

前言

Foreword



《高中同步测控全优设计》系列丛书是志鸿优化隆重推出的最新教学研究成果。本丛书根据新的课堂教学模式,采用了双栏互动的形式,以学生为主体,着力培养学生的学习兴趣,挖掘学习潜能。在学习过程中充分体现了既“授人一鱼”又“授人以渔”的教育理念,使学生在掌握基础知识的同时,基本技能也相应得到提高,而基本技能的提高又促进了对基础知识的掌握,使繁重的学习环节演变为一个螺旋上升的良性循环过程。

丛书具有以下特点:

Overall 全

内容全:知识覆盖全面,对考纲考点及相关热点问题讲解细致;

过程全:结合中学教学的实际,对整个学习环节进行全程设计,科学组织内容,精心设计每个细微之处。

Outstanding 优

过程优:学无定法,但本丛书却能对繁杂的学习过程进行全面优化,科学把握,主次分明,组成了一个科学、实用的学习过程;

编者优:从全国各地名校中聘请一线教学骨干教师亲自执笔。

New 新

理念新:吸收最新教研成果,以人为本,帮助学生全面发展;

内容新:以最新教改精神为依据、以最新教材为蓝本,及时吸收新材料、新背景,全面提高内容的新颖性;

形式新:在呈现方式上,一改老面孔,以双栏互动、彩版设计的全新形式展现在广大读者面前,一对一地展示知识与方法,直接高效地指导教学。

由于时间、水平所限,书中难免存在一些疏漏和不足之处,恳请广大读者批评指正。

丛书编委会

栏目功能解读



温故知新



新知预习

以学案设计的形式,对本节主干知识进行梳理,帮助学生初步感知即将学习的知识内容和知识体系。



相关链接

选取与本节内容相关的知识,通过分析,建立知识间的联系,帮助学生更好地理解把握新知内容。



互动课堂



疏导引导

对本节的主干知识和重点、难点进行整合讲解、深入剖析,引导学生突破思路,掌握技巧,解决思想障碍,为学生全面扎实地掌握教材知识点、提升综合能力奠定坚实的基础。



活学巧用

针对“疏导引导”中的知识点,选取典型、新颖的例题,采用“解剖麻雀”的方式,进行全解全析,点拨思路,展示方法。



主动成长



夯基达标

针对所学内容,进行专项训练,巩固基础知识,培养基本技能。



走近高考

让学生提前感受高考,了解命题意图,把握命题趋势。

模块综述

1. 本模块包括三章内容,常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间向量与立体几何. 具体内容与要求如下表:

内 容		要 求
常用逻辑用语	命题及其关系	①了解命题的逆命题、否命题与逆否命题. ②理解必要条件、充分条件与充要条件的意义,会分析四种命题的相互关系
	简单的逻辑联结词	通过数学实例,了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义
	全称量词与存在量词	①通过生活和数学中的丰富实例,理解全称量词与存在量词的意义. ②能正确地对含有一个量词的命题进行否定
圆锥曲线与方程	曲线与方程	结合已学过的曲线及其方程的实例,了解曲线与方程的对应关系,进一步感受数形结合的基本思想
	圆锥曲线	①了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用. ②经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程,掌握它们的定义、标准方程、几何图形及简单性质. ③了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,知道双曲线的有关性质. ④能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题和实际问题. ⑤通过圆锥曲线的学习,进一步体会数形结合的思想
空间向量与立体几何	空间向量及其运算	①经历向量及其运算由平面向空间推广的过程. ②了解空间向量的概念,了解空间向量的基本定理及其意义,掌握空间向量的正交分解及其坐标表示. ③掌握空间向量的线性运算及其坐标表示. ④掌握空间向量的数量积及其坐标表示,能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直
	空间向量的应用	①理解直线的方向向量与平面的法向量. ②能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直、平行关系. ③能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理(包括三垂线定理). ④能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题,体会向量方法在研究几何问题中的作用

2. 众所周知,在数学中逻辑用语的作用是至关重要的. 数学内容的表达,命题(原命题、逆命题、否命题、逆否命题)之间的关系,以及命题成立的条件(如充分条件、必要条件、充要条件),都离不开逻辑用语.

