

前言

Foreword



《高中同步测控全优设计》系列丛书是志鸿优化隆重推出的最新教学研究成果。本丛书根据新的课堂教学模式,采用了双栏互动的形式,以学生为主体,着力培养学生的学习兴趣,挖掘学习潜能。在学习过程中充分体现了既“授人一鱼”又“授人以渔”的教育理念,使学生在掌握基础知识的同时,基本技能也相应得到提高,而基本技能的提高又促进了对基础知识的掌握,使繁重的学习环节演变为一个螺旋上升的良性循环过程。

丛书具有以下特点:

Overall 全

内容全:知识覆盖全面,对考纲考点及相关热点问题讲解细致;

过程全:结合中学教学的实际,对整个学习环节进行全程设计,科学组织内容,精心设计每个细微之处。

Outstanding 优

过程优:学无定法,但本丛书却能对繁杂的学习过程进行全面优化,科学把握,主次分明,组成了一个科学、实用的学习过程;

编者优:从全国各地名校中聘请一线教学骨干教师亲自执笔。

New 新

理念新:吸收最新教研成果,以人为本,帮助学生全面发展;

内容新:以最新教改精神为依据、以最新教材为蓝本,及时吸收新材料、新背景,全面提高内容的新颖性;

形式新:在呈现方式上,一改老面孔,以双栏互动、彩版设计的全新形式展现在广大读者面前,一对一地展示知识与方法,直接高效地指导教学。

由于时间、水平所限,书中难免存在一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正。

丛书编委会

栏目功能解读



温故知新



新知预习

以学案设计的形式,对本节主干知识进行梳理,帮助学生初步感知即将学习的知识内容和知识体系。



基础示例

对“新知预习”中的主要知识点进行例析,帮助学生掌握常见基础题型的解题思路和方法。



互动课堂



疏导引导

对本节的主干知识和重点、难点进行整合讲解、深入剖析,引导学生突破思路,掌握技巧,解决思想障碍,为学生全面扎实地掌握教材知识点、提升综合能力奠定坚实的基础。



活学巧用

针对“疏导引导”中的知识点,选取典型、新颖的例题,采用“解剖麻雀”的方式,进行全解全析,点拨思路,展示方法。



主动成长



夯基达标

针对所学内容,进行专项训练,巩固基础知识,培养基本技能。



走近高考

让学生提前感受高考,了解命题意图,把握命题趋势。

CONTENTS

目录

第一章 导数及其应用	1
1.1 变化率与导数	1
1.2 导数的计算	5
1.2.1 n 个常用函数的导数	5
1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算 法则	8
习题课	12
1.3 导数在研究函数中的应用	15
1.3.1 函数的单调性与导数	15
1.3.2 函数的极值与导数	18
1.3.3 函数的最大(小)值与导数	21
1.4 生活中的优化问题举例	25
习题课	29
1.5 定积分的概念	34
1.5.1~1.5.2 曲边梯形的面积与汽车行驶的 路程	34
1.5.3 定积分的概念	38
1.6 微积分基本定理	40
1.7 定积分的简单应用	43
1.7.1 定积分在几何中的应用	43
1.7.2 定积分在物理中的应用	46
本章小结	49
本章测评	50

研究学习	52
第二章 推理与证明	53
2.1 合情推理与演绎推理	53
2.1.1 合情推理	53
2.1.2 演绎推理	60
2.2 直接证明与间接证明	63
2.2.1 综合法和分析法	63
2.2.2 反证法	67
2.3 数学归纳法	70
本章小结	73
本章测评	74
第三章 数系的扩充与复数的引入	75
3.1 数系的扩充和复数的概念	75
3.1.1 数系的扩充和复数的概念	75
3.1.2 复数的几何意义	77
3.2 复数代数形式的四则运算	80
3.2.1 复数代数形式的加减运算及其几何意义	80
3.2.2 复数代数形式的乘除运算	82
本章小结	85
本章测评	85
模块综合测评	87
解析与答案	89



第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数



新知预习

1. 导数的概念

(1) 对于函数 $y=f(x)$, 如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx , 那么函数 y 相应地有增量 _____; 比值 _____ 就叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的 _____.

(2) 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 我们就说 $y=f(x)$ 在点 x_0 处 _____, 并把这个极限叫做 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或变化率), 记作 _____ 或 _____, 即 $f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 就是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限, 即 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

2. 导数的意义

(1) 导数的几何意义: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的 _____, 即 _____.

(2) 导数的物理意义: 函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数 _____, 就是当物体的运动方程为 $s=s(t)$ 时, 物体运动在时刻 t_0 时的瞬时速度 v , 即 $v=s'(t_0)$.

基础示例

- 1 已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 的图象上一点 $(1, -2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x, -2+\Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于 ()
A. 4 B. $4x$
C. $4+2\Delta x$ D. $4+2(\Delta x)^2$
- 2 已知曲线 $y=2x^3$ 上一点 $A(1, 2)$, 则曲线在 A 处的切线斜率等于 ()
A. 2 B. 4
C. $6+6\Delta x+2(\Delta x)^2$ D. 6
- 3 有一做直线运动的物体, 其位移 s (单位: 米) 与时间 t (单位: 秒) 的函数关系是 $s=2(1-t)^2$, 则其在 $t=1, 2$ 秒时的瞬时速度(单位: 米/秒)为 ()
A. 4 B. -4
C. 4, 8 D. 0, 8



重难突破

本节课重点是导数的定义和几何意义, 难点是利用定义求函数在某点处的导数和开区间的导数.

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(变化率)是 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 它是函数的平均变化率当自变量的改变量趋向于零时的极限值, 如果极限不存在, 我们就说

活学巧用

【例1】如果一个质点从定点 A 开始运动, 在时间 t 的位移函数为 $y=f(t)=t^3+3$.

