

前言

Foreword



《高中同步测控全优设计》系列丛书是志鸿优化隆重推出的最新教学研究成果。本丛书根据新的课堂教学模式,采用了双栏互动的形式,以学生为主体,着力培养学生的学习兴趣,挖掘学习潜能。在学习过程中充分体现了既“授人一鱼”又“授人以渔”的教育理念,使学生在掌握基础知识的同时,基本技能也相应得到提高,而基本技能的提高又促进了对基础知识的掌握,使繁重的学习环节演变为一个螺旋上升的良性循环过程。

丛书具有以下特点:

Overall 全

内容全:知识覆盖全面,对考纲考点及相关热点问题讲解细致;

过程全:结合中学教学的实际,对整个学习环节进行全程设计,科学组织内容,精心设计每个细微之处。

Outstanding 优

过程优:学无定法,但本丛书却能对繁杂的学习过程进行全面优化,科学把握,主次分明,组成了一个科学、实用的学习过程;

编者优:从全国各地名校中聘请一线教学骨干教师亲自执笔。

New 新

理念新:吸收最新教研成果,以人为本,帮助学生全面发展;

内容新:以最新教改精神为依据、以最新教材为蓝本,及时吸收新材料、新背景,全面提高内容的新颖性;

形式新:在呈现方式上,一改老面孔,以双栏互动、彩版设计的全新形式展现在广大读者面前,一对一地展示知识与方法,直接高效地指导教学。

由于时间、水平所限,书中难免存在一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正。

丛书编委会

栏目功能解读



温故知新



新知预习

以学案设计的形式,对本节主干知识进行梳理,帮助学生初步感知即将学习的知识内容和知识体系。



相关链接

选取与本节内容相关的知识,通过分析,建立知识间的联系,帮助学生更好地理解把握新知内容。



互动课堂



疏导引导

对本节的主干知识和重点、难点进行整合讲解、深入剖析,引导学生突破思路,掌握技巧,解决思想障碍,为学生全面扎实地掌握教材知识点、提升综合能力奠定坚实的基础。



活学巧用

针对“疏导引导”中的知识点,选取典型、新颖的例题,采用“解剖麻雀”的方式,进行全解全析,点拨思路,展示方法。



主动成长



夯基达标

针对所学内容,进行专项训练,巩固基础知识,培养基本技能。



走近高考

让学生提前感受高考,了解命题意图,把握命题趋势。

CONTENTS

目录

第一讲 相似三角形的判定及有关性质..... 1

一 平行线等分线段定理 1

温故知新 1

互动课堂 1

主动成长 4

二 平行线分线段成比例定理 5

温故知新 5

互动课堂 6

主动成长 8

三 相似三角形的判定及性质 9

温故知新 9

互动课堂 10

主动成长 12

四 直角三角形的射影定理 13

温故知新 13

互动课堂 14

主动成长 16

单元测评(一) 17

单元测评(二) 19

第二讲 直线与圆的位置关系 20

一 圆周角定理 20

温故知新 20

互动课堂 20

主动成长 22

二 圆内接四边形的性质与判定定理 24

温故知新 24

互动课堂 25

主动成长 26

三 圆的切线的性质及判定定理 29

温故知新 29

互动课堂 29

主动成长 31

四 弦切角的性质 32

温故知新 32

互动课堂 33

主动成长 35

五 与圆有关的比例线段 37

温故知新 37

互动课堂 37

主动成长 40

单元测评(一) 42

单元测评(二) 44

第三讲 圆锥曲线性质的探讨 46

一 平行射影 46

温故知新 46

互动课堂 46

主动成长 47



二 平面与圆柱面的截线	48
温故知新	48
互动课堂	48
主动成长	49
三 平面与圆锥面的截线	50
温故知新	50

互动课堂	50
主动成长	51
单元测评	52
模块综合测评(一)	53
模块综合测评(二)	55
解析与答案	57



第一讲 相似三角形的判定及有关性质

一 平行线等分线段定理



温故知新

新知预习

1. 如图 1-1-1, 三条直线 l_1 、 l_2 、 l_3 满足 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ 且直线 l 、 l' 分别与 l_1 、 l_2 、 l_3 相交于 A_1 、 A_2 、 A_3 和 B_1 、 B_2 、 B_3 , 若 $A_1A_2 = A_2A_3$, 则 _____ = _____.

2. 经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必 _____ 第三边.

3. 经过梯形一腰的中点, 且与底平行的直线 _____ 另一腰.

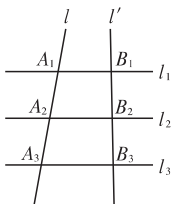


图 1-1-1



知识回顾

1. 三角形的中位线及三角形中位线定理.

中位线: 连结三角形两边中点的线段.

定理: 三角形的中位线平行于第三边, 并且等于第三边的一半.

2. 梯形的中位线及梯形中位线定理.

梯形的中位线: 我们把连结梯形两腰中点的线段叫梯形的中位线.

定理: 梯形的中位线平行于两底, 并且等于两底和的一半.

3. 特殊到一般的数学思想方法.



互动课堂



重难突破

一、平行线等分线段定理

平行线等分线段定理: 如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等, 那么这组平行线在其他直线上截得的线段也相等. 用符号语言表述是: 已知 $a \parallel b \parallel c$, 直线 m 、 n 分别与 a 、 b 、 c 交于点 A 、 B 、 C 和 A' 、 B' 、 C' (如图 1-1-2), 如果 $AB = BC$, 那么 $A'B' = B'C'$.

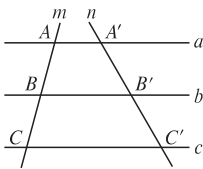


图 1-1-2

对于定理的证明, 如图 1-1-3 所示, 分 $m \parallel n$ 和 m 不平



活学巧用

【例 1】如图 1-1-9, 已知在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 的中点, $DE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $EF \parallel AC$ 交 BC 于点 F . 求证: $BF = CF$.

思路解析: 在三角形中, 只要给了一边的中点和平行线, 根据平行线等分线段定理的推论 1, 就可得出平行线与另一边的交点即是中点. 本题也可以利用平行四边形和全等形来证明, 但会显得麻烦.

证明: 在 $\triangle ABC$ 中,

$\because D$ 是 AC 的中点, $DE \parallel BC$,

$\therefore E$ 是 AB 的中点 (经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边).