在日常生活中,为了使表达更加准确、清楚、简洁,我们常常要用一些逻辑用语. 因此,正确地使用逻辑用语是现代公民应具备的基本素质. 无论是进行思考交流,还是从事各项工作,都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维,使得思维清晰明了,说理有据. 学习利用这些逻辑用语准确地表达数学内容,同时体会逻辑用语在表述和论证中的作用,从而更好地进行交流(无论是在数学上还是在日常生活中).

在本模块中,考虑的命题是指明确地给出条件和结论的命题,对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求作一般性的了解. 这些内容刚刚学习时是非常困难和难以理解的,但是所有这些内容在同学们经历了一段时间的学习,有了数学上具体命题的积累后,对这些问题的理解就不成为问题了. 因此,本模块中重点是要求关注四种命题的相互关系和命题的必要条件、充分条件、充要条件,并在今后的使用过程中加深理解.

对于逻辑联结词“或”“且”“非”的含义,主要的目的是学会用这些逻辑联结词有效地表达相关的数学内容.

3. 圆锥曲线在数学上是一个非常重要的几何模型,有很多非常好的几何性质,这些重要的几何性质在日常生活、社会生产及其他科学中都有着重要而广泛的应用,所以学习这部分内容对于提高自身的素质是非常重要的.

高中阶段对圆锥曲线的学习,主要是结合已学过的曲线及其方程的实例,了解曲线与方程的对应关系,进一步体会数形结合

的思想。同时，在本模块中，在必修阶段学习平面解析几何初步的基础上，将学习圆锥曲线与方程，了解圆锥曲线与二次方程的关系，掌握圆锥曲线的基本几何性质，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用。圆锥曲线本身有一些很深奥的性质（如光学性质、行星运行轨道的性质等），其中有一些是圆锥曲线最基本的性质。

4. 空间向量为处理立体几何问题提供了新的视角。空间向量的引入，为解决三维空间中图形的位置关系与度量问题提供了一个十分有效的工具。

向量是一个重要的代数研究对象。引入向量运算，使数学的运算对象发生了一个重大跳跃：从数、字母与代数式到向量，运算也从一元到多元。向量又是一个几何的对象，向量本身有方向，有方向就有角度与长度，能刻画直线、平面、切线的有关性质。点乘与图形的面积、体积有着直接的关系。向量是沟通代数与几何的一个桥梁，用向量来解决问题可以看到代数问题的几何背景。向量是一个重要的数学与物理模型。许多几何量和物理量用向量表达比较简洁，处理起来也比较方便，比如方向、夹角、功、力的运算等。在数学上，它本身也是一个重要的研究对象。

在本模块中，将在学习平面向量的基础上，把平面向量及其运算推广到空间，运用空间向量解决有关直线、平面位置关系的问题，体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想象能力和几何直观能力。这些也为进一步学习向量和研究向量奠定了一定的基础。

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题



新知预习

1. 一般地,我们把用_____、_____或_____表达的,可以判断_____的_____叫做命题.
2. 判断为_____的语句叫做真命题. 判断为_____的语句叫做假命题.
3. 在数学中,“若 p 则 q ”是命题的常见形式,其中 p 叫做命题的_____, q 叫做命题的_____.

基础示例

1. 下列语句中是命题的个数是 _____ ()
- ①地球上的四大洋 ② $-5 \in \mathbf{Z}$ ③ $\pi \notin \mathbf{R}$ ④“我国的小河流”可以组成一个集合
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 有下列命题:①面积相等的三角形是全等三角形;②“若 $xy=0$,则 $|x|+|y|=0$ ”;③若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;④矩形的对角线互相垂直. 其中真命题共有 _____ ()
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



重难突破

1. 命题的判断

要判断一个语句是否是命题,首先看给出的句型,一般地,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题,例如疑问句“ π 是无理数吗?”,祈使句“求证 $\sqrt{2}$ 是无理数”,感叹句“向抗洪英雄学习!”,就不是命题,因为这些语句都不涉及真假或不能区分真假,所以不是命题. 反问句形式上是问句,实际上并无疑问,而是用反问的形式表达了对事物情况的判定,因此有的反问句能区分真假,如“难道矩形不是平行四边形吗?”就间接地表达了“矩形也是平行四边形”这样一个判断,因而它是命题. 其次要看能否判断句子的真假,不能判断真假就不是命题,如“这是一棵大树,”因为“大树”没有标准,无法判断其真假,因此不是命题. 其实,命题一般为一陈述句,并且一般由条件和