- (1) 当 $t_0=4$ 且 $\Delta t=0.01$ 时, 求 Δy 和 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$;
- (2) 当 $t_0=4$ 时, 求 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 的值;
- (3) 说明 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 的几何意义.

解: (1) $\Delta y = f(4+\Delta t) - f(4) = (4+\Delta t)^3 + 3 - 4^3 - 3 = (\Delta t)^3 + 48\Delta t + 12(\Delta t)^2$
 $= (0.01)^3 + 48(0.01) + 12(0.01)^2 = 0.481201$,

函数在点 x_0 处不可导,对这一定义,要注意:

(1)增量 Δx 不同于增加量 Δx ,可正可负,自变量 x 在 x_0 处有增量,其实是保证 $f(x)$ 在 x_0 处“附近”有定义。

(2)增量 Δx 的形式是多种多样的,但不论 Δx 选择哪一种形式,相应 Δy 也必须选择相应的形式,如将 Δx 变为 $m \cdot \Delta x$, $\Delta y=f(x_0+m \cdot \Delta x)-f(x_0)$,只有这样,才有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+m \cdot \Delta x)-f(x_0)}{m \cdot \Delta x}=f'(x_0)$ 。

(3)在判定分段函数在“分界点”处的导数是否存在时,要验证函数在该点的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 左、右极限是否存在且相等,如果存在且相等,才能判定这点存在导数,否则不存在导数。

2. 函数 $y=f(x)$ 的导函数(导数)是 $f'(x)$ 或 y' , 即 $f'(x)=y'=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 。它是一个函数,要注意:

(1)并不是所有函数都有它的导数。

(2)导函数 $f'(x)$ 与原来的函数 $f(x)$ 有相同的定义域,且导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处的函数值即为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 。

(3)由导数的定义可知,求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的方法步骤是:

①求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

②求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

③取极限,得导数 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

3. 平均变化率表示的几何意义与导数的几何意义

若函数关系用 $f(x)$ 来表示,则 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (Δx 表示自变量的增量, Δy 表示函数的增量)。它表示了函数 $f(x)$ 图象上任两点 $(x_1 \neq x_2)$ 连线的斜率。而导数是指 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限,即 Δx 越小,任两点的连线越趋近于 $x=x_0$ 处的切线。因此,平均变化率的几何意义是 $f(x)$ 图象上任两点连线的斜率;而导数的几何意义表示 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率。

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{0.481\ 201}{0.01}=48.120\ 1.$$

$$(2) \text{当 } \Delta t=0.001 \text{ 时, } \frac{\Delta y}{\Delta t}=48.012\ 01,$$

$$\text{当 } \Delta t=0.000\ 1 \text{ 时, } \frac{\Delta y}{\Delta t}=48.001\ 201.$$

$$\text{所以当 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 时, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}=48.$$

(3) Δy 是质点由固定点 A 开始在 Δt 这段时间内的位移,所以 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 是质点 A 在 Δt 这段时间内的平均速度,而 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ 是质点 A 在时间 t_0 的瞬时速度。

点评:平均变化率指函数值的增量与自变量的增量的比,即 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$,而瞬时速度指平均变化率的极限,即为在该点的导数,两者应区别开。

【例2】已知 $y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$,求 y' 及 $y'|_{x=1}$ 。

$$\text{解:} \because \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x}},$$

$$\therefore y'=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \Delta x}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x-x-\Delta x)}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot \Delta x \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

$$=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{x+\Delta x} \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}=\frac{-2}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}=-x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$y'|_{x=1}=f'(1)=-(1)^{-\frac{3}{2}}=-1.$$

点评:函数的导数与在点 x_0 处的导数不是同一概念,在点 x_0 处的导数是函数的导数在 $x=x_0$ 处的函数值。求函数的导数分三个步骤:

(1)求函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

(2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

(3)取极限并求极限值,得导数 $f'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 。

【例3】如果曲线 $y=x^2+x-3$ 的某一条切线与直线 $y=3x+4$ 平行,求切点坐标与切线方程。

解: $\because$ 切线与直线 $y=3x+4$ 平行, $\therefore$ 斜率为 3。

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $y'|_{x=x_0}=3$ 。

$$\text{又 } y'|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)-3-x_0^2-x_0+3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x+2x_0+1)=2x_0+1,$$

$$\therefore 2x_0+1=3, \text{ 从而得 } \begin{cases} x_0=1, \\ y_0=-1. \end{cases} \therefore \text{切点坐标为 } (1, -1),$$

切线方程为 $3x-y-4=0$ 。

【例4】(1)已知质点运动方程是 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+2t-1$,求质点在 $t=4$ 时的瞬时速度,其中 s 的单位是 m, t 的单位是 s。

(2)已知某质点的运动方程是 $s(t)=3t^2-2t+1$,求质点在 $t=10$ 时的瞬时速度和动能。(设物体的质量为 m)

分析:瞬时速度是路程对时间的变化率,而动能 $U=\frac{1}{2}mv^2$ 。

解:(1)质点在 $t=4$ 时的瞬时速度为

$$v_{(t=4)}=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t}$$

例如曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率 $k=y'|_{x=1}=2$, 但过 $Q(2,2)$ 处的切线斜率 k 是多少? 请参见右栏例 3 自己解决.

4. 导数的物理意义

瞬时速度是路程对时间的变化率, 某时刻的瞬时速度就是路程在某时刻的导数, 加速度是速度的导数, 动量是动能的导数.

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(4+\Delta t)^2 + 2(4+\Delta t) - 1 - \frac{1}{2}g \cdot 4^2 - 2 \times 4 + 1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g\Delta t^2 + 4g\Delta t + 2\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\frac{1}{2}g\Delta t + 4g + 2) = 4g + 2, \end{aligned}$$

所以质点在 $t=4$ 时的瞬时速度为 $4g+2$ (m/s).