又 $\because EF \parallel AC$ 交 BC 于 F ,

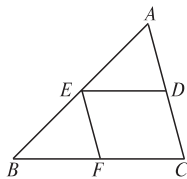


图 1-1-9

行于 n 两种情况证明. 当 $m \parallel n$ 时, 直接运用平行四边形加以证明; 当 m 不平行于 n 时, 利用辅助线构造相似三角形, 进而得到关系式.

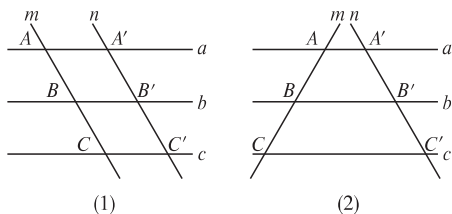


图 1-1-3

定理的条件是 a, b, c 互相平行, 构成一组平行线, m 与 n 可以平行, 也可以相交, 但它们必须与已知的平行线 a, b, c 相交, 即被平行线 a, b, c 所截. 平行线的条数还可以更多. 应当注意定理图形的变式: 对于三条平行线截两条直线的图形, 要注意以下变化 (如图 1-1-4): 如果已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = BC$, 那么根据定理就可以直接得到其他直线上的线段相等. 也就是说, 直线 DE 的位置变化不影响定理的结论.

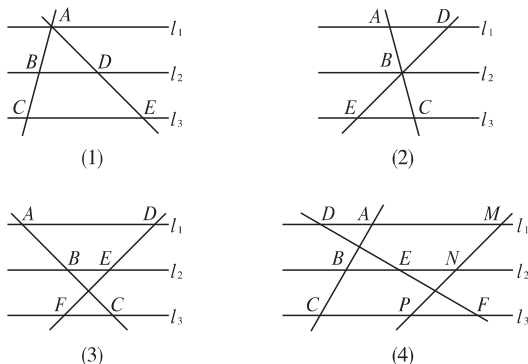


图 1-1-4

利用本定理可将一线段分成 n 等份, 也可以证明线段相等或转移线段的位置. 平行线等分线段定理的逆命题是: 如果一组直线截另一组直线成相等的线段, 那么这组直线平行. 这一命题是错误的, 如图 1-1-5.

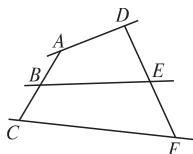


图 1-1-5

二、平行线等分线段定理的推论

平行线等分线段定理的推论有两个, 其中一个是经过三角形一边的中点, 与另一边平行的直线必平分第三边; 另一个是经过梯形一腰的中点, 与底边平行的直线必平分另一腰. 这两个推论的证明如下:

推论 1: 如图 1-1-6(1), 在 $\triangle ACC'$ 中, $AB = BC$, $BB' \parallel CC'$ 交 AC' 于 B' 点. 求证: B' 是 AC' 的中点.

证明: 如图 1-1-6(2), 过 A 作 BB' 与 CC' 的平行线 a , 分别双向延长线段 BB' 、 CC' , 得直线 b, c .

$\because a \parallel b \parallel c, AB = BC,$

$\therefore$ 由平行线等分线段定理, 有 $AB' = B'C'$, 即 B' 是 AC' 的中点.

$\therefore F$ 是 BC 的中点, 即 $BF = FC$.

【例 2】 求证: 在直角梯形中, 两个直角顶点到对腰中点的距离相等.

如图 1-1-10, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, E 是 AB 边的中点, 连结 ED, EC . 求证: $ED = EC$.

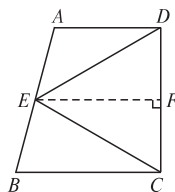


图 1-1-10

思路解析: 在梯形中, 若已知一腰的中点, 一般过这点作底边的平行线即可得到另一腰的中点. 所以由 E 是 AB 边的中点, 作 $EF \parallel BC$ 交 DC 于 F , 即可得 $EF \perp DC$, 从而利用线段中垂线的性质得到结论.

证明: 过 E 点作 $EF \parallel BC$ 交 DC 于 F ,

$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore AD \parallel EF \parallel BC$.

$\because E$ 是 AB 的中点,

$\therefore F$ 是 DC 的中点 (经过梯形一腰中点与底平行的直线必平分另一腰).

$\because \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DFE = 90^\circ$.

$\therefore EF \perp DC$ 于 F .

又 $\because F$ 是 DC 中点,

$\therefore EF$ 是 DC 的垂直平分线.

$\therefore ED = EC$ (线段垂直平分线上的点到线段两端点距离相等).

【例 3】 如图 1-1-11, $\square ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于 O , $OE \parallel AB$ 交 BC 于 E , $AD = 12$, 求 BE 的长.

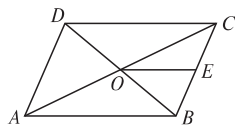


图 1-1-11

思路解析: 本题重在考查应用平行线等分线段定理推论解题的能力.

解: $\because ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA = OC, BC = AD$.

$\because AB \parallel DC, OE \parallel AB$,

$\therefore DC \parallel OE \parallel AB$.

又 $\because AD = 12$,

$\therefore BE = EC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD = 6$.

【例 4】 已知在 $\triangle ABC$ 中, CD 平分 $\angle ACB$, $AE \perp CD$ 于 E , $EF \parallel BC$ 交 AB 于 F . 求证: $AF = BF$.

思路解析: 一般情况下, 几何图形应具有对称的内在美, 当感觉上图形有些缺陷时, 就要添加适当的辅助线, 使其完善. 本题中, $AE \perp CD$ 于 E , 恰在三角形内部, 而 $\text{Rt} \triangle AEC$

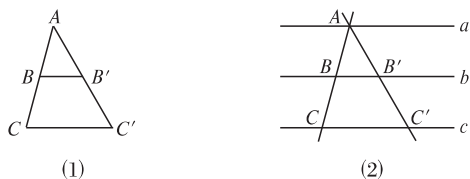


图 1-1-6

推论 2: 如图 1-1-7(1), 已知在梯形 $ACC'A'$ 中, $AA' \parallel CC'$, $AB=BC$, $BB' \parallel CC'$.

求证: B' 是 $A'C'$ 的中点.

证明: $\because$ 梯形 $ACC'A'$ 中 $AA' \parallel CC'$, $BB' \parallel CC'$,
 $\therefore AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

又 $\because AB=BC$, 分别延长 AA' 、 BB' 、 CC' 为 a 、 b 、 c , 如图 1-1-7.