活学巧用

- 【例1】** 下列语句中命题的个数是 _____ ()
- ①地球是太阳的一颗行星 ② $0 \in \mathbf{N}$ ③老年人组成一个集合 ④ $|x+a|$
- ⑤ $x>3$
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 解析:** ①②③是命题.
- 答案:** C
- 【例2】** 判断下列语句中哪些是命题,是真命题还是假命题?
- (1)末位是0的整数能被5整除.
- (2)平行四边形的对角线相等且互相平分.
- (3)两直线平行则斜率相等.
- (4) $\triangle ABC$ 中,若 $\angle A = \angle B$,则 $\sin A = \sin B$.
- (5)余弦函数是周期函数吗?
- 答案:** (1)是命题,真命题. (2)是命题,假命题. (3)是命题,假命题. (4)是命题,真命题. (5)不是命题.
- 【例3】** 设 A, B 为两个集合,下列四个命题:① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$,有 $x \in B$; ② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$; ④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$,使得 $x \notin B$,其

结论两部分组成,条件是已知事项,结论是由已知事项推出的事项.所谓命题是对客观存在事物的肯定或否定的思维形式.陈述句是否为命题,关键在于能否判断其真假,也就是能否判断其是否成立,不能判断真假的陈述句就不是命题.再例如“很多的人”不能构成一个命题.因为该语句中的词语没有清晰的界限,这一点和集合中元素的确定性相类似.特别地,如“在2020年前,将有人登上火星;歌德巴赫猜想.”等类似的语句.虽然目前还不能确定它们的真假,但随着科学技术的发展和科学技术的进步,总能确定它们的真假,因此它们也是命题.也就是说一个语句能否成为命题,应该是绝对的,而不是相对的,能否判断其真假不能因人、因地、因时而发生改变.

2. 判断命题的真假

(1)命题中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

(2)对于命题真假的判断还可根据已学过的定义、定理、公理、法则、公式、事实等判断其真假,也可通过反例判断其真假.

3. 把命题改写“若 p 则 q ”的形式

数学中有一些命题虽然表面上不是“若 p ,则 q ”的形式,但是我们可以把它的表述作适当改变,就可写成“若 p ,则 q ”的形式了,这样它的条件和结论就非常清楚了.

中真命题的序号是_____.(把符合要求的命题的序号都填上)

解析:依据 $A \subseteq B$ 的定义.

答案:④

【例4】下列语句中是命题的有_____,其中是真命题的有_____.(写出序号)

- ①“等边三角形难道不是等腰三角形吗?”;
- ②“垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?”;
- ③“一个数不是正数就是负数”;
- ④“大角所对的边大于小角所对的边”;
- ⑤“ $x+y$ 为有理数,则 x, y 也都是有理数”;
- ⑥“作 $\triangle ABC \cap \triangle A'B'C'$ ”.

解析:①通过反义疑问句,对等边三角形是等腰三角形作出判断,是真命题;

②疑问句.没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断,不是命题;

③是假命题.数0既不是正数也不是负数;

④是假命题.没有考虑到“在两个三角形中”的情况;

⑤是假命题.如 $x=\sqrt{3}, y=-\sqrt{3}$;

⑥祈使句.不是命题.

答案:①③④⑤ ①

【例5】已知 $p: x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根, $q: 4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根,若 p, q 一真一假,求 m 的取值范围.

解:若 p 真,则 $\Delta_1 = m^2 - 4 > 0$ 且 $m > 0$,即 $m > 2$;

若 q 真,则 $\Delta_2 = 16(m-2)^2 - 16 < 0$,即 $1 < m < 3$;

若 p 真 q 假,则 $m > 2$ 且 $m \leq 1$ 或 $m \geq 3$,即 $m \geq 3$;

若 p 假 q 真,则 $m \leq 2$ 且 $1 < m < 3$,即 $1 < m \leq 2$.

综上, $\{m | 1 < m \leq 2 \text{ 或 } m \geq 3\}$.