(2) 质点在 $t=10$ 时的瞬时速度为

$$\begin{aligned} v_{(t=10)} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(10+\Delta t) - s(10)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(10+\Delta t)^2 - 2(10+\Delta t) + 1 - 3 \times 10^2 + 2 \times 10 - 1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(\Delta t)^2 + 58\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3\Delta t + 58) = 58, \end{aligned}$$

所以质点在 $t=10$ 时的瞬时速度为 $v=58$ m/s; 质点在 $t=10$ 时的动能为 $U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times (58)^2 = 1\,682$ mJ.



夯基达标

- 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$, 则在一段时间 $[1, 1+\Delta t]$ 内相应的平均速度为 ()
A. $3\Delta t+6$ B. $-3\Delta t+6$
C. $3\Delta t-6$ D. $-3\Delta t-6$
- $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$... ()
A. 与 x_0, h 都有关
B. 仅与 x_0 有关, 而与 h 无关
C. 仅与 h 有关而与 x_0 无关
D. 与 x_0, h 均无关
- 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 $(1,2)$ 及附近一点 $(1+\Delta x, 2+\Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 ()
A. $\Delta x + \frac{1}{\Delta x} + 2$ B. $\Delta x - \frac{1}{\Delta x} - 2$
C. $\Delta x + 2$ D. $2 + \Delta x - \frac{1}{\Delta x}$
- 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可导, 且 $f'(x_0)=-2$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 等于 ()
A. 0 B. 2
C. -2 D. 不存在
- 已知曲线 $y=2x^2$ 上一点 $A(2,8)$, 则点 A 处的切线斜率为 ()
A. 4 B. 16
C. 8 D. 2
- 如果某物体做运动方程为 $s=2(1-t^2)$ 的直线运动 (s 的单

位为 m, t 的单位为 s), 那么其在 1.2 s 末的瞬时速度为... ()

- A. -0.88 m/s B. 0.88 m/s
C. -4.8 m/s D. 4.8 m/s

7 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数不存在, 则曲线 $y=f(x)$ ()

- A. 在点 $[x_0, f(x_0)]$ 处的切线不存在
B. 在点 $[x_0, f(x_0)]$ 处的切线可能存在
C. 在点 x_0 处不连续
D. 在 $x=x_0$ 处极限不存在

8 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-2x)}{2x} = -1$, 则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ... ()

- A. 2 B. -1
C. 1 D. -2

9 若 $f'(x_0)=2$, 则 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k} =$

10 已知 $P(1,2)$ 为函数 $f(x)=1+x^3$ 图象上一点, 以 P 点为切点的切线的斜率为

11 求曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(1,3)$ 处的切线方程.



走近高考

1 2005 湖北质量检测 已知曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 上一点 $P(1,$

$-\frac{3}{2})$, 过点 P 的切线的倾斜角为 ()

- A. 30°
- B. 45°
- C. 135°
- D. 165°

2 2006 临沂模拟, 16 给出下列四个命题:

- ① 若函数 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f'(0) = 0$;
- ② 若函数 $f(x) = 2x^2 + 1$ 图象上点 $(1, 3)$ 附近一点 $(1 + \Delta x,$

$3 + \Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x$;

③ 瞬时速度是动点位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数;

④ 曲线 $y = x^3$ 在点 $(0, 0)$ 处没有切线.

其中正确的命题有 _____.

3 有如下三个命题:

① 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 是 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件;

② 函数 $f(x)$ 在某点可导, 是相应于曲线上过该点存在切线的充分不必要条件;

③ 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

其中正确的是 _____.

4 在受到制动后的 t s 内飞轮转过的角度(弧度)由函数 $\varphi(t) = 4t - 0.3t^2$ 给出, 求:

(1) $t = 2$ s 时, 飞轮转过的角度;

(2) 飞轮停止旋转的时刻.

1.2 导数的计算

1.2.1 n 个常用函数的导数



温故知新

新知预习

1. 用导数的定义求下列函数的导数:

(1) $y=C$, 由 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$y' = 0$ 表示函数 $y=C$ 图象上每一点处的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若 $y=C$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$, 可以解释为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $y=f(x)=x$ 的导数.

由 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 得 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$y' = 1$ 表示函数 $y=x$ 的图象上每一点处的切线 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$, 可以解释为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. (1) $y=x^2$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $y=\frac{1}{x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $y=\sqrt{x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.



基础示例

1 下列结论不正确的是 ()

A. 若 $y=3$, 则 $y'=0$

B. 若 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 则 $y'=-\frac{1}{2}\sqrt{x}$

C. 若 $y=-\sqrt{x}$, 则 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

D. 若 $y=3x$, 则 $y'|_{x=1}=3$

2 已知 $f(x)=x^2$, 则 $f'(3)$ 等于 ()

A. 0

B. $2x$

C. 6

D. 9

3 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



互动课堂



重难点突破

本课时的重点是几种常见函数的导数公式.

我们知道, 导数的几何意义是曲线在某一点处的切线的斜率, 物理意义是运动物体在某一时刻的瞬时速度.

根据导数的定义, 求函数 $y=f(x)$ 的导数, 就是求出当 Δx 趋近于 0 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所趋近的那个定值.

(1) 函数 $y=f(x)=C$ 的导数.

$\because \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0,$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$

$y'=0$ 表示函数 $y=C$ 图象上每一点处的切线的斜率为 0, 如图



活学巧用

【例1】求 $f(x)=e$ 的导数.

解: 设 $y=f(x)=e$, e 为常数.

则 $y' = (e)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e - e}{\Delta x} = 0.$

点评: 解答本题的关键是明确 $f(x)=e$ 是常数函数.

【例2】求下列函数的导数:

(1) $y=\sqrt[3]{x^2};$

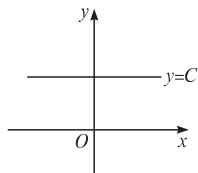
(2) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

(1). 若 $y=C$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0,即一直处于静止状态.

