

知道你学习辛苦,志鸿人愿伴你快乐走路;

知道你不甘人后,志鸿人愿陪你不断追求;

知道你满怀期望,志鸿人愿随你共同飞翔。

《高中同步测控全优设计》饱含着志鸿人的人文关怀,承载着志鸿人的爱心与智慧,致力与打通“思考思路思想”与“情感态度价值观”两大通道,帮助你在学习的过程中找到成长的感觉、成功的喜悦、成才的幸福!

你手中的这本《高中同步测控全优设计》以理念统帅板块,以板块整合栏目,以栏目组织内容。从板块到栏目,从形式到内容,都紧紧扣准新教育、新人文、新课程的脉搏,做到“继承、创新、适应、引导”四位一体,为此,本书设置了三大板块:【温故知新】【互动课堂】与【主动成长】。

【温故知新】在链接并温习已学知识的基础上,加强对新知识的预习与掌握,使前后内容有机交融、一脉相承。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“新知预习”“知识回顾”。“新知预习”去粗取精,呈现出新知识的精华部分,并引导你自主掌握知识重点。“知识回顾”承前启后,为前后知识的学习搭起一座桥梁,并使知识在课内课外都得到再现与应用。

【互动课堂】倡导生师互动、生本互动,旨在让你实现从被动到主动的根本转变。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“疏导与引导”“活学与巧用”。“疏导与引导”既有对主干知识和学习方法的疏导与引导,又有针对主干知识的精选例题、精彩解析及精到升华,“活学与巧用”凸现的是实践运用的风范与力量、探究创新的思路与乐趣、提高升华的深度与高度。

【主动成长】留给你一片自主锤炼、主动发展的天空,让你在第一时间成为学习的主人、创新的主人。在这一板块中,我们设置了两个栏目:“夯基与达标”“走近新高考”。“夯基与达标”展示的是知识点覆盖面广泛的基础题,为你搭建一个夯实基础、稳扎稳打、步步为营的平台;“走近新高考”展示的是2005年、2006年的高考真题和模拟题,让你提前触摸高考、感受高考,做到有备无患。

本书图标形象生动、体例明确清晰、版式活泼大方、内容科学严谨,图文并茂的全优设计既做到了“活”而不乱,又做到了“实”而不死,是一本容易让你产生阅读冲动、爱不释手的教辅读物。

志鸿人已把教育作为自己的生命,正在创造着一个又一个的奇迹。志鸿人愿做一只合格的领头雁,翱翔天际,飞向远方,实现理想!

《新课标同步测控全优设计》编写组



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌

CONTENTS

目录

第一章 导数及其应用	1	第二章 推理与证明	52
1.1 导数的概念	1	2.1 合情推理与演绎推理	52
1.1.1 平均变化率	1	2.1.1 合情推理(第一课时)	52
1.1.2 瞬时变化率——导数	3	2.1.2 合情推理(第二课时)	56
1.2 导数的运算	7	2.1.2 演绎推理	60
1.2.1 常见函数的导数	7	2.2 直接证明与间接证明	64
1.2.2 函数的和、差、积、商的导数	10	2.2.1 直接证明	64
1.2.3 复合函数的导数	15	2.2.2 反证法	69
1.3 导数在研究函数中的作用	18	2.3 数学归纳法	73
1.3.1 单调性	18	本章测评	78
1.3.2 极值点	22	第三章 数系的扩充与复数的引入	80
1.3.3 最大值与最小值	26	3.1 数系的扩充	80
1.4 导数在实际生活中的应用	30	3.2 复数的四则运算	83
导数及其应用测评	35	3.3 复数的几何意义	86
1.5 定积分的概念	37	本章测评	90
1.5.1 曲边梯形的面积	37	综合测试	92
1.5.2 定积分	41	解析与答案	95
1.5.3 微积分基本定理	44		
定积分测评	47		
本章测评	50		



第一章 导数及其应用

1.1 导数的概念

1.1.1 平均变化率



新知预习

1. 一般地,函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率为_____.
2. 平均变化率是曲线陡峭程度的“_____”.

知识回顾

表示直线倾斜程度的斜率是这样来画的. 如果直线 l 上两点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 则斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 \neq x_2)$.



疏导引导

平均变化率的理解

理解平均变化率是学习导数的基础,会计算平均变化率是用定义求导的前提,导数的几何意义也是利用平均变化率的几何意义引出的. 因此深入地理解平均变化率并熟练地掌握其计算方法很重要.

疑难疏引 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ (或 $[x_0+\Delta x, x_0]$) 的平均变化率是商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 其中 Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量,可正可负,但不能为 0, Δy 是函数相应的改变量,即 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ (Δy 为正、负、零均可), 所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

函数平均变化率的求法可分两步: ① 求 Δy , 即求函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$; ② 求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 即求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

理解平均变化率要注意以下两点:

- (1) 平均变化率是变化的, 一般情况下, 不论 $x_0, \Delta x$

活学巧用

- ① 求函数 $y=x^2+ax+b$ (a, b 为常数) 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ (或 $[x_0+\Delta x, x_0]$) 的平均变化率.

解析: $\Delta y = [(x_0+\Delta x)^2 + a(x_0+\Delta x) + b] - (x_0^2 + ax_0 + b)$
 $= 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + a \cdot \Delta x,$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x_0 + a)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = (2x_0 + a) + \Delta x.$$

- ② 已知某质点按规律 $s=2t^2+2t$ (m) 作直线运动, 求:

- (1) 该质点在运动的前 3 秒内的平均速度;
- (2) 质点在 2 秒~3 秒内的平均速度.

解析: ① $t=3$ 时, $s=24$

$\therefore$ 该质点在运动前 3 s 内的平均速度 $\vec{v}_1 = 8$ m/s

② 该质点在 2 秒~3 秒内的平均速度

$$\vec{v}_2 = \frac{S_{(3)} - S_{(2)}}{3 - 2} = 12 \text{ m/s}$$

- ③ 过曲线 $y=f(x)=x^3$ 上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x, 1+\Delta y)$ 作割线, 求出当 $\Delta x=0.1$ 时, 割线斜率.

解析: $\because k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} =$

中的哪一个变化,都会引起函数平均变化率的变化.