主动成长



1 下列语句中不是命题的是 ()

- A. 台湾是中国的 B. 两军相遇勇者胜
C. 学海无涯苦作舟 D. 连结 A, B 两点

2 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面,且 $a \perp \alpha, b \perp \beta$,则下列命题中的假命题是 ()

- A. 若 $a \parallel b$,则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $a \perp \beta$,则 $a \perp b$
C. 若 a, b 相交,则 α, β 相交 D. 若 α, β 相交,则 a, b 相交

3 下列命题是假命题的是 ()

- A. 若 $a \cdot b = 0$,则 $a \perp b$ B. 若 $|a| = |b|$,则 $a = b$
C. 若 $ac^2 > bc^2$,则 $a > b$ D. $5 > 3$

4 设 U 为全集,下面三个命题中真命题的个数是 ... ()

- ①若 $A \cap B = \emptyset$,则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = U$ ②若 $A \cup B = U$,
则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \emptyset$ ③若 $A \cup B = \emptyset$,则 $A = B = \emptyset$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5 设 a, b, c 是任意的非零平面向量,且相互不共线,则① $(a \cdot b)c = (c \cdot a)b$;② $|a| - |b| < |a - b|$;③ $(b \cdot c)a - (c \cdot a)b$ 不与 c 垂直;④ $(3a + 2b) \cdot (3a - 2b) = 9|a|^2 - 4|b|^2$ 中,是真命题的有 ()

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ②④

6 有下列四个命题:

- ①若 $x + y = 0$,则 x, y 互为相反数;
②全等三角形面积相等;
③若 $q \leq 1$,则 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实数解;
④2 是合数.

其中真命题是_____ (填上正确命题的所有序号).

7 设 A, B 为两个集合,下列四个命题:① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A, x \notin B$;② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$;④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$,使得 $x \notin B$,其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)

8 将下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式,并判断其真假.

- (1)正 n 边形 ($n \geq 3$) 的 n 个内角全相等;

- (2)末位数字是 0 或 5 的整数,能被 5 整除;
 (3)方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 有两个实根.

9 判断下列语句是不是命题,如果是命题,指出是真命题还是假命题.

- (1)任何负数都大于零;
 (2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 是全等三角形;
 (3) $x^2 + x > 0$;
 (4) $\emptyset \subseteq A$;
 (5)6 是方程 $(x-5)(x-6)=0$ 的解;
 (6)方程 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 无解.

10 判断下列语句是不是命题,并指出命题的真假.

- (1)“矩形难道不是平行四边形吗?”
 (2)垂直于同一条直线的两条直线必平行;
 (3)大角所对的边大于小角所对的边;
 (4)我明天学习“简易逻辑”.



走近高考

11 2005 浙江高考,6 设 α, β 为两个不同的平面, l, m 为两条不同的直线,且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$. 有如下两个命题:①若 $\alpha // \beta$, 即 $l // m$;②若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$, 那么 ()

- A. ①是真命题,②是假命题
 B. ①是假命题,②是真命题
 C. ①②都是真命题
 D. ①②都是假命题

12 2005 山东高考,16 已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不重合的平面,给出下列命题:

① $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m // n$; ② 若 $m, n \subset \alpha, m // \beta, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$; ③ 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m // n$, 则 $\alpha // \beta$; ④ m, n 是两条异面直线,若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$ 上面命题中,真命题的序号是 _____ (写出所有真命题的序号).

13 2005 上海春季高考,9 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{Z}^+)$, 关于数列 $\{a_n\}$ 有下列三个命题:①若 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列,则 $a_n = a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^+)$; ②若 $S_n = an^2 + bn (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\{a_n\}$ 为等差数列; ③若 $S_n = 1 - (-1)^n$ 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

这些命题中正确命题的序号是 _____.

14 2005 福建高考,16 把下面不完整的命题补充完整,并使之成为真命题. 若函数 $f(x) = 3 + \log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 _____ 对称, 则函数 $g(x) =$ _____.

(注:填上你认为可以成为真命题的一种情形即可. 不必考虑所有可能的情形).



重难突破

1. 四种命题

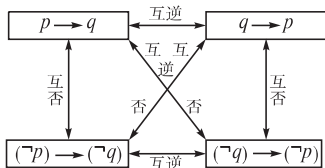
(1)原命题:它是相对其他三种命题而言人为指定的命题,不是固定不变的,可以把任意一个命题看成原命题,进而研究它的其他形式.

(2)逆命题:把原命题的条件作为结论,而原命题的结论作为条件,得到的命题称为原命题的逆命题.

(3)否命题:将原命题中的条件和结论同时加以否定后得到的命题称为原命题的否命题.