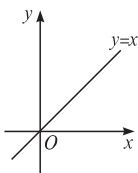
(2) 函数 $y=f(x)=x$ 的导数.

$$\because \Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

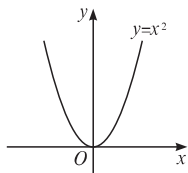
$y'=1$ 表示函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 1,如图(2). 若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速运动.



(1)



(2)



(3)

(3) 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \end{aligned}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 图象上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$,说明随着 x 的变化,切线的斜率也在变化,如图(3). 另一方面,从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看, $y'=2x$ 表明:当 $x < 0$ 时,随着 x 的增加,函数 $y=x^2$ 减少得越来越慢;当 $x > 0$ 时,随着 x 的增加,函数 $y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动,它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

(4) 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}, \end{aligned}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

请你画出函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象,根据图象描述它的变化情况,并求出曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

(5) 函数 $y=f(x)=x^n, n \in \mathbf{N}^*$ 的导数. $\because y=f(x)=x^n,$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n \\ &= [x^n + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n \cdot (\Delta x)^n] - x^n \\ &= C_n^1 x^{n-1} \Delta x + C_n^2 x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n \cdot (\Delta x)^n, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + C_n^n \cdot (\Delta x)^{n-1}.$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + C_n^n \cdot (\Delta x)^{n-1}] = C_n^1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

由上面的推导我们可以推测,对于任意的幂函数 $y=x^a$,当 $a \in \mathbf{Q}$ 时,都有 $y'=a \cdot x^{a-1}$.

事实上,上述公式对于 $a \in \mathbf{R}$ 也是成立的,由于知识的局限性,高中阶段不需要证明.

$$\text{解: (1) } y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}},$$

$$\therefore y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}},$$

$$\therefore y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{\sqrt{x^2}}{3x^2}.$$

点评: 熟记函数的求导公式是解决这一类问题的关键.

【例3】 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与抛物线 $y=\sqrt{x}$ 在交点处的切线的夹角.

$$\text{解: } y=\frac{1}{x} \text{ 的导数为 } y' = -\frac{1}{x^2},$$

$$y=\sqrt{x} \text{ 的导数为 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = \sqrt{x}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$$

$\therefore$ 交点为 $(1, 1)$.

$$\therefore y=\frac{1}{x} \text{ 在 } (1, 1) \text{ 处切线斜率 } k_1 = -1,$$

$$y=\sqrt{x} \text{ 在 } (1, 1) \text{ 处切线斜率 } k_2 = \frac{1}{2}.$$

设两切线夹角为 α ,

$$\text{则 } \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} \right| = 3,$$

$$\therefore \alpha = \arctan 3.$$

点评: 关键要明确切线的斜率即切点处导数.

【例4】 若质点做直线运动,其运动方程为 $s(t)=\sqrt{t}$ (s 的单位为米, t 的单位为秒),则当 $t=3$ 时的瞬时速度为_____.

$$\text{解: } \because s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \therefore s'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\therefore t=3 \text{ 时质点瞬时速度为 } \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 米/秒.}$$

$$\text{答案: } \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 米/秒}$$



夯基达标

- 1 物体做直线运动,其运动方程为 $s(t) = t^2$,其初速度为 ...
..... ()
A. -3 B. -2 C. 0 D. 1
- 2 曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的倾斜角为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\arctan \frac{1}{2}$ D. $\pi - \arctan \frac{1}{2}$
- 3 已知 $f(x) = x^3$ 的切线斜率等于 1,则其切线方程有 ()
A. 1 个 B. 2 个
C. 多于 2 个 D. 不能确定
- 4 过曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上点 P 的切线 l 的方程为 $x + 4y - 4 = 0$,那么 P 点坐标可能为 ()
A. $(1, 1)$
B. $(-2, -\frac{1}{2})$
C. $(2, \frac{1}{2})$
D. $(3, \frac{1}{3})$
- 5 已知 $f(x) = x^a$, $f'(-1) = -4$,则 a 的值等于 ()
A. 4 B. -4
C. 5 D. -5
- 6 函数 $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ 的导数是 ()
A. $\frac{1}{\sqrt[8]{x}} (x > 0)$
B. $-\frac{7}{8\sqrt[8]{x}} (x > 0)$
C. $\frac{7}{8\sqrt[8]{x}} (x > 0)$
D. $\frac{-1}{8\sqrt[8]{x}} (x > 0)$
- 7 已知曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 P 处的切线平行于直线 $x + 4y = 0$,求

P 点的坐标.

- 8 设曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 和曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在它们的交点处的两切线的夹角为 α ,求 α 的值.



- 1 **2005 重庆高考,文 12** 曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴,直线 $x = 2$ 所围成的三角形面积为_____.
- 2 **2005 重庆高考,理 12** 曲线 $y = x^3$ 在点 $(a, a^3) (a \neq 0)$ 处的切线与 x 轴,直线 $x = a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$,则 $a =$ _____.

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则



新知预习

1. 几种常见函数的导数

- (1) $C' = \underline{\hspace{2cm}}$ (C 为常数);
- (2) $(x^n)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbb{N}^+$);
- (3) $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (4) $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (5) $(e^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (6) $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);
- (7) $(\ln x)' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (8) $(\log_a x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2. 导数运算法则

- (1) $[f(x) \pm g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) $[f(x) \cdot g(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 复合函数的求导

(1) 一个函数可以写成 $y = f[\varphi(x)]$, 即 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 的形式, 则称其为 复合函数.