$\therefore$ 由平行线等分线段定理, 有 $A'B'=B'C'$, 即 B' 是 $A'C'$ 的中点.

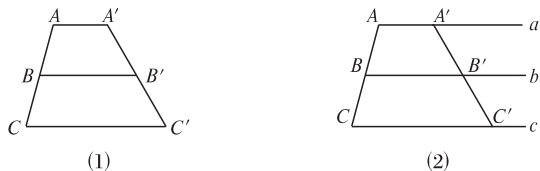


图 1-1-7

三、刨根问底

问题 平行线等分线段定理与它的两个推论之间有着密切的联系, 那么如何理解这种联系?

探究: 只要将平行线等分线段定理的图形中的直线只留下交点之间的部分, 即可产生两个推论的图形; 或者将两个推论中的线段延长成为直线, 也可变成平行线等分线段定理的图形, 它们的关系可以直观地表示, 如图 1-1-8:

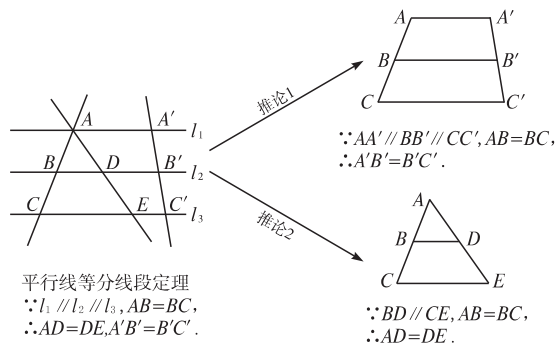


图 1-1-8

又不好用, 所以延长 AE 与 BC 相交就势在必行了.

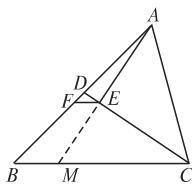


图 1-1-12

证明: 延长 AE 交 BC 于 M .

$\because CD$ 是 $\angle ACB$ 的平分线, $AE \perp CD$ 于 E ,

$\therefore$ 在 $\triangle AEC$ 与 $\triangle MEC$ 中, $\begin{cases} \angle AEC = \angle MEC, \\ EC = CE, \\ \angle ACD = \angle MCD. \end{cases}$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle MEC$.

$\therefore AE = EM$.

$\therefore E$ 是 AM 的中点.

又在 $\triangle ABM$ 中, $FE \parallel BC$,

$\therefore$ 点 F 是 AB 边的中点.

$\therefore AF = BF$.

【例 5】 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $CD \perp AD$, $DE \parallel BA$, 求证: $BC = 2BE$.

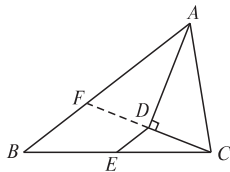


图 1-1-13

思路解析: 要证 $BC = 2BE$, 即证 E 为 BC 的中点, 联系已知条件 $DE \parallel AB$, 考虑平行线等分线段定理的推论, 延长 CD 交 AB 于点 F , 只要证点 D 为 FC 的中点即可.

证明: 延长 CD 交 AB 于点 F ,

$\because AD$ 平分 $\angle FAC$,

$\therefore \angle FAD = \angle CAD$.

在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases} \angle FAD = \angle CAD, \\ AD = AD, \\ \angle FDA = \angle CDA, \end{cases}$

$\therefore \triangle AFD \cong \triangle ACD$.

$\therefore FD = CD$.

又 $\because DE \parallel AB$,

$\therefore BE = EC$, 即 $BC = 2BE$.



夯基达标

- 等腰梯形各边中点连线所围成的四边形是 ()
A. 矩形 B. 菱形 C. 正方形 D. 等腰梯形
- 如图 1-1-14, $AB \parallel CD \parallel EF$, AF 、 BE 相交于 O , 若 $AO = OD = DF$, $BE = 10$ cm, 则 BO 的长为 ()

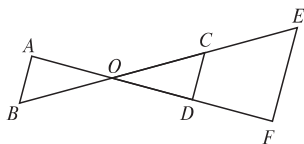


图 1-1-14

- A. $\frac{10}{3}$ cm B. 5 cm C. $\frac{5}{2}$ cm D. 3 cm

- 如图 1-1-15, 已知 $AD \parallel EF \parallel BC$, E 是 AB 的中点, 则 $DG =$ _____, $CH =$ _____, $AE =$ _____, $CF =$ _____.

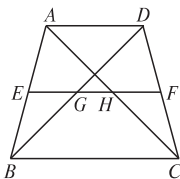


图 1-1-15

- 如图 1-1-16, 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 AB 的中点, $EF \parallel BD$, $EG \parallel AC$ 交 BD 于 G , $CD = \frac{1}{2}AD$, 若 $EG = 5$ cm, 则 $AC =$ _____; 若 $BD = 20$ cm, 则 $EF =$ _____.

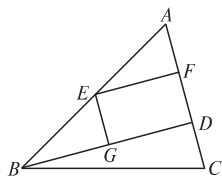


图 1-1-16

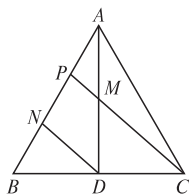


图 1-1-17

- 如图 1-1-17, $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于 D , M 是 AD 的中点, CM 交 AB 于 P , $DN \parallel CP$. 若 $AB = 6$ cm, 则 $AP =$ _____; 若 $PM = 1$ cm, 则 $PC =$ _____.

- 如图 1-1-18, 已知 $AC \perp AB$ 于 A , $DB \perp AB$ 于 B , $OC = OD$, 连结 OA 、 OB . 求证: $OA = OB$.

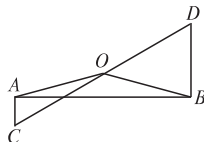


图 1-1-18

- 如图 1-1-19, 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $CE = CF$, $EM \perp AF$, $CN \perp AF$. 求证: $MN = NB$.

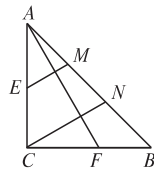


图 1-1-19

- 已知线段 AB , 求作 AB 的五等分点.



图 1-1-20

- 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $DC \perp BC$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = BC$, E 为 AB 的中点. 求证: $\triangle ECD$ 为等边三角形.