(4)逆否命题:将原命题的条件加以否定,作为结论,而原命题的结论加以否定作为条件得到的新命题称为原命题的逆否命题.

2. 四种命题的关系



解释:互否:“若 p 则 q ”是“若 $\neg p$ 则 $\neg q$ ”的否命题. “若 $\neg p$ 则 $\neg q$ ”是“若 p 则 q ”的否命题.

其他情况可类推.

3. 命题 $p \rightarrow q$ 是由条件 p 及结论 q 组成的,对 q 进行“换位”和“换质”后,可构成四种不同形式的命题.

(1)原命题: $p \rightarrow q$;

(2)条件和结论“换位”得: $q \rightarrow p$,此为原命题的逆命题;

(3)条件和结论“换质”(分别否定)得: $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$,此为原命题的否命题;

(4)条件和结论“换位”又“换质”得: $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$,此为原命题的逆否命题.

在学习过程中,要注意条件 p 、 q 的位置变化,另外要注意对逆命题与否命题之间的联系与区别,切不可把两者混为一谈.

4. 四种命题的真假判断

(1)原命题为真,它的逆命题可以为真,也可以为假.

(2)原命题为真,它的否命题可以为真,也可以为假.

(3)原命题为真,它的逆否命题一定为真.

(4)互为逆否的命题是等价命题,它们同真同假,同一个命题的逆命题和否命题是一对互为逆否的命题,所以它们同真同假.也是真假命题判断的重要

活学巧用

【例1】把下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式,并写出它的否命题和逆否命题,最后判断所有命题的真假.

(1) $ac > bc \Rightarrow a > b$;

(2)已知 x, y 为正整数,当 $y = x + 1$ 时, $y = 3, x = 2$;

(3)当 $m > \frac{1}{4}$ 时, $mx^2 - x + 1 = 0$ 无实根;

(4)当 $abc = 0$ 时, $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$;

(5)若 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 则 $x = 3$ 或 $x = -1$.

解:(1)原命题:若 $ac > bc$, 则 $a > b$. (假)

否命题:若 $ac \leq bc$, 则 $a \leq b$. (假)

逆否命题:若 $a \leq b$, 则 $ac \leq bc$. (假)

(2)原命题:已知 x, y 为正整数,若 $y = x + 1$, 则 $y = 3$ 且 $x = 2$. (假)

否命题:已知 x, y 为正整数,若 $y \neq x + 1$, 则 $y \neq 3$ 或 $x \neq 2$. (假)

逆否命题:已知 x, y 为正整数,若 $y \neq 3$ 或 $x \neq 2$, 则 $y \neq x + 1$. (假)

(3)原命题:若 $m > \frac{1}{4}$, 则 $mx^2 - x + 1 = 0$ 无实根. (真)

否命题:若 $m \leq \frac{1}{4}$, 则 $mx^2 - x + 1 = 0$ 有实根. (真)

逆否命题:若 $mx^2 - x + 1 = 0$ 有实根, 则 $m \leq \frac{1}{4}$. (真)

(4)原命题:若 $abc = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$. (真)

否命题:若 $abc \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$. (真)

逆否命题:若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 且 $c \neq 0$, 则 $abc \neq 0$. (真)

(5)原命题:若 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 则 $x = 3$ 或 $x = -1$. (真)

否命题:若 $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, 则 $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$. (真)

逆否命题:若 $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$, 则 $x^2 - 2x - 3 \neq 0$. (真)

点评:在判断命题的真假性时,应充分利用原命题与逆否命题,逆命题和否命题是等价的这一知识.

【例2】写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若 $x + y < 5$, 则 $x < 2$ 或 $y < 3$.

(2)命题:“已知 a, b, c, d 是实数,若 $a = b, c = d$, 则 $a + c = b + d$ ”.

分析:利用四种命题的定义.

解:(1)逆命题:若 $x < 2$ 或 $y < 3$, 则 $x + y < 5$, 假命题.

否命题:若 $x + y \geq 5$, 则 $x \geq 2$ 且 $y \geq 3$, 假命题.

逆否命题:若 $x \geq 2$ 且 $y \geq 3$, 则 $x + y \geq 5$, 真命题.

(2)逆命题:已知 a, b, c, d 是实数,若 $a + c = b + d$, 则 $a = b, c = d$;

否命题:已知 a, b, c, d 是实数,若 a 与 b, c 与 d 不都相等, 则 $a + c \neq b + d$;

逆否命题:已知 a, b, c, d 是实数,若 $a + c \neq b + d$, 则 a 与 b, c 与

结论.