(2) 函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x' = \varphi'(x)$, 函数 $y = f(u)$ 在点 u 的 导数 $y_u' = f'(u)$, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处也有导数, 且 或写成 $y_x' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

基础示例

1 曲线 $y = \sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 ()

- A. $\sqrt{3}x - 2y - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 1 = 0$
- B. $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 1 = 0$
- C. $\sqrt{3}x + 2y - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 1 = 0$
- D. $\sqrt{3}x - 2y + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 1 = 0$

2 求下列函数的导数:

- (1) $y = 5 - 4x^3$;
- (2) $y = 3x^2 + x \cos x$;
- (3) $y = \tan x$;
- (4) $y = e^x \cdot \ln x$;
- (5) $y = \lg x - \frac{1}{x^2}$.

3 函数 $y = (3x - 4)^2$ 的导数是 ()

- A. $4(3x - 2)$
- B. $6x$
- C. $6x(3x - 4)$
- D. $6(3x - 4)$



重难点突破

本课时的重点是基本初等函数的导数公式及导数的运算法则, 难点是它们的正确应用.

1. 对于基本初等函数的求导公式, 只要我们记住公式的形式, 学会使用公式解题即可. 在这里特别记准对数函数与指数函数的导数公式.

对于公式 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 和 $(e^x)' = e^x$ 很好记, 但对于公式 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ 和 $(a^x)' = a^x \ln a$ 的记忆就较难, 特别是两个常数 $\log_a e$ 、 $\ln a$ 很容易混淆. 应从以下几方面加深对公式的

活学巧用

【例1】设 $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-100)$, 则 $f'(0)$ 等于 ... ()

- A. 100
- B. 0
- C. 100!
- D. 1

解析: $\because f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-100)$,
 $\therefore f'(x) = (x-1)(x-2) \cdots (x-100) + x[(x-1) \cdots (x-100)]'$.
 $\therefore f'(0) = (-1)(-2) \cdots (-100) = 100!$.

答案: C

【例2】求下列函数的导数:

- (1) $y = (2x^2 + 3)(3x - 1)$;

理解和记忆:

(1) 区分公式的结构特征, 既要纵的方面“(lnx)’与(log_ax)’”, 和“(e^x)’与(a^x)’”区分, 又要横的方面“(log_ax)’与(a^x)’”区分, 找出差异, 记忆公式.

(2) 对公式(log_ax)’, 用(lnx)’和复合函数求导法则证明来帮助记忆, 即求证对数函数导数公式

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$\text{证明如下: } (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

这样知道了(log_ax)’ = $\frac{1}{x} \log_a e$ 中 log_ae 的来历, 对于公式的记忆和区分是很有必要的.

2. 导数运算法则及证明

法则 1: 两个函数的和(或差)的导数, 等于这两个函数的导数的和(或差), 即(u±v)’ = u’ ± v’.

证明: 令 y = f(x) = u(x) ± v(x).

$$\Delta y = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]$$

$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)]$$

$$= \Delta u \pm \Delta v,$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x),$$

$$\text{即 } y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

法则 2: 两个函数积的导数, 等于第一个函数的导数乘以第二个函数, 加上第一个函数乘以第二个函数的导数, 即(uv)’ = u’v + uv’.

证明: 令 y = f(x) = u(x) · v(x).

$$\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

$$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot$$

$$v(x + \Delta x) - u(x)v(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \cdot$$

$$\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

因为 v(x) 在点 x 处可导, 所以它在点 x 处连续, 于是当 Δx → 0 时 v(x + Δx) → v(x), 从而

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \cdot$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\text{即 } y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

评注: (1) 牢记公式的形式(uv)’ ≠ u’v’, 避免与(u±v)’ = u’ ± v’混淆.

(2) 若 C 为常数, 则(Cu)’ = C’u + Cu’ = 0 + Cu’ = Cu’, 即常数与函数的积的导数等于常数乘以函数的导数.

(3) 由法则 2 和法则 1, 又得

$$[au(x) \pm bv(x)]' = au'(x) \pm bv'(x), a, b \text{ 为常数.}$$

(4) 法则 1 和法则 2 均可推广到两个以上函数的和(或差)、积求导.

$$(2) y = (\sqrt{x} - 2)^2;$$

$$(3) y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

解: (1) 方法一: y’ = (2x² + 3)’(3x - 1) + (2x² + 3)(3x - 1)’ = 4x(3x - 1) + 3(2x² + 3) = 18x² - 4x + 9.

方法二: ∵ y = (2x² + 3)(3x - 1) = 6x³ - 2x² + 9x - 3,

$$\therefore y' = (6x^3 - 2x^2 + 9x - 3)' = 18x^2 - 4x + 9.$$

$$(2) \because y = (\sqrt{x} - 2)^2 = x - 4\sqrt{x} + 4,$$

$$\therefore y' = x' - (4\sqrt{x})' + 4' = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - 2x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(3) \because y = x - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = x - \frac{1}{2} \sin x,$$

$$\therefore y' = x' - \left(\frac{1}{2} \sin x\right)' = 1 - \frac{1}{2} \cos x.$$

点评: “式子繁先化简”是重要的解题原则.

【例 3】首先指出下列函数是怎样复合的, 然后求导:

$$(1) y = (2x - 1)^5;$$

$$(2) y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c};$$

$$(3) y = \frac{1}{(1 - 2x)^5}.$$

解: (1) 设 u = 2x - 1, 则 y = u⁵.

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = 5u^4 \cdot (2x - 1)'$$

$$= 5(2x - 1)^4 \cdot 2 = 10(2x - 1)^4.$$

$$(2) \text{ 设 } u = ax^2 + bx + c, \text{ 则 } y = u^{\frac{1}{3}}.$$

$$\therefore y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3} (ax^2 + bx + c)^{-\frac{2}{3}} (2ax + b)$$

$$= \frac{(2ax + b) \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}}{3(ax^2 + bx + c)}.$$

$$(3) \text{ 方法一: } u = 1 - 2x, y = u^{-5},$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -5u^{-6} \cdot (-2) = 10(1 - 2x)^{-6}.$$

$$\text{方法二: } \because y = \frac{1}{(1 - 2x)^5} = (1 - 2x)^{-5},$$

$$\text{令 } y = u^5, u = \frac{1}{v}, v = 1 - 2x.$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 5u^4 \cdot (-v^{-2}) \cdot (-2)$$

$$= 10 \left(\frac{1}{v}\right)^4 \cdot v^{-2} = 10v^{-6} = 10(1 - 2x)^{-6}.$$

点评: 在用复合函数的求导法则求导数时, 要把中间变量置换成原自变量的函数.