(2) 平均变化率的几何意义就是割线的斜率. 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
 $= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$ 就是过 $(x_0, f(x_0)), (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ 割线的斜率.

$$\frac{(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = (\Delta x)^2 + 3(\Delta x) + 3$$

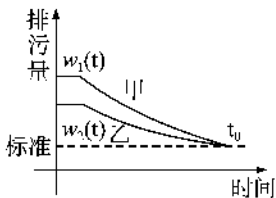
当 $\Delta x = 0.1$ 时, 割线 PQ 的斜率为 k

则 $k = 0.1^2 + 3 \times 0.1 + 3 = 3.31$.



夯基达标

- 在函数变化率的定义中, 自变量的增量 Δx 满足 ... ()
 A. $\Delta x < 0$ B. $\Delta x > 0$
 C. $\Delta x = 0$ D. $\Delta x \neq 0$
- 已知函数 $y = f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[2, 2.1]$ 上的变化率为 ()
 A. 0.40 B. 4.1
 C. 4.3 D. 0.44
- 在 $x = 1$ 附近, 取 $\Delta x = 0.3$, 在四个函数 ① $y = x$ ② $y = x^2$
 ③ $y = x^3$ ④ $y = \frac{1}{x}$ 中, 平均变化率最大的是 ... ()
 A. ④ B. ③
 C. ② D. ①
- $y = x^2$, 当 $x_1 = 3, x_2 = 3.1$ 时, $f(x)$ 的变化率为 ____.
- 已知函数 $y = \frac{2}{x}$, 当 x 由 2 变到 1.5 时, 函数的增量 $\Delta y =$ ____.
- 已知曲线 $y = x^2 - 1$ 上两点 $A(2, 3), B(2 + \Delta x, 3 + \Delta y)$, 当 $\Delta x = 1$ 时, 割线 AB 的斜率是 ____; 当 $\Delta x = 0.1$ 时, 割线 AB 的斜率是 ____.
- 国家环保局在规定的排污达标的日期前, 对甲、乙两企业进行检查, 其连续检查结果如图所示. 试问哪个企业治污效果好?



- 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 求:
 (1) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时, 自变量 x 的增量 Δx ;

(2) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时, 函数的增量 Δy ;

(3) 当自变量由 1 变到 1.1 时, 函数的平均变化率.

走近高考

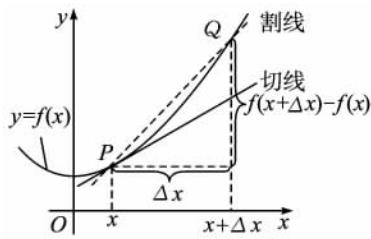
- (经典回放) 在曲线 $y = 2x^2 - 1$ 的图象上取一点 $(1, 1)$ 及邻近一点 $(1 + \Delta x, 1 + \Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于 ()
 A. $4\Delta x + 2\Delta x^2$ B. $4 + 2\Delta x$
 C. $4\Delta x + \Delta x^2$ D. $4 + \Delta x$
- (经典回放) 函数 $y = 2x^3 - x$ 在区间 $[1, 3]$ 上的平均变化率为 ____.

1.1.2 瞬时变化率——导数



新知预习

1. 如图所示:设曲线 C 上一点 $P(x, f(x))$, 过点 P 的一条割线交曲线 C 于另一点 $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$, 则割线 PQ 的斜率为 $K_{PQ} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. 当点 Q 沿曲线 C 向点 P 运动, 并无限趋近于点 P 时, 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 割线 PQ 逼近点 P 的切线 V . 从而割线的斜率逼近 $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 无限趋近于 $P(x, f(x))$ 处的切线的斜率.



2. 一般地, 运动物体位移的平均变化率 $\frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$, 如果当 Δt 无限趋近于 0 时, $\frac{S(t_0+\Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$ 无限趋近于一个常数, 这个常数称为物体在 $t=t_0$ 时的瞬时速度. 我们可以看到, 瞬时速度就是位移对时间的导数.

3. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, $x_0 \in (a, b)$, 若 Δx 无限趋近于 0 时, 比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常数, 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 并称 $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的导数, 记作 $f'(x_0)$.

4. 导数的意义

(1) 导数的几何意义: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即 $f'(x_0)$.

(2) 导数的物理意义: 函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数 $s'(t_0)$, 就是当物体的运动方程为 $s=s(t)$ 时, 物体运动在时刻 t_0 时的瞬时速度 v , 即 $v=s'(t_0)$.



知识回顾

1. 切线定义的认识

我们都知道与圆有且只有一个交点的直线是圆的切线, 因此我们往往也会想当然地认为任意曲线的切线与该曲线都有且只有一个交点, 而且与曲线有且只有一个交点的直线必是该曲线的切线, 那么这个看法是否正确呢? 让我们看两个例子. ①直线 $x=1$ 与曲线 $y=x^2$ 有且只有一个交点, 但显然它不是切线; ②直线 $y=1$ 与 $y=\sin x$ 有无数个交点, 但它却是切线. 由此可见, 我们对切线应该有一个全新的认识, 认真理解教材中对切线的定义.

2. 平均变化率

函数在某点的变化率定义为函数值的增量与自变量的增量之比, 即 $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, 它的几何意义是过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 及点 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的割线的斜率.

3. 函数变化率的应用

用函数在一点附近的变化率, 可以刻画函数图象的变化趋势. 平均变化率可正可负也可以为零. 一般地平均变化率的绝对值越大, 曲线“越陡”——递增或递减的幅度越大.



疏 导 引 导

本节课重点是导数的定义和导数的几何意义,难点是利用定义求函数在某点处的导数和开区间内的导数.

一、函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(变化率)是 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, 它是函数的平均变化率当自变量的改变量趋向于零时的极限值,如果极限不存在,我们就说函数在点 x_0 处不可导.

疑难疏引 (1)函数应在点 x_0 的附近有定义,否则导数不存在.

(2)在定义导数的极限式中, Δx 趋近于 0 可正、可负,但不为 0,而 Δy 可能为 0.

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是函数 $y=f(x)$ 对自变量 x 在 Δx 范围内的平均变化率,它的几何意义是过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 及点 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ 的割线斜率.

(4) 导数 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率,它反映的函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处变化的快慢程度,它的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 因此,如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

(5)导数是一个局部概念,它只与函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及其附近的函数值有关,与 Δx 无关.