综合上述四条可知,在同一个命题的四种命题中,真命题的个数要么是 0 个,要么是 2 个,要么是 4 个.

5. 以下几种形式的命题常用反证法证明

(1) 某些命题的结论是否定形式,如不是、不能、不存在等;

(2) 某些命题的结论以至少、至多、唯一等形式出现;

(3) 某些命题的结论的反面非常明显或结论的反面容易证明;

(4) 某些命题的直接证法较困难,有些命题,虽然其表面似乎不是以上形式,但本质上仍属以上形式,或很容易化归为以上形式的命题均可用反证法证明.

6. 运用反证法证明时,最后得出矛盾,一般有三种:一是与原命题的已知条件矛盾;二是与自身矛盾;三是与另一个已知的真命题矛盾.

d 不都相等

由四种命题之间的关系,因为原命题正确,所以逆否命题正确,因为逆命题为假,所以否命题为假.

点评:原命题与它的逆否命题真、假相同,原命题的逆命题与它的否命题真、假相同,所以只要判断原命题与它的逆命题的真、假,就可得到原命题的逆否命题与否命题的真、假了,反之亦然.

【例3】若 a, b, c 均为实数,且 $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}$, $b = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}$, $c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$, 求证: a, b, c 中至少有一个大于 0.

分析:利用反证法证明.

证明:(反证法)假设 a, b, c 都不大于 0,

即 $a \leq 0, b \leq 0, c \leq 0$, 则 $a + b + c \leq 0$,

而 $a + b + c = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2} + y^2 - 2z + \frac{\pi}{3} + z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$
 $= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + \pi - 3$.

$\because \pi - 3 > 0$, 且 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$,

$\therefore a + b + c > 0$. 这与 $a + b + c \leq 0$ 矛盾,

因此 a, b, c 中至少有一个大于 0.

点评:含有“至多、至少”类型的命题常用反证法证明.



- 当命题“若 p 则 q ”为真时,下列命题中一定正确的是 ()
 A. 若 q 则 p B. 若 $\neg p$ 则 $\neg q$
 C. 若 $\neg q$ 则 $\neg p$ D. p 且 q
- 有下列四个命题,其中真命题是 ()
 ①“若 $xy=1$,则 x, y 互为倒数”的逆命题 ②“相似三角形的周长相等”的否命题
 ③“若 $b \leq -1$,则方程 $x^2 - 2bx + b^2 + b = 0$ 有实根”的逆否命题 ④“若 $A \cup B = B$,则 $A \supseteq B$ ”的逆否命题
 A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ②④
- 有下列四个命题:①“若 $x+y=0$,则 x, y 互为相反数”的逆命题;②“若 $a > b$,则 $a^2 > b^2$ ”的逆否命题;③“若 $x \leq -3$,则 $x^2 + x - 6 > 0$ ”的否命题;④“若 a^b 是无理数,则 a, b 是无理数”的逆命题. 其中真命题的个数是 ()
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- “若 $x, y \in \mathbf{R}$,且 $x^2 + y^2 = 0$,则 x, y 全为 0”的否命题是 ...
 ()
 A. 若 $x, y \in \mathbf{R}$,且 $x^2 + y^2 \neq 0$,则 x, y 全不为 0
 B. 若 $x, y \in \mathbf{R}$,且 $x^2 + y^2 \neq 0$,则 x, y 不全为 0
 C. 若 $x, y \in \mathbf{R}$,且 x, y 全为 0,则 $x^2 + y^2 = 0$
 D. 若 $x, y \in \mathbf{R}$,且 $xy \neq 0$,则 $x^2 + y^2 \neq 0$
- 给定下列命题:①“若 $k > 0$,则方程 $x^2 + 2x - k = 0$ ”有实根;
 ②“若 $a > b$,则 $a + c > b + c$ ”的否命题;③“矩形的对角线相

等”的逆命题;④“若 $xy=0$,则 x, y 中至少有一个为 0”的否命题.

其中真命题的序号是 _____.