【例 4】求函数 y = sin²(2x - $\frac{\pi}{6}$) 的导数.

解法一: 设 y = u², u = sin v, v = 2x - $\frac{\pi}{6}$,

$$\text{则 } y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot \cos v \cdot 2$$

$$= 4 \cdot \sin v \cdot \cos v$$

$$= 2 \cdot \sin 2v$$

$$= 2 \sin \left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

解法二: ∵ y = sin²(2x - $\frac{\pi}{6}$) = sin(2x - $\frac{\pi}{6}$) · sin(2x - $\frac{\pi}{6}$),

$$\therefore y' = [\sin(2x - \frac{\pi}{6})]' \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \cdot$$

法则3:商的导数公式及证明:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

回顾导数的定义:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

证明: 设 $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} [v(x) \neq 0]$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)} \\ &= \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \frac{\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x+\Delta x) \cdot v(x)}}{\Delta x}.$$

因为 $v(x)$ 在点 x 处可导, 所以 $v(x)$ 在点 x 处连续, 于是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $v(x+\Delta x) \rightarrow v(x)$.

$$\text{从而 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

$$\text{即 } y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3. 对公式的说明

(1) 类比: $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, 注意差异, 加以区分.

$$(2) \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v'}, \text{ 且 } \left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'v + uv'}{v^2}.$$

(3) 法则1、2、3——两函数的和、差、积、商的导数法则, 称为可导函数四则运算的求导法则.

(4) 若两个函数可导, 则它们的和、差、积、商(商分母不为零)必可导. 其结果由法则1、2、3可得.

若两个函数不可导, 则它们的和、差、积、商不一定不可导.

4. 求函数的导数要熟练掌握求导公式, 特别是复合函数的导数要学会合理地分拆.

在运用复合函数的求导法则 $y_x' = y_u' u_x'$ 中应注意以下几点:

(1) 利用复合函数求导法则求导后, 要把中间变量换成自变量的函数, 层层剥皮.

(2) 要分清每一步的求导是哪个变量对哪个变量求导, 不能混淆, 一直计算到最后, 常出现如下错误: 如 $(\cos 2x)' = -\sin 2x$ 实际上应是 $-2\sin 2x$.

(3) 求复合函数的导数, 关键在于分清楚函数的复合关系, 选好中间变量, 如 $y = \frac{1}{(1-3x)^4}$ 选成 $y = \frac{1}{u}$, $u = v^4$, $v = 1 - \omega$, $\omega = 3x$, 计算起来就复杂多了, 而选成 $y = u^{-4}$, $u = 1 - 3x$, 则较为简单.

$$[\sin(2x - \frac{\pi}{6})]'$$

$$= 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$= 2\sin(4x - \frac{\pi}{3}).$$

解法三: $\because y = \sin^2(2x - \frac{\pi}{6})$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos(4x - \frac{\pi}{3})]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x - \frac{\pi}{3}),$$

$$\therefore y' = -\frac{1}{2}[-\sin(4x - \frac{\pi}{3})] \cdot 4$$

$$= 2\sin(4x - \frac{\pi}{3}).$$

点评: 复合函数的求导过程就是对复合函数由外层向里层求导, 每次求导都针对着本层相应变量进行, 直至求到最里层为止, 所谓最里层是指可以直接引用基本公式进行求导, 有些函数若先化简然后求导可能更简单.

【例5】 已知 $f(x) = x \log_a(x^2 + x - 2)$, 求 $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(x) &= \log_a(x^2 + x - 2) + x \cdot \frac{1}{x^2 + x - 2} \cdot \log_a e \cdot (2x + 1) \\ &= \log_a(x^2 + x - 2) + \frac{x(2x + 1) \cdot \log_a e}{x^2 + x - 2}. \end{aligned}$$

点评: 函数 $y = \log_a(x^2 + x - 2)$ 是由 $y = \log_a u$ 与 $u = x^2 + x - 2$ 复合而成的.

【例6】 求曲线 $y = \sqrt[3]{3x^2 + 1}$ 在点 $(1, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程.

分析: 本题难点是复合函数的求导, 还有根式的运算也必须算对.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because y &= (3x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}, \\ \therefore y' &= \frac{1}{3}(3x^2 + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (3x^2 + 1)' \\ &= \frac{1}{3}(3x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x. \\ \therefore k &= y'|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{切线方程为 } y - \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(x - 1),$$

$$\text{即 } x - \sqrt[3]{2}y + 1 = 0.$$

【例7】 求证: 若 $f(x)$ 可导且为偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数.

解析: 只需证明 $f'(-x) = -f'(x)$, 或 $-f'(-x) = f'(x)$ 即可.