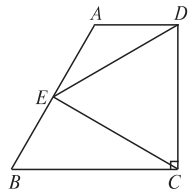


图 1-1-21



走近高考

- 如图 1-1-22, 已知以梯形 $ABCD$ 的对角线 AC 及腰 AD 为邻边作 $\square ACED$, DC 的延长线交 BE 于 F . 求证: $EF = BF$.

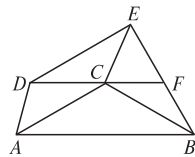


图 1-1-22

- 11 已知直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 任作两直线 m, n , 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C 和 D, E, F , 如图 1-1-23 所示.

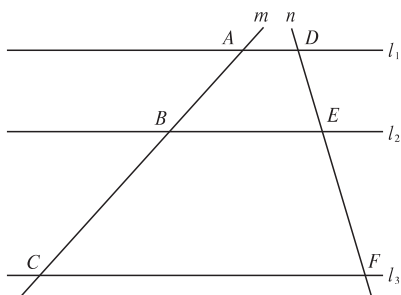


图 1-1-23

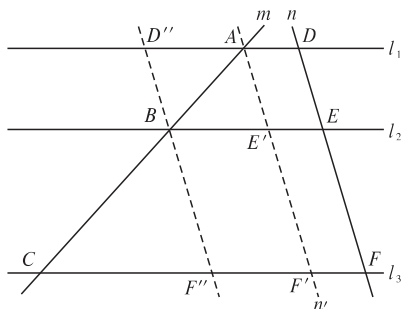


图 1-1-24

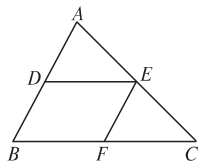


图 1-1-25

- (1) 分别量出线段 AB, AC, DE, DF 的长, 观察结论, 你有什么发现?
- (2) 把直线 n 沿 DA 方向平移到 A 点, 得到直线 n' , 分别与直线 l_2, l_3 交于 E', F' , 如图 1-1-24, 观察 $\triangle ABE'$ 与 $\triangle ACF'$, 你有什么发现? 说出你的猜测, 并验证.
- (3) 如图 1-1-24, 若继续把直线 n 平移使其经过 B 点, 分别与直线 l_1, l_3 交于 D'', F'' , 结果如何?
- (4) 利用你的发现, 判断图 1-1-25 中的相似三角形有几对?

二 平行线分线段成比例定理



新知预习

1. 三条平行线截两条直线, 所得的 _____ 线段成 _____.
2. 平行于三角形一边的直线截其他两边 (或两边的延长线), 所得的 _____.

知识回顾

1. 平行线等分线段定理.
定理: 如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等, 那么在其他直线上截得的线段也相等.
2. 比例的性质.
3. 转化的数学思想.



重难突破

一、平行线分线段成比例定理

1. 定理:三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例.

2. 符号语言表示:如图 1-2-1 所示,

$$a \parallel b \parallel c, \text{ 则 } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

3. 定理的证明:若 $\frac{AB}{BC}$ 是有理数,则

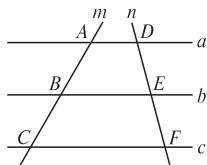


图 1-2-1

将 AB, BC 分成相等的线段,把问题转化为平行线等分线段,达到证明的目的,再推广到整个实数范围,其完整的推广过程还需到高等数学中实现.

4. 定理的条件:与平行线等分线段定理相同,它需要 a, b, c 互相平行,构成一组平行线, m 与 n 可以平行,也可以相交,但它们必须与已知的平行线 a, b, c 相交,即被平行线 a, b, c 所截. 平行线的条数还可以更多.

5. 定理比例的变式:对于 3 条平行线截两条直线的图形,要注意以下变化(如图 1-2-1):如果已知是 $a \parallel b \parallel c$,那么根据定理就可以得到所有的对应线段都成比例,如 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$ 等,可以归纳为 $\frac{\text{上}}{\text{下}} = \frac{\text{上}}{\text{下}}, \frac{\text{上}}{\text{全}} = \frac{\text{上}}{\text{全}}, \frac{\text{左}}{\text{右}} = \frac{\text{左}}{\text{右}}$ 等,便于记忆.

二、平行线分线段成比例定理的推论

1. 推论:平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线),所得的对应线段成比例.

2. 符号语言表示:如图 1-2-2 所示, $a \parallel b \parallel c$, 则 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

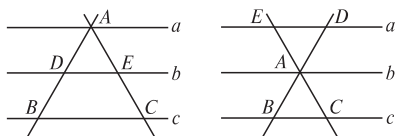


图 1-2-2

3. 推论的证明:直接利用平行线分线段成比例定理,应当注意的是一定要将线段对应好,实际应用时,通常图形中不会出现三条平行线,此时要注意正确识别图形,如图 1-2-3.

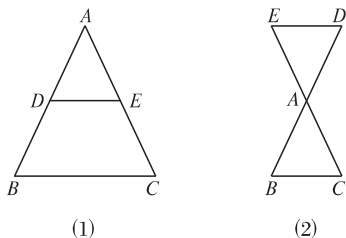


图 1-2-3

活学巧用

【例 1】如图 1-2-6, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 直线 m, n 分别交直线 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C 和 D, E, F , m, n 交于 O 点, $AB=2, AC=5, EF=3$, 求 DE .

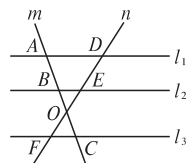


图 1-2-6

思路解析:要求 DE 的长,可以结合条件,直接利用“平行线分线段成比例”定理.

解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3, AB=2, AC=5, EF=3,$
 $\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{2}{5} = \frac{DE}{DE+3}, \therefore DE=2.$

【例 2】如图 1-2-7 所示, $DE \parallel BC, EF \parallel DC$, 求证: $AD^2 = AF \cdot AB$.

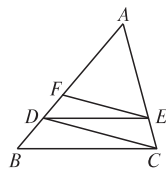


图 1-2-7

思路解析:要证 $AD^2 = AF \cdot AB$, 只要证 $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB}$, 由于 AF, AD, AB 在同一直线上, 因此上式不能直接用定理证, 于是想到用过渡比. 从基本图形中立即可找到过渡比为 $\frac{AE}{AC}$.

证明: $\because DE \parallel BC, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (平行于三角形一边的直线截其他两边所得的对应线段成比例).

$$\because EF \parallel DC, \therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}, \therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB},$$

$$\text{即 } AD^2 = AF \cdot AB.$$

【例 3】如图 1-2-8 所示, 已知直线 FD 和 $\triangle ABC$ 的 BC 边交于 D , 与 AC 边交于 E , 与 BA 的延长线交于 F , 且 $BD=DC$, 求证: $AE \cdot FB = EC \cdot FA$.

