frac{17\pi}{16}, 2.8)$$

点评:找空间中一点的柱坐标,与找平面极坐标是类似的,需要确定极径、极角,只是比平面极坐标多了一个量,即点的空间中的高度.

【例2】经过若干个固定和流动的地面遥感观测站监测,并通过数据汇总,计算出一个航天器在某一时刻的位置,离地面 2 384 千米,地球半径为 6 371 千米,此时经度为 80° ,纬度为 75° .试建立适当的坐标系,确定出此时航天器点 P 的坐标.

解:在赤道平面上,选取地球球心为极点,以 O 为端点且与零子午线相交的射线 Ox 为极轴,建立球坐标系,如图.由已知航天器位于经度 80° ,可知 $\theta = 80^\circ$,由航天器位于纬度 75° ,可知 $\varphi = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$,由航天器离地面 2 384 千米,地球半径为 6 371 千米,可知 $r = 2\,384 + 6\,371 = 8\,755$ 千米.

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的球坐标为 } (8\,755 \text{ km}, 15^\circ, 80^\circ).$$

【例3】已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 $AB = 14$, $AD = 6$, $AA_1 = 10$,以这个长方体的顶点 A 为坐标原点,以射线 AB 、 AD 、 AA_1 分别为 Ox 、 Oy 、 Oz 轴的正半轴,建立空间直角坐标系,求长方体顶点 C_1 的空间直角坐标、球坐标、柱坐标.

解析:如图,此题是考查空间直角坐标、球坐标、柱坐标的概念,我们要能借此区分三个坐标,找到它们的相同和不同来.