- 用反证法证明命题“若整数 n 的立方是偶数,则 n 也是偶数”如下:假设 n 是奇数,则 $n = 2k + 1$ (k 是整数), $n^3 = (2k+1)^3 =$ _____ 与已知 n^3 是偶数矛盾,所以 n 是偶数.
- (1) 命题“末位是 2 的整数一定是偶数”的逆命题是“_____”.
- (2) 命题“整数是有理数”的否命题是“_____”.
- (3) 命题“到一个角的两边距离不相等的点不在该角的平分线上”的逆否命题是“_____”.
- 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.
 (1) 若 $q < 1$,则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根;
 (2) 若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$;
 (3) 若 $x^2 + y^2 = 0$,则 x, y 全为零.
 (4) 如果两圆外切,那么圆心距等于两圆半径之和;
 (5) 奇数不能被 2 整除.

- 9 把命题“当 $x=2$ 时, $x^2-3x+2=0$ ”写成“若 p 则 q ”的形式,并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题,并判断真假.

- 10 如果一条直线和两条平行线中的一条是异面直线,且不与另一条直线相交,那么这条直线与另一条直线也是异面直线.



- 11 2006 丰台 1 月模拟,3 给出命题:“已知 a, b, c, d 是实数,若 $a \neq b$ 且 $c \neq d$,则 $a+c \neq b+d$ ”.对原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言,其中的真命题有 ()
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 4 个
- 12 2005 山东潍坊模拟,6 下列命题中,不是真命题的为 ...
..... ()
A. “若 $b^2-4ac>0$,则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根”的逆否命题
B. “四边相等的四边形是正方形”的逆命题
C. “ $x^2=9$,则 $x=3$ ”的否命题
D. “对顶角相等”的逆命题
- 13 2005 北京宣武模拟,6 已知 A 表示点, a, b, c 表示直线, M, N 表示平面,给出下列命题:① $a \perp M, b \not\subset M$,若 $b \parallel M$,则 $b \perp a$;② $a \perp M$ 若 $a \perp N$,则 $M \parallel N$;③ $a \subset M, b \cap M = A, c$ 为 b 在 M 上的射影,若 $a \perp c$,则 $a \perp b$;④ $a \perp M$,若 $b \parallel M, c \parallel a$,则 $a \perp b, c \perp b$.
其中逆命题正确的是 ()
A. ①与④ B. ③与④
C. ①②③ D. ①②③④
- 14 2005 江苏模拟,16 在空间中,①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.以上两个命题中,逆命题为真命题的是 (把符合要求的命题的序号都填上)

1.2 充分条件与必要条件



新知预习

1. 一般地,“若 p 则 q ”为真命题,即由 $p \Rightarrow q$ 就说 p 是 q 的 _____ (sufficient condition), q 是 p 的 _____ (necessary condition).

2. 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$ 则 $p \Leftrightarrow q$ 就说 p 是 q 的 _____,简称充要条件.那么 q 也是 p 的 _____.

基础示例

1. 设 $x \in \mathbf{R}$,则 $x > 2$ 的一个必要不充分条件是 ()
A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x > 3$ D. $x < 3$
2. 如果 A 是 B 的必要不充分条件, B 是 C 的充分必要条件, D 是 C 的充分不必要条件,那么 A 是 D 的 ()
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



重难突破

1. 学习本节内容,四种命题的形式是基础,因为条件的充分性和必要性和命题的四种形式有着密切的联系.在处理充分、必要条件问题时,首先应分清条件和结论,然后才能进行推理和判断.

2. (1) 充分条件与必要条件.

当“若 p 则 q ”形式的命题为真时,就记作 $p \Rightarrow q$,称 p 是 q 的充分条件,同时称 q 为 p 的必要条件.

事实上, p 是 q 的充分条件,就是条件 p 足以能保证结论 q 成立;这种情况下,也可以理解为:条件 p 成立,必须 q 成立,说明对 p 来说, q 是必要的,所以 q 是 p 的必要条件.

(2) 充要条件.

如果既有 $p \Rightarrow q$,又有 $q \Rightarrow p$,则可以记作 $p \Leftrightarrow q$,这时称 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

根据充分条件和必要条件的定义, p 是 q 的充分必要条件说明: p 既是 q 的充分条件,又是 q 的必要条件.而且当 p 是 q 的充要条件时,根据对称性, q 也同时是 p 的充要条件,符号“ $\Leftrightarrow$ ”叫做等价符号.

3. 命题 A 和 B (有时也称题设 A 和 B) 的条件关系通常有四类.