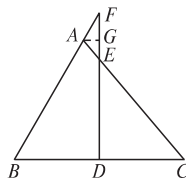


图 1-2-8

三、创根问底

问题 1 平行线分线段成比例定理与平行线等分线段定理有何区别与联系? 怎样正确使用平行线分线段成比例定理?

探究: 我们学习的平行线等分线段定理: 如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等, 那么在其他直线上截得的线段也相等. (如图 1-2-4, 若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB=BC$, 则 $DE=EF$)

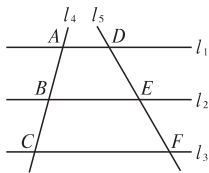


图 1-2-4

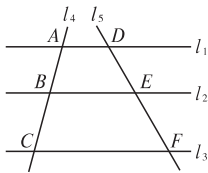


图 1-2-5

平行线分线段成比例定理: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例. 如图 1-2-5, 若 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 则 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

比较这两个定理可知: 当截得的对应线段成比例, 比值为 1 时, 则有截得的线段相等, 即当 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$ 时, 则有 $AB=BC$, $DE=EF$, 因此平行线分线段成比例定理是平行线等分线段定理的扩充, 而平行线等分线段定理是平行线分线段成比例定理的特例. 平行线等分线段定理是证明线段相等的依据, 而平行线分线段成比例定理是证明线段成比例的途径.

在使用平行线分线段成比例定理时, 要特别注意“对应”的问题, 如图 1-2-5 中的线段 AB 、 BC 、 AC 的对应线段分别是 DE 、 EF 、 DF , 由平行线分线段成比例定理有 $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$. 根据比例的性质, 还可以得到 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

为了掌握对应关系, 可根据对应线段的相对位置特征, 把 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ 说成是“上比全等于上比全”, 把 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ 说成是“左比右等于左比右”, 使用这种形象化语言, 不仅能够按要求或需要准确地写出比例式, 而且也容易检查比例式是否正确.

问题 2 证明线段相等的问题较常见, 而证题的方法随着所学知识的不断积累也逐渐增多. 那么证明线段相等通常有哪些方法? 我们现在学习的平行线分线段成比例定理及推论能发挥什么作用?

探究: 根据题设的不同, 证明线段相等可以利用全等三角形的对应线段相等; 等腰三角形、等腰梯形的两腰相等; 平行四边形的对边相等, 对角线互相平分; 正方形、矩形、等腰梯形的对角线相等; 关于直线成轴对称或关于点成中心对称的线段相等, 以及线段的垂直平分线的性质定理、角平分线的性质定理等等. 现在学了线段成比例的有关定理, 也常用来证两线段相等, 其方法是利用条件中有 (或添作) 平行线或相似三角形, 列出几组比例式进行比较而得出.

思路解析: 本题只要证 $\frac{AE}{EC} = \frac{FA}{FB}$ 即可. 由于 $\frac{AE}{EC}$ 与 $\frac{FA}{FB}$ 没有直接联系, 因此必须寻找过渡比将它们联系起来, 因此考虑添加平行线进行构造.

证明: 过 A 作 $AG \parallel BC$, 交 DF 于 G 点.

$$\because AG \parallel BD, \therefore \frac{FA}{FB} = \frac{AG}{BD}.$$

$$\text{又} \because BD=DC, \therefore \frac{FA}{FB} = \frac{AG}{DC}.$$

$$\because AG \parallel BD, \therefore \frac{AG}{DC} = \frac{AE}{EC}.$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{FA}{FB}, \text{即 } AE \cdot FB = EC \cdot FA.$$

【例 4】 如图 1-2-9, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线, 求证:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

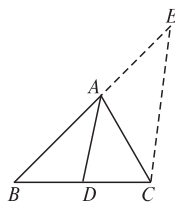


图 1-2-9

思路解析: AB 、 AC 不在同一直线上, 而 BD 和 CD 在同一直线上. 在同一直线上的两条线段的比往往和平行线有关, 所以我们不妨考虑作一条平行线.

证明: 过点 C 作 $CE \parallel AD$, 交 BA 的延长线于点 E,

$$\because AD \parallel EC, \therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}.$$

又 $\because \angle E = \angle BAD$, $\angle CAD = \angle ACE$, $\angle BAD = \angle CAD$,

$$\therefore \angle E = \angle ACE. \therefore AC = AE.$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

【例 5】 如图 1-2-10, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, CD 、 BE 交于点 O, 连结 AO 并延长交 BC 于点 F, AO 交 DE 于点 G. 求证: $\frac{AG}{AF} = \frac{GO}{OF}$.

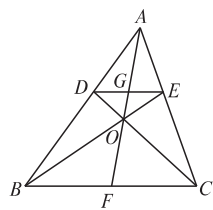


图 1-2-10

思路解析: 由于 $DE \parallel BC$, 所以 $\frac{AG}{AF} =$

$$\frac{AE}{AC}, \text{进一步得 } \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \text{而 } \frac{DE}{BC} =$$

$\frac{OE}{OB}$. 在 $\triangle OGE$ 和 $\triangle OFB$ 中, 由 $GE \parallel FB$ 得 $\frac{OE}{OB} = \frac{GO}{OF}$, 从而得出结论.

证明: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AC}, \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \frac{DE}{BC} = \frac{OE}{OB}, \frac{OE}{OB} = \frac{GO}{OF}.$$

$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{GO}{OF}.$$



夯基达标

- 1 如图 1-2-11, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 两直线 AC 和 DF 与 l_1, l_2, l_3 分别交于点 A, B, C 和 D, E, F , 下列各式中不一定成立的是 ()

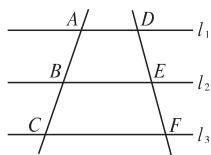


图 1-2-11

- A. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$
 B. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$
 C. $\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CA}$
 D. $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{CF}$

- 2 如图 1-2-12 所示, $\angle A = \angle E$, $\frac{AB}{BE} = \frac{1}{2}$, $BD = 8$, 求 BC 的长.

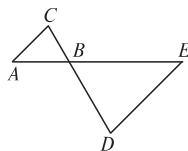


图 1-2-12

- 3 某同学的身高是 1.60 米, 由路灯下向前步行 4 米, 发现自己的影子长 2 米, 求这个路灯的高.