证明: 依题意, 设 x 是定义域内的任一实数, 则 $f(-x) = f(x)$, 两边对 x 求导得

$$f'(-x)(-x)' = f'(x),$$

$$\text{即 } -f'(-x) = f'(x),$$

$$\therefore f'(-x) = -f'(x).$$

$$\therefore f'(x) \text{ 是奇函数.}$$



主动成长

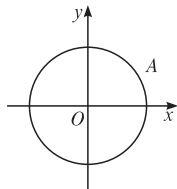


夯基达标

- 1 设 $y = -2e^x \sin x$, 则 y' 等于 ()
 A. $-2e^x \cos x$ B. $-2e^x \sin x$
 C. $2e^x \sin x$ D. $-2e^x (\sin x + \cos x)$
- 2 函数 $y = (3x^2 + 2x)^5$ 的导数是 ()
 A. $5(3x^2 + 2x)^4 \cdot (6x + 2)$
 B. $(6x + 2)^5$
 C. $10(3x + 2)^4$
 D. $5(3x + 2)^4 \cdot x^5 \cdot (6x + 2)$
- 3 函数 $y = \sqrt[4]{\frac{1}{3x+1}}$ 的导数为 ()
 A. $\frac{1}{4}(\frac{1}{3x+1})^{-\frac{3}{4}}$ B. $-\frac{3}{4}(3x+1)^{-\frac{5}{4}}$
 C. $\frac{1}{4}(3x+1)^{\frac{3}{4}}$ D. $\frac{3}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{4}}$
- 4 若 $y = 2\cos x + \frac{1}{3}\sin x - \sqrt[3]{x^2}$, 则 $y' =$
- 5 函数 $y = x\cos x^2$ 的导数为
- 6 求下列函数的导数:
 (1) $f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$;
 (2) $f(x) = x\tan x - \frac{2}{\cos x}$;
 (3) $f(x) = \frac{\ln x + 2^x}{x^2}$.

7 证明可导的奇函数其导函数是偶函数.

- 8 如图, 点 P 在半径为 20 m 的圆上做顺时针匀角速运动, 角速度为 1 rad/s, 设 A 为起点, 求时刻 t 时, 点 P 在
 (1) x 轴上的射影点 M 的速度;
 (2) y 轴上的射影点 N 的速度.



走近高考

- 1 2005 江苏高考 曲线 $y = x^3 + x + 1$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程是
- 2 2004 全国高考卷 III 函数 $y = (x+1)^2(x-1)$ 在 $x=1$ 处的导数等于 ()
 A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4
- 3 2004 湖北高考 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数为 3, 则 $f(x)$ 的解析式可能为 ()
 A. $f(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)$
 B. $f(x) = 2(x-1)$
 C. $f(x) = 2(x-1)^2$
 D. $f(x) = x-1$

习题课



基础再现

1. 写出下列各函数的导数:

- (1) C 为常数, $C' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) $x^n = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- (3) $(\sin x)' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) $(\cos x)' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) $(\ln x)' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (6) $(e^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (7) $(a^x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- (8) $(\log_a x)' = \underline{\hspace{2cm}}$ 或 $\underline{\hspace{2cm}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2. 求下列函数的导数:

- (1) $[u(x) \pm v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) $[u(x) \cdot v(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \underline{\hspace{2cm}}$.



典例剖析

【例1】求函数 $y = \ln^3(5x+2)^2$ 的导数.

解: 令 $y = u^3$, $u = \ln v$, $v = t^2$, $t = 5x+2$,

则 $y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_t' \cdot t_x'$

$$= 3u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot 2t \cdot 5$$

$$= 3 \cdot \ln^2(5x+2)^2 \cdot \frac{1}{(5x+2)^2} \cdot 2(5x+2) \cdot 5$$

$$= \frac{30}{5x+2} \ln^2(5x+2)^2.$$

【例2】求 $y = \sin(\ln x)^2$ 的导数.

解: 令 $y = \sin u$, $u = v^2$, $v = \ln x$,

则 $y_x' = \cos u \cdot 2v \cdot \frac{1}{x}$

$$= \cos(\ln x)^2 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \ln x \cdot \cos(\ln x)^2.$$

【例3】求函数 $y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ 的导数.

解: $\because y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$= \frac{1}{2} [\ln(1-\sin x) - \ln(1+\sin x)],$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) = -\sec x.$$

【例4】求下列函数的导数:

- (1) $f(x) = (x^3+1)(2x^2+8x-5)$;

$$(2) f(x) = x \tan x - \frac{2}{\cos x};$$

$$(3) f(x) = \frac{\ln x + 2^x}{x^2}.$$

分析: 为简化运算, 一般先化简再求导.

解: (1) $\because f(x) = 2x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 5$,

$$\therefore f'(x) = 10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8.$$

$$(2) f'(x) = \left(\frac{x \sin x}{\cos x} - \frac{2}{\cos x} \right)' = \left(\frac{x \sin x - 2}{\cos x} \right)'$$

$$= \frac{(x \sin x - 2)' \cos x + (x \sin x - 2) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\sin x + x \cos x) \cos x + x \sin^2 x - 2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + x - 2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{2 \tan x}{\cos x}.$$

$$(3) f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{2^x}{x^2} \right)' = \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' + \left(\frac{2^x}{x^2} \right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} + \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{(1-2\ln x)x + (\ln 2 \cdot x^2 - 2x) \cdot 2^x}{x^4}$$

$$= \frac{1-2\ln x + (\ln 2 \cdot x - 2) \cdot 2^x}{x^3}.$$

点评: 运用可导函数求导法则和导数公式求可导函数的导数的基本步骤:

- (1) 分析函数 $y = f(x)$ 的结构和特征;
- (2) 选择恰当的求导法则和导数公式求导;
- (3) 整理得结果.

【例5】求 $f(x) = \begin{cases} 300x - \frac{x^2}{2} - 2000, & 0 \leq x < 400, \\ 400 - 100x, & x > 400 \end{cases}$ 的导数.

分析: 分段函数的求导, 分段来求.

$$\text{解: } f'(x) = \begin{cases} 300 - x, & 0 \leq x < 400, \\ -100, & x > 400. \end{cases}$$

点评: (1) 分段函数的导数分段来求;

(2) 求分段函数“连接点”的导数, 利用导数的定义来求.

【例6】2004 全国高考, 文 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x - 4$
- B. $y = -3x + 2$
- C. $y = -4x + 3$
- D. $y = 4x - 5$

分析: 利用求导公式和导数的几何意义.