(6)在定义式中,设 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x=x-x_0$,当 Δx 趋近于 0 时, x 趋近于 x_0 ,因此,导数的定义式可写成 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(7)若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

(8)若 $f(x)$ 在 x_0 可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 有切线存在. 反之不然,若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 有切线,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 不一定可导,并且,若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 不可导,曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能有切线,如切线平行与 y 轴时.

一般地, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a+b\Delta x) = a$, 其中 a, b 为常数.

特别地, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a$.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每点处都有

活 学 巧 用

① 如果一个质点从定点 A 开始沿直线运动的位移函数为 $y=f(t)=t^3+3$.

(1)当 $t_0=4$ 且 $\Delta t=0.01$ 时,求 Δy 和 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$;

(2)当 $t_0=4$ 时,求 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 的值;

(3)说明 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 的几何意义.

解析: (1) $\Delta y = f(4+\Delta t) - f(4) = (4+\Delta t)^3 + 3 - 4^3 - 3 = (\Delta t)^3 + 48\Delta t + 12(\Delta t)^2 = (0.01)^3 + 48(0.01) + 12(0.01)^2 = 0.481201$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.481201}{0.01} = 48.1201$.

(2)当 $\Delta t=0.001$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 48.01201$,

当 $\Delta t=0.0001$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 48.001201$.

所以当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = 48$.

(3) Δy 是质点由固定点 A 开始在 Δt 这段时间内的位移,所以 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 是质点 A 在 Δt 这段时间内的平均速度,而 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 是质点 A 在时间 t_0 的瞬时速度.

② 已知 $y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$, 求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

解析: $\because \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x}}$,

$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x-x-\Delta x)}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \Delta x \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})} = \frac{-2}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = -x^{-\frac{3}{2}}$.

$y'|_{x=1} = f'(1) = -(1)^{-\frac{3}{2}} = -1$.

点评: 函数的导数与在点 x_0 处的导数不是同一概念,在点 x_0 处的导数是函数的导数在 $x=x_0$ 处的函数值. 求函数的导数分三个步骤:

(1)求函数增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

导数,此时对于每一个 $x \in (a, b)$, 都对应着一个确定的导数 $f'(x)$, 从而构成了一个新的函数 $f'(x)$. 称这个函数 $f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 在开区间内的导函数, 简称导数, 也可记作 y' , 即

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $y'|_{x=x_0}$ 就是函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 上导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值, 即 $y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$. 所以函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数也记作 $f'(x_0)$.

二、注意导数与导函数的区别与联系

1. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都有导数则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导.

2. 导数与导函数都可称为导数, 这要加以区分: 求一个函数的导数, 就是求导函数; 求一个函数在给定点的导数, 就是求导函数值. 它们之间的关系是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的函数值.

3. 求导函数时, 只需将求导数式中的 x_0 换成 x 即可, 即 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

4. 由导数的定义可知, 求函数 $y=f(x)$ 的导数的一般方法是:

(1) 求函数的改变量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

(2) 求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

(3) 取极限, 得导数 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

三、导数与切线的理解

导数集数与形于一身, 新教材在介绍导数几何意义时, 利用割线的极限位置来定义了曲线的切线. 从代数角度看, 平均变化率是由函数上的一点 $(x_0, f(x_0))$ 到另一点 $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ 函数值增量与自变量增量的比值, 当 Δx 无限趋近于零时, 曲线上某点的平均变化率无限趋近于唯一的一个常数, 这个常数称为在该点的导数; 从几何角度看过曲线上任一定点引曲线的割线, 当动点无限趋近于该定点时, 割线的斜率无限趋近于唯一的一个常数, 割线就变为切线, 因此导数的几何意义即为曲线上过该点的切线的斜率.

用运动变化的观念分析曲线 $C: y=f(x)$ 上某点 (x_0, y_0) 的切线, 从点 (x_0, y_0) 引割线, 当另一交点无限趋近某点 (x_0, y_0) 时, 割线就变为切线, 割线的斜率趋近于唯一的一个常数, 这个常数就是曲线上的某点 (x_0, y_0) 的导数, 其几何意义为切线的斜率, 计算方法为 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 或 $x \rightarrow x_0$ 时, $k = \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$. 特别地, 如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线平行于 y 轴, 这时导数不存在, 根据切线定义, 可得切线方程为 $x=x_0$.

(3) 取极限并求极限值, 得导数 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

③ 如果曲线 $y=x^2+x-3$ 的某一条切线与直线 $y=3x+4$ 平行, 求切点坐标与切线方程.

解析: $\because$ 切线与直线 $y=3x+4$ 平行, $\therefore$ 斜率为 3.

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $y'|_{x=x_0} = 3$.

$$\begin{aligned} \text{又 } y'|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 + (x_0+\Delta x) - 3 - x_0^2 - x_0 + 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 + 1) = 2x_0 + 1, \end{aligned}$$

$$\therefore 2x_0 + 1 = 3, \text{ 从而得 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

$\therefore$ 切点坐标为 $(1, -1)$,

切线方程为 $3x - y - 4 = 0$.

④ 在曲线 $y=x^2+3$ 的图象上取一点 $P(1, 4)$ 及附近一点 $(1+\Delta x, 4+\Delta y)$, 求 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; (2) $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的值; (3) 在点 $P(1, 4)$ 的切线方程.

$$\begin{aligned} \text{解析: (1) } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \frac{(1+\Delta x)^2 + 3 - (1^2 + 3)}{\Delta x} = 2 + \Delta x. \end{aligned}$$

$$(2) \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x \rightarrow 2,$$

$$\text{即 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

(3) 由 (2) 知过点 $P(1, 4)$ 的切线的斜率为 2, 故在点 $P(1, 4)$ 的切线方程为 $y-4=2(x-1)$, 即 $2x-y+2=0$.

⑤ (1) 已知质点运动方程是 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + 2t - 1$, 求质点在 $t=4$ 时的瞬时速度, 其中 s 的单位是 m, t 的单位是 s.

(2) 已知某质点的运动方程是 $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, 求质点在 $t=10$ 时的瞬时速度和动能. (设物体的质量为 m)

分析: 瞬时速度是路程对时间的变化率, 而动能 $U = \frac{1}{2}mv^2$.