- 4 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, 下列条件中, 不能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()

- A. $AD = 5, AB = 8, AE = 10, AC = 16$
 B. $BD = 1, AD = 3, CE = 2, AE = 6$
 C. $AB = 7, BD = 4, AE = 4, EC = 3$
 D. $AB = AC = 9, AD = AE = 8$

- 5 如图 1-2-13 所示, $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 若 $CH = 4.5$ cm, $AG = 3$ cm, $BG = 5$ cm, $EF = 12.9$ cm, 则 $DH =$ _____, $EK =$ _____.

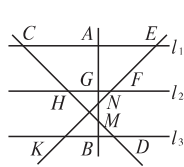


图 1-2-13

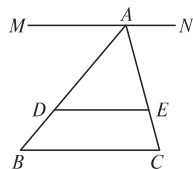


图 1-2-14

- 6 如图 1-2-14, 在 $\triangle ABC$ 中, $MN \parallel DE \parallel BC$, 若 $AE : EC = 7 : 3$, 则 $DB : AB$ 的值为 _____.

- 7 如图 1-2-15, 已知 $AD \parallel BE \parallel$

$CF, EG \parallel FH$. 求证: $\frac{AB}{AC} = \frac{EG}{FH}$.

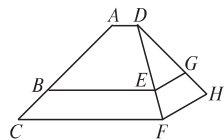


图 1-2-15

- 8 如图 1-2-16, 在四边形 $ABCD$ 中, 延长 AD, BC 交于 F , 延长 AB, DC 交于 E , 连结 EF , 且 $BD \parallel EF$. 求证: AC 的延长线必平分 EF .

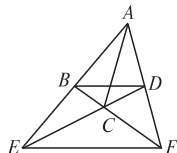


图 1-2-16

- 9 如图 1-2-17, 从 $Rt\triangle ABC$ 的两直角边 AB, AC 向外作正方形 $ABFG$ 及 $ACDE$, CF, BD 分别交 AB, AC 于 P, Q . 求证: $AP = AQ$.

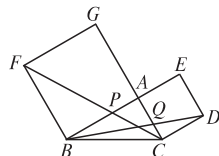


图 1-2-17

走近高考

- 10 如图 1-2-18, 已知 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, 垂足分别为 B, D , AD 和 BC 相交于点 E , $EF \perp BD$, 垂足为 F , 我们可以证明 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 成立 (不要求证明), 若将图 1-2-18(1) 中的垂直改为斜交, 如图 1-2-18(2), $AB \parallel CD$, AD, BC 相交于点 E , 过 E 作 $EF \parallel AB$, 交 BD 于点 F , 则
- (1) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 还成立吗? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请说明理由.
- (2) 请找出 $S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle BED}$ 和 $S_{\triangle BDC}$ 间的关系式, 并给出证明.

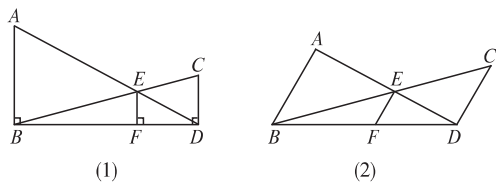


图 1-2-18

- 11 如图 1-2-19, $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, M 是 AD 上一点, BM, CM 的延长线分别交 AC, AB 于 F, E . 求证: $EF \parallel BC$.

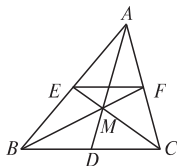


图 1-2-19

三 相似三角形的判定及性质

温故知新

新知预习

1. 对应角 _____, 对应边 _____ 的两个三角形叫做相似三角形, 相似三角形对应边的 _____ 叫做相似比 (或 _____).
2. 平行于三角形一边的直线和其他两边 (或两边的延长线) 相交, 所构成的三角形与原三角形 _____.
3. 两角 _____, 两三角形相似.
4. 两边 _____ 且夹角 _____, 两三角形相似.
5. 三边 _____, 两三角形相似.
6. 如果一条直线截三角形的两边 (或两边的延长线) 所得的对应线段成比例, 那么这条直线 _____ 三角形的第三边.

知识回顾

1. 平行线分线段成比例定理: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例.
2. 全等三角形的判定和性质.
 - (1) 全等三角形的判定
 - ① 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.
 - ② 有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等.
 - ③ 有三边对应相等的两个三角形全等.
 - (2) 全等三角形的性质

如果两个三角形全等, 那么它们的对应边相等, 对应角相等, 对应的角平分线、中线、高相等, 面积也相等.
3. 勾股定理: 直角三角形两直角边 a, b 的平方和, 等于斜边 c 的平方, 即 $a^2 + b^2 = c^2$.

7. 有一个锐角_____的两个直角三角形相似.
8. 两直角边_____的两直角三角形相似.
9. 如果一个直角三角形的_____和一条_____与另一个直角三角形的_____和一条_____对应成比例,那么这两个直角三角形相似.
10. 相似三角形对应_____的比、对应_____的比、对应_____的比都等于相似比.
11. 相似三角形周长的比等于_____,面积的比等于_____.
12. 相似三角形外接圆的直径比、周长比都等于_____,外接圆的面积比等于_____.

4. 类比的数学思想.



一、三角形相似的预备定理

在初中,我们已经学过相似三角形的知识,其定义是如果两个三角形的对应角相等,对应边成比例,那么称这两个三角形相似.对于三角形相似,其中对应边的比值叫做相似比(或相似系数).利用上一节所学的平行线分线段成比例定理,可得预备定理:平行于三角形的一边,并且和其他两边相交的直线,所截得的三角形和原三角形相似.

二、相似三角形的判定方法

判定两个三角形相似的方法有:(1)定义法,即对应边成比例,对应角相等的三角形是相似三角形.当然有了判定定理后,就不用定义判定了,这是因为定义中的条件太多,实际上并不需要.

(2)平行法,即平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.这就是预备定理.最常用的是判定定理,即①判定定理1:两角对应相等,两三角形相似;②判定定理2:两边对应成比例,夹角相等,两三角形相似;③判定定理3:三边对应成比例,两三角形相似.

在这些判定方法中,应用最多的是判定定理1,即两角对应相等,两三角形相似.因为它的条件最容易寻求,实际证明当中,要特别注意两个三角形的公共角.判定定理2则常见于连续两次证明相似时,在第二次使用此定理的情况较多.