解: 点 $(1, -1)$ 在曲线上, $y' = 3x^2 - 6x$,

$$\therefore k = y'|_{x=1} = -3.$$

$$\therefore \text{方程为 } y + 1 = -3(x - 1),$$

即 $3x + y - 2 = 0$.

答案:B

点评:利用导数的几何意义求过某点处的切线斜率时,注意点的位置,点在曲线上时,该点的导数才为斜率.

【例7】(经典回放)已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^3 - a$, $x \in (0, +\infty)$, 设 $x_1 > 0$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l .

(1)求 l 的方程;

(2)设 l 与 x 轴交点为 $(x_2, 0)$, 证明: ① $x_2 \geq a^{\frac{1}{3}}$;

②若 $x_1 > a^{\frac{1}{3}}$, 则 $a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1$.

分析:利用导数的几何意义及证明不等式的基本方法求解.

(1)解: $f(x)$ 的导数 $f'(x) = 3x^2$, 由此得切线 l 的方程为

$$y - (x_1^3 - a) = 3x_1^2(x - x_1).$$

(2)证明:依题意,切线方程中令 $y = 0$,

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - a}{3x_1^2} = \frac{2x_1^3 + a}{3x_1^2}.$$

$$\textcircled{1} \because x_2 - a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3x_1^2}(2x_1^3 + a - 3x_1^2 a^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3x_1^2}(x_1 - a^{\frac{1}{3}})^2(2x_1 + a^{\frac{1}{3}}) \geq 0,$$

$\therefore x_2 \geq a^{\frac{1}{3}}$, 当且仅当 $x_1 = a^{\frac{1}{3}}$ 时等号成立.

$$\textcircled{2} \text{若 } x_1 > a^{\frac{1}{3}}, \text{ 则 } x_1^3 - a > 0, x_2 - x_1 = -\frac{x_1^3 - a}{3x_1^2} < 0,$$

且由 $\textcircled{1} x_2 > a^{\frac{1}{3}}$,

$$\therefore a^{\frac{1}{3}} < x_2 < x_1.$$

点评:本题主要考查导数的几何意义和不等式证明的基本方法.

【例8】求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-ax^2 + bx};$$

$$(2) y = 2^{\sin \frac{1}{x}} - 3^x + x^2.$$

解:(1) $y' = e^{-ax^2 + bx} \cdot (-2ax + b)$

$$= (-2ax + b) \cdot e^{-ax^2 + bx}.$$

$$(2) y' = 2^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 3^x \cdot \ln 3 + 2x$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot 2^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \ln 2 - 3^x \cdot \ln 3 + 2x.$$

点评:在公式 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ 与 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ 中,求导后的系数很容易混淆,同学们要准确掌握公式,并通过比较加以记忆.

【例9】求下列函数的导数:

$$(1) f(x) = \ln \sqrt{1 + \sin^2 x};$$

$$(2) f(x) = \cos^2 \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right).$$

解:(1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} (\sqrt{1 + \sin^2 x})'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} (1 + \sin^2 x)'$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{1 + \sin^2 x})^2} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$= \frac{\sin 2x}{2(1 + \sin^2 x)}.$$

$$(2) f'(x) = [\cos^2 \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right)]'$$

$$= 2 \cos \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right) \cdot \left(\cos \frac{1+x^2}{e^x} \right)'$$

$$= 2 \cos \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right) [-\sin \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right)] \cdot \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right)'$$

$$= 2 \cos \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right) [-\sin \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right)] \cdot \left[\frac{(1+x^2)' e^x - (1+x^2)(e^x)'}{e^{2x}} \right]$$

$$= -\sin 2 \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right) \cdot \frac{2xe^x - (1+x^2)e^x}{e^{2x}}$$

$$= -\sin 2 \left(\frac{1+x^2}{e^x} \right) \cdot \frac{2x - 1 - x^2}{e^x}.$$

点评:复合函数求导是一个连锁求导过程,每次选择中间变量都以问题的具体特点及基本导数公式为准,达到可以直接求导为止.



能力提高

1 下列结论中,正确的个数是 ()

$$\textcircled{1} y = \cos x, y' = -\sin x \quad \textcircled{2} \text{若 } y = -\frac{1}{\sqrt{x}}, y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \textcircled{3} \text{若}$$

$$y = \frac{1}{x^2}, y'|_{x=3} = -\frac{2}{27}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

2 设曲线 $y = x^2$ 和曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在它们交点处的两切线的夹角为 θ , 则 $\tan \theta$ 等于 ()

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. 3

D. $\frac{2}{3}$

3 若 $f(x) = x - \sin x - \cos x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 为 ()

A. -1

B. ∞

C. 2

D. 1

4 已知 a 为实数, $f(x) = (x^2 - 4)(x - a)$, 且 $f'(-1) = 0$, 则 $a =$

5 曲线 $y = \frac{1}{1-x}$ 在点 $P(2, -1)$ 处的切线方程为

6 设函数 $f(x)$ 满足: $af(x) + b f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ (其中 a, b, c 均为常数), 且 $|a| \neq |b|$, 则 $f'(x) =$

7 求证: 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 图象上的各点处的斜率小于 1, 并求出其斜率为 0 的切线方程.

- 8 已知曲线 $C_1: y=x^2$ 与 $C_2: y=-(x-2)^2$, 直线 l 与 C_1, C_2 都相切, 求直线 l 的方程.



施展才华

- 1 已知抛物线 $C_1: y=x^2+2x$ 和 $C_2: y=-x^2+a$. 如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线, 称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线. 公切线上两个切点之间的线段, 称为公切线段.
- (1) a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线? 写出此公切线的方程;
- (2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线, 证明相应的两条公切线段互相平分.

- 9 求下列函数的导函数:

$$(1) y = \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}};$$

$$(2) y = 3^x e^x - 2^x + e;$$

$$(3) y = \frac{\ln x}{x^2 + 1}.$$

- 2 利用导数求和: $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ ($x \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$).