解: (1) 质点在 $t=4$ 时的瞬时速度为 $v_{(t=4)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(4+\Delta t) - s(4)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(4+\Delta t)^2 + 2(4+\Delta t) - 1 - \frac{1}{2}g \cdot 4^2 - 2 \times 4 + 1}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g\Delta t^2 + 4g\Delta t + 2\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\frac{1}{2}g\Delta t + 4g + 2) = 4g + 2,$$

所以质点在 $t=4$ 时的瞬时速度为 $4g+2$ (m/s).

(2) 质点在 $t=10$ 时的瞬时速度为

$$\begin{aligned} v_{(t=10)} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(10+\Delta t) - s(10)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(10+\Delta t)^2 - 2(10+\Delta t) + 1 - 3 \times 10^2 + 2 \times 10 - 1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3\Delta t^2 + 58\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3\Delta t + 58) = 58, \end{aligned}$$

四、导数的物理意义

瞬时速度是路程对时间的变化率,某时刻的瞬时速度就是路程在某时刻的导数,加速度是速度的导数,动量是动能的导数.

所以质点在 $t=10$ 时的瞬时速度为 $v=58 \text{ m/s}$;质点在 $t=$

10 时的动能为 $U=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m \times (58)^2=1\,682m \text{ J}$.



主动成长



夯基达标

- 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$,则在一段时间 $[1,1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为 ()
A. $3\Delta t+6$ B. $-3\Delta t+6$
C. $3\Delta t-6$ D. $-3\Delta t-6$
- $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ()
A. 与 x_0, h 都有关
B. 仅与 x_0 有关,而与 h 无关
C. 仅与 h 有关而与 x_0 无关
D. 与 x_0, h 均无关
- 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 $(1,2)$ 及附近一点 $(1+\Delta x, 2+\Delta y)$,则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 ()
A. $\Delta x + \frac{1}{\Delta x} + 2$ B. $\Delta x - \frac{1}{\Delta x} - 2$
C. $\Delta x + 2$ D. $2 + \Delta x - \frac{1}{\Delta x}$
- 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可导,且 $f'(x_0)=-2$,则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 等于 ()
A. 0 B. 2
C. -2 D. 不存在
- 已知曲线 $y=2x^2$ 上一点 $A(2,8)$,则点 A 处的切线斜率为 ()
A. 4 B. 16
C. 8 D. 2
- 如果某物体做运动方程为 $s=2(1-t^2)$ 的直线运动(s 的单位为 m , t 的单位为 s),那么其在 1.2 s 末的瞬时速度为 ()
A. -0.88 m/s B. 0.88 m/s
C. -4.8 m/s D. 4.8 m/s
- 设 $f(x)$ 为可导函数,且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-2x)}{2x}=-1$,则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ()
A. 2 B. -1
C. 1 D. -2

8 若 $f'(x_0)=2$,则 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9 已知 $P(1,2)$ 为函数 $f(x)=1+x^3$ 图象上一点,以 P 点为切点的切线的斜率为

10 求曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(1,3)$ 处的切线方程.

11 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,试求下列各式的值.

(1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$;

(3) 若 $f'(x_0)=-2$ 求 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f\left[x_0-\frac{1}{2}k\right]-f(x_0)}{k}$.



走近高考

- 12 2005 湖北质量检测 已知曲线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P\left(1, -\frac{3}{2}\right)$,过点 P 的切线的倾斜角为 ()
A. 30° B. 45°
C. 135° D. 165°
- 13 2004 湖北高考 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 ()
A. $2x-y+3=0$ B. $2x-y-3=0$
C. $2x-y+1=0$ D. $2x-y-1=0$

14 2006 山东临沂模拟, 16 给出下列四个命题:

- ① 若函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f'(0) = 0$;
- ② 若函数 $f(x) = 2x^2 + 1$ 图象上点 $(1, 3)$ 附近一点 $(1 + \Delta x, 3 + \Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x$;
- ③ 瞬时速度是动点位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数;
- ④ 曲线 $y = x^3$ 在点 $(0, 0)$ 处没有切线.

其中正确的命题有_____.

- 15 2004 重庆高考 曲线 $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ 与 $y = \frac{1}{4}x^3 - 2$ 在交点处的切线的夹角是_____.
- 16 2004 全国高考 过点 $P(-1, 2)$ 且与曲线 $y = 3x^2 - 4x + 2$ 在点 $M(1, 1)$ 处的切线平行的直线方程为_____.

1.2 导数的运算

1.2.1 常见函数的导数



温故知新

新知预习

几种常见函数的导数

- (1) $C' = \underline{\hspace{2cm}}$ (C 为常数);
- (2) $(x^n)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
- (3) $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (4) $(e^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$; $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (5) $(\ln x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (6) $(\log_a x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (7) $(kx + b)' = \underline{\hspace{2cm}}$; (k, b 为常数)
- (8) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (9) $(\sqrt{x})' = \underline{\hspace{2cm}}$.



知识回顾

由导数的概念求函数 $f(x)$ 在 x_0 处导数的方法:

(1) 求函数的增量:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

(2) 求平均变化率:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

(3) 取极限

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

上述方法可以简记为:一差、二比、三极限.



互动课堂



疏导引导

本课时的重点是几种常见函数的导数公式.

我们知道,导数的几何意义是曲线在某一点处的切线的斜率,物理意义是运动物体在某一时刻的瞬时速度.

根据导数的定义,求函数 $y = f(x)$ 的导数,就是求出当 Δx 趋近于 0 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所趋近的那个定值.



活学巧用

1 求下列函数的导数

$$(1) y = x^{12}; (2) y = \frac{1}{x^4}; (3) y = \sqrt[5]{x^3}.$$

解析: (1) $y = (x^{12})' = 12x^{12-1} = 12x^{11}$;

$$(2) y = (x^{-4})' = (-4)x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5};$$

(1) 函数 $y=f(x)=C$ 的导数.

$$\because \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

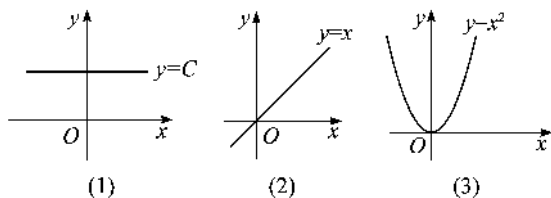
$y'=0$ 表示函数 $y=C$ 图象上每一点处的切线的斜率为 0, 如图(1). 若 $y=C$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0, 即一直处于静止状态.