对于直角三角形相似的判定,除以上方法外,还有其特殊的方法:

- (1)如果两个直角三角形的两条直角边对应成比例,那么它们相似;
- (2)如果一个直角三角形的一条直角边和斜边与另外一

活学巧用

- 【例1】如图1-3-1, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $DE \perp AC$ 于 E , 那么和 $\triangle ABC$ 相似但不全等的三角形共有..... ()
- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

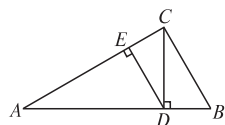


图 1-3-1

思路解析: 图中所有三角形都是直角三角形,根据判定两个直角三角形相似的方法,与 $\triangle ABC$ 相似的三角形共有 5 个,它们分别是: $\triangle ADE$ 、 $\triangle DCE$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ABC$,但是 $\triangle ABC$ 不合题意.

答案: D

- 【例2】如图1-3-2,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,试利用三角形相似的关系说明 $AD^2 = DC \cdot AC$.

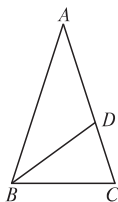


图 1-3-2

思路解析: 有一个角是 36° 的等腰三角形,它的底角是 72° ,而 BD 是底角的平分线,

$\therefore \angle CBD = 36^\circ$,则可推出 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$,进而由相似三角形对应边成比例推出线段之间的比例关系.

证明: $\because \angle A = 36^\circ$, $AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ.$$

$$\text{又} \because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 36^\circ.$$

$$\therefore AD = BD = BC, \text{ 且 } \triangle ABC \sim \triangle BCD.$$

$$\therefore BC : AB = CD : BC.$$

$$\therefore BC^2 = AB \cdot CD.$$

$$\therefore AD^2 = AC \cdot CD.$$

- 【例3】如图1-3-3,已知 $\angle ACB = \angle ADE$, $\angle ABC = \angle AED$. 求证: $\angle ABE = \angle ACD$.

个直角三角形的直角边和斜边对应成比例,那么这两个直角三角形相似;

(3)直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.

在证明直角三角形相似时,要特别注意直角这一隐含条件的利用.

三、相似三角形的性质

如果两个三角形相似,那么它们的形状相同,只在大小上有所区别,这两个三角形的对应元素之间有很重要的关系,分别是:

- (1)相似三角形对应角相等,对应边成比例;
- (2)相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比;
- (3)相似三角形的周长比等于相似比;
- (4)相似三角形的面积比等于相似比的平方;
- (5)相似三角形外接圆的直径比、周长比等于相似比,外接圆的面积比等于相似比的平方,利用这些关系,可以进行各种各样的求值和证明.

四、刨根问底

问题 在初中,我们已经学过全等三角形,两个全等三角形的大小、形状是完全一样的,相似三角形是形状相同但大小不一样的三角形,显然,当两个相似三角形的相似比为1的时候,相似三角形就成了全等三角形,那么,这两者之间有哪些联系和差别呢?

探究:鉴于相似三角形和全等三角形的类似点,在学习相似三角形的性质时,可以类比全等三角形的性质来研究,下面采用表格的形式对两者作比较:

	全等三角形	相似三角形
1	对应边相等	对应边成比例
2	对应角相等	对应角相等
3	对应中线相等	对应中线的比等于相似比
4	对应角平分线相等	对应角平分线的比等于相似比
5	对应高相等	对应高的比等于相似比
6	周长相等	周长比等于相似比
7	面积相等	面积比等于相似比的平方

你可以从两者的对比中发现,当两个相似三角形的相似比为1时,二者完全相同,所以我们研究相似三角形的性质的时候,切记从相似比入手即可,涉及线段的比均等于相似比,只有面积的比是相似比的平方.

思路解析: $\angle ABE$ 和 $\angle ACD$ 分别位于 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,显然不可以利用全等来证明这两个角相等,但这两个角所在的两个三角形能相似吗?从已知条件中给的四个角分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中,由它们相等不难证明 $\triangle ABC \sim \triangle AED$,这一对三角形的相似,沟通了我们想要证明的两个三角形的关系,沟通了两个角的关系.这里使用了“两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似”的判定方法.

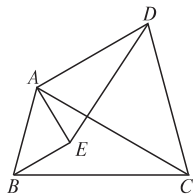


图 1-3-3

证明: $\because \angle ABC = \angle AED, \angle ACB = \angle ADE,$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED.$

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \angle BAC = \angle EAD.$

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}, \angle BAC - \angle EAC = \angle EAD - \angle EAC,$

即 $\angle BAE = \angle CAD.$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD$ (两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似).

$\therefore \angle ABE = \angle ACD.$

【例4】如图 1-3-4,已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, AD$ 是 BC 边上的中线, $CF \parallel BA, BF$ 交 AD 于 P 点,交 AC 于 E 点.求证: $BP^2 = PE \cdot PF.$

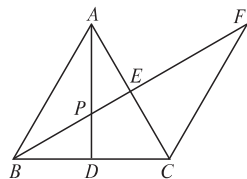


图 1-3-4

思路解析:因为 BP, PE, PF 三条线段共线,找不到两个三角形,所以必须考虑等线段代换等其他方法,因为 $AB = AC, D$ 是 BC 中点,由等腰三角形的性质知 AD 是 BC 的垂直平分线,如果我们连结 PC ,由线段垂直平分线的性质知 $PB = PC$,只需证明 $\triangle PEC \sim \triangle PCF$,问题就能解决了.