(2) 函数 $y=f(x)=x$ 的导数.

$$\because \Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \therefore y'$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$y'=1$ 表示函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 1, 如图(2). 若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速运动.



(3) 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \end{aligned}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 图象上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$, 说明随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化, 如图(3). 另一方面, 从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看, $y'=2x$ 表明: 当 $x < 0$ 时, 随着 x 的增加, 函数 $y=x^2$ 减少得越来越慢; 当 $x > 0$ 时, 随着 x 的增加, 函数 $y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动, 它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

(4) 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}, \\ \therefore y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

公式: $(\cos x)' = -\sin x$ 的证明

$$\because y = \cos x,$$

$$\therefore \Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$(3) y = (\sqrt[5]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

② 某圆形容器的底面直径为 2 m, 深度为 1 m, 盛满液体后以 $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ 的速度放出, 求液面高度的变化率.

解析: 设液体放出 t s 后的液面高度为 h m, 则由题意得:

$$\pi \cdot 1^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 - 0.01t,$$

$$\text{化简, 得 } h = 1 - \frac{0.01}{\pi}t,$$

$$\therefore \text{液面高度的变化率为: } h' = \left(1 - \frac{0.01}{\pi}t\right)' = -\frac{0.01}{\pi}$$

③ 下列结论不正确的是 ()

A. 若 $y=3$, 则 $y'=0$

B. 若 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 则 $y'=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

C. 若 $y=-\sqrt{x}$, 则 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

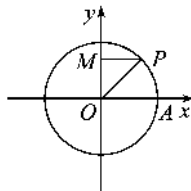
D. 若 $y=3x$, 则 $y'=3$

$$\text{解析: } \because y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}},$$

$\therefore$ 选 B.

答案: B

④ 如图, 质点 P 在半径为 1 m 的圆上沿逆时针做匀角速运动, 角速度 1 rad/s , 设 A 为起始点, 求时刻 t 时, 点 P 在 y 轴上的射影点 M 的速度.



解析: 时刻 t 时, $\because$ 角速度 1 rad/s ,

$$\therefore \angle POA = 1 \cdot t = t \text{ rad}$$

$$\therefore \angle MPO = \angle POA = t \text{ rad}$$

$$\therefore OM = OP \cdot \sin \angle MPO = 1 \cdot \sin t$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的运动方程为 } y = \sin t$$

$$\therefore v = y' = (\sin t)' = \cos t$$

即时刻 t 时, 点 P 在 y 轴上的射影点 M 的速度为 $\cos t \text{ m/s}$.

⑤ 假设某国家在 20 年期间的年均通货膨胀率为 5% , 物价 p (单位: 元) 与时间 t (单位: 年) 有如下函数关系: $p(t) = p_0(1 + \%)^t$,

其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价, 假定某种商品的 $p_0=1$, 那么在第 10 个年头, 这种商品的价格上涨的速度大约是多少? (精确到 0.01)

$$\text{解析: } \because p_0=1, \therefore p(t) = (1 + \%)^t = 1.05^t.$$

根据基本初等函数导数公式表, 有

$$p'(t) = (1.05^t)' = 1.05^t \cdot \ln 1.05.$$

$$\therefore p'(10) = 1.05^{10} \cdot \ln 1.05 \approx 0.08 (\text{元/年}).$$

$$= -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\therefore y' = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

对数函数、指数函数的导数公式的巩固.

对于公式 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 和 $(e^x)' = e^x$ 很好记, 但对于公

式 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ 和 $(a^x)' = a^x \ln a$ 的记忆就较难, 特别是两个常数 $\log_a e$ 、 $\ln a$ 很容易混淆. 应从以下几方面加深对公式的理解和记忆:

① 区分公式的结构特征, 从纵的方面“ $(\ln x)'$ 与 $(\log_a x)'$ ”, 和 $(e^x)'$ 与 $(a^x)'$ ”区分, 又要从横的方面“ $(\log_a x)'$ 与 $(a^x)'$ ”区分, 找出差异, 记忆公式.

② 对公式 $(\log_a x)'$, 用 $(\ln x)'$ 和复合函数求导法则证明来帮助记忆, 即求证对数函数导数公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$\text{证明如下: } (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

这样知道了 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ 中 $\log_a e$ 的来历, 对于

公式的记忆和区分是很有必要的.

因此, 在第 10 个年头, 这种商品的价格约以 0.08 元/年的速度上涨.

6 2004 全国高考, 文 19 已知直线 l_1 为曲线 $y = x^2 + x - 2$ 在 $(1, 0)$ 处的切线, l_2 为该曲线的另一条切线, 且 $l_1 \perp l_2$.

(1) 求直线 l_2 的方程;

(2) 求由直线 l_1 、 l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

解析: (1) $y' = 2x + 1$.

直线 l_1 的方程为 $y = 3x - 3$.

设直线 l_2 过曲线 $y = x^2 + x - 2$ 上的点 $B(b, b^2 + b - 2)$, 则 l_2 的方程为

$$y = (2b + 1)x - b^2 - 2.$$

$$\text{因为 } l_1 \perp l_2, \text{ 则有 } 2b + 1 = -\frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{所以直线 } l_2 \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{3}x - \frac{22}{9}.$$

$$(2) \text{ 解方程组 } \begin{cases} y = 3x - 3, \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{22}{9}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{1}{6}, \\ y = -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\text{所以直线 } l_1 \text{ 和 } l_2 \text{ 交点的坐标为 } \left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{2}\right).$$

$$l_1, l_2 \text{ 与 } x \text{ 轴交点的坐标分别为 } (1, 0), \left(-\frac{22}{3}, 0\right).$$

$$\text{所以所求三角形的面积 } S = \frac{1}{2} \times \frac{25}{3} \times \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{125}{12}.$$



夯基达标

- 物体做直线运动, 其运动方程为 $s(t) = t^2$, 其初速度为 ()
A. -3 B. -2
C. 0 D. 1
- 曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的倾斜角为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\arctan \frac{1}{2}$ D. $\pi - \arctan \frac{1}{2}$
- 已知 $f(x) = x^3$ 的切线斜率等于 1, 则其切线方程有 ... ()
A. 1 个 B. 2 个
C. 多于 2 个 D. 不能确定

- 过曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上点 P 的切线 l 的方程为 $x + 4y - 4 = 0$, 那么 P 点坐标可能为 ()
A. $(1, 1)$ B. $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
C. $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(3, \frac{1}{3}\right)$
- 已知 $f(x) = x^\alpha$, $f'(-1) = -4$, 则 α 的值等于 ()
A. 4 B. -4
C. 5 D. -5
- 函数 $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ 的导数是 ()
A. $\frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$ B. $-\frac{7}{8\sqrt{x}} (x > 0)$
C. $\frac{7}{8\sqrt{x}} (x > 0)$ D. $-\frac{1}{8\sqrt{x}} (x > 0)$

7 求曲线 $y = \cos x$ 在点 $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程.

8 求过曲线 $y = \sin x$ 上的点 $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 且与过这点的切线垂直的直线方程.

9 已知曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 P 处的切线平行于直线 $x + 4y = 0$, 求 P 点的坐标.

10 设曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 和曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在它们的交点处的两切线的夹角为 α , 求 α 的值.



11 2005 重庆高考, 文 12 曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴, 直线 $x = 2$ 所围成的三角形面积为 _____.

12 2005 重庆高考, 理 12 曲线 $y = x^3$ 在点 (a, a^3) ($a \neq 0$) 处的切线与 x 轴, 直线 $x = a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$, 则 $a =$ _____.

1.2.2 函数的和、差、积、商的导数



新知预习

- $[f(x) + g(x)]' =$ _____;
- $[f(x) - g(x)]' =$ _____;
- $[cf(x)]' =$ _____;
- $[f(x) \cdot g(x)]' =$ _____;
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' =$ _____, $fg(x) \neq 0$



知识回顾

简单函数的导数公式:

根据导数定义, 容易得以几种常见函数的导数公式: (1) $c' = 0$ (c 为常数); (2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$); (3) $(\sin x)' = \cos x$; (4) $(\cos x)' = -\sin x$; (5) $(a^x)' = a^x \ln a$; (6) $(e^x)' = e^x$; (7) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; (8) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.



疏 导 引 导

本节的重点是函数的和、差、积、商的导数的求导法则及应用。

1. 导数运算法则及证明

法则 1: 两个函数的和(或差)的导数, 等于这两个函数的导数的和(或差), 即 $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

证明: 令 $y = f(x) = u(x) \pm v(x)$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u \pm \Delta v,\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x),$$

即 $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$.

法则 2: 两个函数积的导数, 等于第一个函数的导数乘以第二个函数, 加上第一个函数乘以第二个函数的导数, 即 $(uv)' = u'v + uv'$.

证明: 令 $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\ &= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x) + \\ &\quad u(x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x), \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

因为 $v(x)$ 在点 x 处可导, 所以它在点 x 处连续, 于是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $v(x+\Delta x) \rightarrow v(x)$, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\end{aligned}$$

即 $y' = (uv)' = u'v + uv'$.

疑难疏引 (1) 牢记公式的形式 $(uv)' \neq u'v'$, 避免与 $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 混淆.

(2) 若 C 为常数, 则 $(Cu)' = C'u + Cu' = 0 + Cu' = Cu'$, 即常数与函数的积的导数等于常数乘以函数的导数.

(3) 由法则 2 和法则 1, 又得

$$[au(x) \pm bv(x)]' = au'(x) \pm bv'(x), a, b \text{ 为常数}.$$

(4) 法则 1 和法则 2 均可推广到两个以上函数的和(或差)、积求导.

法则 3: 商的导数公式及证明:

活 学 巧 用

① 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 则 $f'(0)$ 等于

- A. 100 B. 0
C. 100! D. 1

解析: $\because f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$

$$\therefore f'(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-100) + x[(x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-100)]'$$

$$\therefore f'(0) = (-1)(-2)\cdots(-100) = 100!$$

答案: C

② 求下列函数的导数

$$(1) y = (2x^2 + 3)(3x - 1);$$

$$(2) y = (\sqrt{x} - 2)^2;$$

$$(3) y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

解析: (1) 方法一: $y' = (2x^2 + 3)'(3x - 1) + (2x^2 + 3)(3x - 1)' = 4x(3x - 1) + 3(2x^2 + 3) = 18x^2 - 4x + 9$.

方法二: $\because y = (2x^2 + 3)(3x - 1) = 6x^3 - 2x^2 + 9x - 3$,

$$\therefore y' = (6x^3 - 2x^2 + 9x - 3)' = 18x^2 - 4x + 9.$$

$$(2) \because y = (\sqrt{x} - 2)^2 = x - 4\sqrt{x} + 4. \therefore y' = x' - (4\sqrt{x})' + 4' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(3) \because y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = x - \frac{1}{2} \sin x,$$

$$\therefore y' = x' - \left(\frac{1}{2} \sin x \right)' = 1 - \frac{1}{2} \cos x.$$

③ 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 6;$$

$$(2) y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3};$$

$$(3) y = \frac{x+3}{x^2+3};$$

$$(4) y = (2x^2 + 3)(3x - 2);$$

$$(5) y = \sin 2x.$$

解析: (1) $y' = (x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 6)' = (x^5)' - (3x^3)' - (5x^2)' + 6' = 5x^4 - 9x^2 - 10x$

$$(2) y' = \left(\frac{2}{x^2} \right)' + \left(\frac{3}{x^3} \right)' = (2x^{-2})' + (3x^{-3})' = -4x^{-3} -$$

$$9x^{-4} = -\frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$$

$$(3) y' = \frac{(x+3)'(x^2+3) - (x+3) \cdot (x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

回顾导数的定义:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

证明: 设 $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} (v(x) \neq 0)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \\ &= \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}, \\ \text{所以 } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

因为 $v(x)$ 在点 x 处可导, 所以 $v(x)$ 在点 x 处连续, 于是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $v(x+\Delta x) \rightarrow v(x)$.

$$\text{从而 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

$$\text{即 } y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

2. 对公式的说明

(1) 类比: $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, 注意差异, 加以区分.

$$(2) \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}, \text{ 且 } \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'v + uv'}{v^2}.$$

(3) 法则 1、2、3——两函数的和、差、积、商的导数法则, 称为可导函数四则运算的求导法则.

(4) 若两个函数可导, 则它们的和、差、积、商(商分母不为零)必可导. 其结果由法则 1、2、3 可得.

若两个函数不可导, 则它们的和、差、积、商不一定不可导.