证明:连结 PC ,在 $\triangle ABC$ 中,

$\because AB = AC, D$ 为 BC 中点,

$\therefore AD$ 垂直平分 $BC.$

$\therefore PB = PC.$

$\therefore \angle 1 = \angle 2.$

$\because AB = AC,$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$

$\therefore \angle ABC - \angle 1 = \angle ACB - \angle 2.$

$\therefore \angle 3 = \angle 4.$

$\because CF \parallel AB,$

$\therefore \angle 3 = \angle F.$

$\therefore \angle 4 = \angle F.$

又 $\because \angle EPC = \angle CPF,$

$\therefore \triangle PCE \sim \triangle PFC.$

$\therefore \frac{PC}{PE} = \frac{PF}{PC}.$

$\therefore PC^2 = PE \cdot PF.$

$\because PC = PB,$

$\therefore PB^2 = PE \cdot PF.$

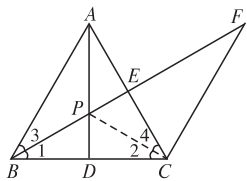


图 1-3-5

主动成长

夯基达标

- 1 如图 1-3-6, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 是 BC 中点, $AE \perp AD$ 交 CB 延长线于点 E , 则结论正确的是 ()

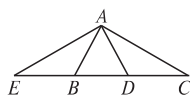


图 1-3-6

- A. $\triangle AED \sim \triangle ACB$
 B. $\triangle AEB \sim \triangle ACD$
 C. $\triangle BAE \sim \triangle ACE$
 D. $\triangle AEC \sim \triangle DAC$

- 2 如图 1-3-7 所示, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上一点, $DE \parallel BC$ 且交 AC 于 E , $EF \parallel AB$ 且交 BC 于 F , 且 $S_{\triangle ADE} = 1$, $S_{\triangle EFC} = 4$, 则四边形 $BFED$ 的面积等于 ()

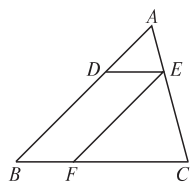


图 1-3-7

- A. 2
 B. 4
 C. 5
 D. 9

- 3 如图 1-3-8, D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的一点, 过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E . 已知 $AD : DB = 2 : 3$, 则 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形} BCED}$ 为 ()

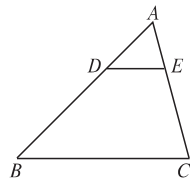


图 1-3-8

- A. 2 : 3
 B. 4 : 9
 C. 4 : 5
 D. 4 : 21

- 4 如图 1-3-9 所示, 铁道口的栏杆短臂长 1 m, 长臂长 16 m, 当短臂端点下降 0.5 m 时, 长臂端点升高 ()



图 1-3-9

- A. 11.25 m
 B. 6.6 m
 C. 8 m
 D. 10.5 m

- 5 有一块三角形铁片 ABC , 已知最长边 $BC = 12$ cm, 高 $AD = 8$ cm, 要把它加工成一个矩形铁片, 使矩形的一边在 BC 上, 其余两个顶点分别在 AB 、 AC 上, 且矩形的长是宽的 2 倍, 则加工成的铁片的面积为 ()

- A. 18 cm^2 或 $\frac{152}{49} \text{ cm}^2$

- B. 20 cm^2 或 18 cm^2

- C. 16 cm^2

- D. 15 cm^2

- 6 如图 1-3-10, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAC = \angle ADC$, $AC = 8$, $BC = 16$, 那么 $CD =$ _____.

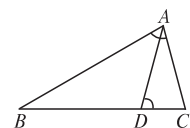


图 1-3-10

- 7 如图 1-3-11, $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 为直角, $\triangle DEF$ 中 $\angle F$ 为直角, $DE \perp AC$, 交 AC 于 G , 交 AB 于 H , $DF \perp AB$, 交 AB 于 I , 求证: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

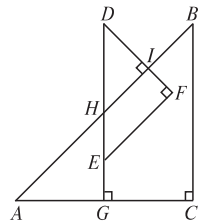


图 1-3-11

- 8 如图 1-3-12, 小明欲测量一座古塔的高度, 他站在该塔的影子前后移动, 直到他本身影子的顶端正好与塔的影子顶端重叠, 此时他距离该塔 18 m, 已知小明的身高是 1.6 m, 他的影长是 2 m.

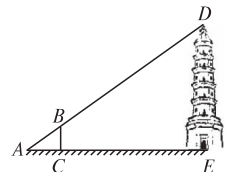


图 1-3-12

- (1) 图中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是否相似? 为什么?
 (2) 求古塔的高度.

- 9 一块直角三角形木板的一条直角边 AB 长为 1.5 米, 面积为 1.5 平方米, 要把它加工成一个面积最大的正方形桌面, 甲、乙两位同学的加工方法分别如图 1-3-13(1)(2) 所示, 那么哪位同学的加工方法符合要求? 说说你的理由. (加工损耗忽略不计, 计算结果中的分数可保留)

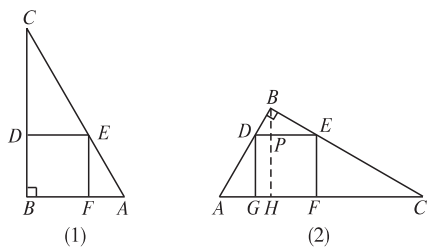


图 1-3-13



- 10 如图 1-3-14, 已知 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel FG \parallel BC$, $AD : DF : FB = 2 : 3 : 4$, 求 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形}DEGF} : S_{\text{四边形}BCGF}$.

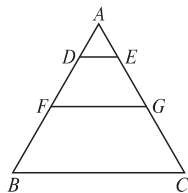


图 1-3-14

- 11 如图 1-3-15, 已知在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的中点, 且 $AD = AC$, $DE \perp BC$, DE 与 AB 相交于点 E , EC 与 AD 相交于点 F .
- (1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle FCD$;
- (2) 若 $S_{\triangle FCD} = 5$, $BC = 10$, 求 DE 的长.

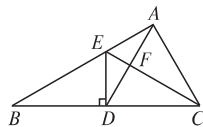


图 1-3-15

- 12 如图 1-3-16, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D 是斜边 AB 的中点, $DE \perp AB$ 于 D , 交 AC 于 F , 交 BC 延长线于 E , $BG \perp BA$, 交 DC 延长线于 H , 交 AC 延长线于 G .
- 求证: (1) $GH \cdot CE = DF \cdot BC$;
- (2) $DC^2 = DF \cdot DE$;
- (3) $CH \cdot CD = GH \cdot DE$;
- (4) $GB : BA = CH : BH$;
- (5) $CH \cdot EF = BA \cdot DF$.

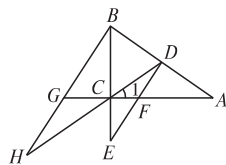


图 1-3-16

四 直角三角形的射影定理



温故知新

新知预习

- 从一点向一直线所引垂线的 _____, 叫做这个点在这条直线上的正射影.
- 如果一个点在某一直线上, 那么这个点在这条直线上的正射影是 _____.

知识回顾

- 相似三角形的判定.
 - 判定定理 1: 两角对应相等, 两三角形相似.
 - 判定定理 2: 两边对应成比例且夹角相等, 两三角形相似.
 - 判定定理 3: 三边对应成比例, 两三角形相似.