3. 运用导数的运算法则应注意的问题

(1) 对函数变形化简后再求导, 而不加分析, 盲目套用公式, 会给运算带来不便甚至错误, 先化简求导是实施求导运算的基本方法, 是化难为易, 化繁为简的基本原则和策略.

(2) 商的求导法则与积的求导法则相近而造成它们之间容易混淆, 通过变式训练, 加深对商的求导法则的理解, 并能正确运用函数式的恒等变形, 尽可能避免使用商的求导法则, 减少运算量.

案例 1 (1) 求曲线 $y = \frac{2x}{x^2+1}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程;

(2) 运动曲线方程为 $S = \frac{t-1}{t^2} + 2t^2$, 求 $t=3$ 时的速度.

$$\text{【探究】} (1) y' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'|_{x=1} = \frac{2-2}{4} = 0, \text{ 即曲线在点 } (1, 1) \text{ 处的切线斜率 } k=0$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+3) - (x+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-6x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$(4) \text{方法一: } y' = (2x^2+3)'(3x-2) + (2x^2+3) \cdot (3x-2)' \\ = 4x(3x-2) + (2x^2+3) \cdot 3 = 18x^2 - 8x + 9$$

$$\text{方法二: } \because y = (2x^2+3) \cdot (3x-2) = 6x^3 - 4x^2 + 9x - 6 \\ \therefore y' = 18x^2 - 8x + 9$$

$$(5) \because y = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \therefore y' = 2(\sin x)' \cos x + 2 \sin x \cdot (\cos x)' \\ = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2 \cos 2x$$

④ 求曲线 $y = \sqrt[3]{3x^2+1}$ 在点 $(1, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程.

$$\begin{aligned} \text{解析: } \because y &= (3x^2+1)^{\frac{1}{3}}, \\ \therefore y' &= \frac{1}{3}(3x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (3x^2+1)' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x. \end{aligned}$$

$$\therefore k = y'|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$\therefore \text{切线方程为 } y - \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x-1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt[3]{2}y + 1 = 0.$$

⑤ 求下列函数的导数

$$(1) y = \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^7} + \sqrt{x^9}}{\sqrt{x}};$$

$$(2) y = \sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4};$$

$$(3) y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};$$

$$(4) y = -\sin \frac{x}{2} \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{4}\right).$$

$$\text{解析: } (1) y = \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^7} + \sqrt{x^9}}{\sqrt{x}}$$

$$= x^2 + x^3 + x^4,$$

$$\therefore y' = 2x + 3x^2 + 4x^3.$$

$$(2) y = \left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos x.$$

$$\therefore y' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos\right)' = -\frac{1}{4} \sin x$$

$$(3) y = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{1-x} + \frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}$$

$$= \frac{2(1+x)}{1-x} = \frac{4}{1-x} - 2.$$

$$\therefore y' = \left(\frac{4}{1-x} - 2\right)'$$

因此曲线 $y = \frac{2x}{x^2+1}$ 在 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$

$$(2) S' = \left(\frac{t-1}{t^2} \right)' + (2t^2)'$$

$$= \frac{t^2 - 2t(t-1)}{t^4} + 4t$$

$$= -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4t$$

$$S'|_{t=3} = -\frac{1}{9} + \frac{2}{27} + 12 = 11\frac{26}{27}$$

【规律总结】正确运用导数的四则运算法则求出导数,这是解题的关键.

案例 2 已知曲线 $C_1: y = x^2$ 与 $C_2: y = -(x-2)^2$, 直线 l 与 C_1, C_2 都相切, 求直线 l 的方程.

【探究】设 l 与 C_1 相切于点 $P(x_1, x_1^2)$, 与 C_2 相切于点 $Q(x_2, -(x_2-2)^2)$.

对 $C_1: y' = 2x$, 则与 C_1 相切于点 P 的切线方程为 $-x_1^2 = 2x_1(x-x_1)$,

$$\text{即 } y = 2x_1x - x_1^2. \quad ①$$

对 $C_2: y' = -2(x-2)$, 则与 C_2 相切于点 Q 的切线方程为

$$y + (x_2-2)^2 = -2(x_2-2)(x-x_2), \text{ 即 } y = -2(x_2-2)x + x_2^2 - 4. \quad ②$$

$$\because \text{两切线重合}, \therefore \begin{cases} 2x_1 = -2(x_2-2) \\ -x_1^2 = x_2^2 - 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线方程为 } y=0 \text{ 或 } y=4x-4.$$

【规律总结】函数在某点的导数值就是过这一点的切线的斜率, 本题所求的直线 l 实际上是所给两圆的公切线, 因此, 利用两个圆的切线的斜率相等, 最终求得直线 l 的方程.

$$= \frac{(4)'(1-x) - 4(1-x)'}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{4}{(1-x)^2}.$$

$$(4) y = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x.$$

$$\therefore y' = \left(\frac{1}{2} \sin x \right)' = \frac{1}{2} \cos x.$$

6 已知曲线 $C: y = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$. ① 求曲线 C 上横坐标为 1 的点的切线的方程;

② 第①小题中切线与曲线 C 是否还有其它公共点.

解析: ① 把 $x=1$ 代入 C 的方程, 求得 $y=-4$. $\therefore$ 切点为 $(1, -4)$, $y' = 12x^3 - 6x^2 - 18x$,

$$\therefore \text{切线斜率为 } k = 12 - 6 - 18 = -12.$$

$$\therefore \text{切线方程为 } y + 4 = -12(x-1), \text{ 即 } y = -12x + 8.$$

$$\text{② 由 } \begin{cases} y = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4, \\ y = -12x + 8 \end{cases}$$

$$\text{得 } 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0, (x-1)^2(x+2)(3x-2) = 0, \therefore x = 1, -2, \frac{2}{3}.$$

代入 $y = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$, 求得 $y = -4, 32, 0$, 即公共点为 $(1, -4)$ (切点), $(-2, 32)$, $(\frac{2}{3}, 0)$.

除切点外, 还有两个交点 $(-2, 32)$, $(\frac{2}{3}, 0)$.

7 求曲线 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ 上一点 $P(4, -\frac{7}{4})$ 处的切线方程.

$$\text{解析: } \because y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \therefore f'(4) = -\frac{5}{16}.$$

所以所求切线的斜率为 $-\frac{5}{16}$. 所求切线方程为 $5x + 16y + 8 = 0$.



主动成长



夯基达标

1 点 P 在曲线 $y = x^3 - x + \frac{2}{3}$ 上移动, 设点 P 处切线的倾

斜角为 α , 则角 α 的取值范围是 ()

A. $[0, \frac{\pi}{2}]$

B. $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{4}\pi, \pi)$

C. $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$

D. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]$

2 函数 $y = (x+1)^2 \cdot (x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 ... ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的导数是 ()

A. $1 - \frac{1}{x^2}$

B. $1 - \frac{1}{x}$

C. $1 + \frac{1}{x^2}$

D. $1 + \frac{1}{x}$

4 曲线 $y = 4x - x^2$ 上两点 $A(4, 0)$, $B(2, 4)$, 若曲线上一

P 处的切线恰好平行于弦 AB , 则点 P 的坐标是……()

- A. (3, 3) B. (1, 3)
C. (6, -12) D. (2, 4)

5 函数 $y = x^3 - ax^2 + x$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $y = 2x$ 平行, 则 a 的值为……()

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 0

6 曲线 $y = 2x^3 - 6x$ 上切线平行于 x 轴的点的坐标为 ……()

- A. (-1, 4)
B. (1, -4)
C. (-1, -4) 或 (1, 4)
D. (-1, 4) 或 (1, -4)

7 下列函数在点 $x = 0$ 处没有切线的是 ……()

- A. $y = 3x^2 + \cos x$ B. $y = x \sin x$
C. $y = \frac{1}{x} + 2x$ D. $y = \frac{1}{\cos x}$

8 曲线运动方程为 $s = \frac{1-t}{t^2} + 2t^2$, 则 $t = 2$ 时的速度为 ……()

- A. 4 B. 8
C. 10 D. 12

9 已知两个作直线运动物体的运动方程为 $s_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2$,

$s_2(t) = 20t - 4t^2 + 1 (t \geq 0)$, 问在什么时刻它们的运动速度相等.

10 已知曲线 $y = 2\sqrt{x} + 1$, 问曲线上哪一点处切线与直线 $y = -2x + 3$ 垂直, 并写出这一点的切线方程.

11 求下列函数的导数:

$$(1) y = (\sqrt{x} + 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right);$$

$$(2) y = \frac{x^5 + \sqrt{x} + \sin x}{x^2}.$$



12 2005 湖南高考, 理 6 设 $f_0(x) = \sin x$, $f_1(x) = f_0'(x)$, $f_2(x) = f_1'(x)$, $\dots$, $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $n \in \mathbf{N}$, 则 $f_{2005}(x)$ 等于 ……()

- A. $\sin x$
B. $-\sin x$
C. $\cos x$
D. $-\cos x$

13 2004 湖北高考 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的导数为 3, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ……()

- A. $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)$
B. $f(x) = 2(x-1)$
C. $f(x) = 2(x-1)^2$
D. $f(x) = x-1$

14 2004 全国高考 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 (1, -1) 处的切线方程为 ……()

- A. $y = 3x - 4$
B. $y = -3x + 2$
C. $y = -4x + 3$
D. $y = 4x - 5$

15 2005 江苏高考 曲线 $y = x^3 + x + 1$ 在点 (1, 3) 处的切线方程是_____.

1.2.3 复合函数的导数



温故知新



新知预习

复合函数的求导

(1) 一个函数可以写成 $y=f[\varphi(x)]$, 即 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 的形式, 则称其为_____.

(2) 函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x=\varphi'(x)$, 函数 $y=f(u)$ 在点 x 的_____ u 处有导数 $y'_u=f'(u)$, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也有导数, 且_____或写成_____.



知识回顾

函数的和、差、积、商的导数

$$1. [f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$2. [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

($g(x) \neq 0$)



互动课堂



疏导引路

1. 复合函数的概念和理解复合函数的结构规律

(1) 一般地, 由几个函数复合而成的函数, 称为复合函数. 由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

(2) 理解复合函数的结构规律.

● 疑难疏引 判断复合函数的复合关系的一般方法是: 从外向里分析, 最外层的主体函数结构是以基本函数为主要形式, 各层的中间变量结构也都是基本函数关系, 这样一层一层分析, 最里层应是关于自变量 x 的基本函数或关于自变量 x 的基本函数经过有限次四则运算而得到的函数.

如: 函数 $y=\frac{1}{(1-3x)^4}$, 由 $y=u^{-4}$, $u=1-3x$ 复合而成.

函数 $y=\ln \sqrt{x^2+1}$, 由 $y=\ln u$, $v=u^{\frac{1}{2}}$, $v=x^2+1$ 复合而成. 若将函数变形为 $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, 则它的复合过程是由 $y=\frac{1}{2}\ln u$, $u=x^2+1$ 复合而成.

2. 复合函数的求导法则

一般地, 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x=\varphi'(x)$, 函数 $y=f(u)$ 在点 x 的对应点 u 处有导数 $y'_u=$



活学巧用

① 指出下列函数的复合关系:

$$(1) y=(a+bx^n)^m; (2) y=\ln \sqrt[3]{e^x+2};$$

$$(3) y=3^{\log_2(x^2-2x+3)}; (4) y=\sin^3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

解析: 函数的复合关系分别是:

$$(1) y=u^m, u=a+bx^n;$$

$$(2) y=\ln u, u=\sqrt[3]{v}, v=e^x+2;$$

$$(3) y=3^u, u=\log_2 v, v=x^2-2x+3;$$

$$(4) y=u^3, u=\sin v, v=x+\frac{1}{x}.$$

② 函数 $y=\sqrt[4]{\frac{1}{(3x+1)^3}}$ 是由哪些函数复合而成的?

分析: 解法一 令 $u=\frac{1}{(3x+1)^3}$, 则 $y=\sqrt[4]{u}$.

$$\text{解法二 } y=\sqrt[4]{\frac{1}{(3x+1)^3}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3x+1}\right)^3}=\left(\frac{1}{3x+1}\right)^{\frac{3}{4}},$$

因此, 令 $u=\frac{1}{3x+1}$, 则 $y=u^{\frac{3}{4}}$.

$$\text{解法三 } y=\sqrt[4]{\frac{1}{(3x+1)^3}}.$$

令 $u=3x+1$, 则 $y=u^{-\frac{3}{4}}$.