(1) 充分不必要条件:若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$,则称 A 为 B 的充分不必要条件.

(2) 必要不充分条件:若 $A \nRightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$,则称 A 是 B 的必要而不充分条件,即常说的“有它不一定行,而没它肯定不行”.

(3) 充要条件: $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$,则称 A 为 B 的充分必要条件,同时, B 也是 A 的充要条件.

(4) 既不充分也不必要条件: $A \nRightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$,则 A 既不是 B 的充分条件也不是 B 的必要条件.

注意:通常要说明的条件关系一般是指这四种,但有时可能会出现只填“充分条件”或“必要条件”.

4. 判断命题的充要关系有三种方法:

(1) 定义法.

(2) 等价法,即利用 $A \Rightarrow B$ 与 $\neg B \Rightarrow \neg A$; $B \Rightarrow A$ 与 $\neg A \Rightarrow \neg B$; $A \Leftrightarrow B$ 与 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ 的等价关系,对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题,一般运用等价法.

(3) 利用集合间的包含关系判断,若 $A \subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件;若 $A = B$,则 A 是 B 的充要条件.

5. 确定条件为不充分或不必要的条件时,常用

活学巧用

【例1】在下列各题中,判断 A 是 B 的什么条件,并说明理由.

(1) $A: |p| \geq 2, p \in \mathbf{R}, B: \text{方程 } x^2 + px + p + 3 = 0 \text{ 有实根};$

(2) $A: \text{圆 } x^2 + y^2 = r^2 \text{ 与直线 } ax + by + c = 0 \text{ 相切}, B: c^2 = (a^2 + b^2)r^2.$

解: (1) 当 $|p| \geq 2$ 时,例如 $p = 3$,则方程 $x^2 + 3x + 6 = 0$ 无实根,而方程 $x^2 + px + p + 3 = 0$ 有实根,必有 $p \leq -2$ 或 $p \geq 6$,可推出 $|p| \geq 2$,故 A 是 B 的必要不充分条件.

(2) 若圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 与直线 $ax + by + c = 0$ 相切,圆心到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离等于 r ,即 $r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,所以 $c^2 = (a^2 + b^2)r^2$;

反过来,若 $c^2 = (a^2 + b^2)r^2$,则 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$ 成立,说明 $x^2 + y^2 = r^2$ 的圆心 $(0, 0)$ 到直线 $ax + by + c = 0$ 的距离等于 r ,即圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 与直线 $ax + by + c = 0$ 相切,故 A 是 B 的充分必要条件.

点评:对于涉及充分必要条件判断的问题,必须以准确、完整地理解充分、必要条件的概念为基础,有些问题需转化为等价命题后才容易判断.

【例2】已知 $ab \neq 0$,求证: $a + b = 1$ 的充要条件是 $a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0$.

证明:先证必要性.

$\because a + b = 1$,即 $b = 1 - a$,

$\therefore a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = a^3 + (1 - a)^3 + a(1 - a) - a^2 - (1 - a)^2 = a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3 + a - a^2 - a^2 - 1 + 2a - a^2 = 0$.

再证充分性.

$\because a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0$,即

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) = 0$,

$\therefore (a + b - 1)(a^2 - ab + b^2) = 0$.

由 $ab \neq 0$,即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$,

$\therefore a^2 - ab + b^2 \neq 0$,只有 $a + b = 1$.

综上所述,当 $ab \neq 0$ 时, $a + b = 1$ 的充要条件是 $a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0$.

【例3】已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件,那么:(1) s 是 q 的什么条件? (2) r 是 q 的什么条件? (3) p 是 q 的什么条件?

分析:将已知 r, p, q, s 的关系作一个“ $\Rightarrow$ ”图(如右图).

解: (1) 由图知: $\because q \Rightarrow s, s \Rightarrow r \Rightarrow q$.

$\therefore s$ 是 q 的充要条件.

(2) $\because r \Rightarrow q, q \Rightarrow s \Rightarrow r$,

$\therefore r$ 是 q 的充要条件.

(3) $\because q \Rightarrow s \Rightarrow r \Rightarrow p, \therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

点评:“ $\Rightarrow$ ”在解决较多个条件的问题时经常用到,要细心体会.

【例4】2005 山东高考,10 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集,则 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的 ()
A. 充分不必要条件



构造反例的方法说明.

6. 充要条件的传递性.

若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D$, 则 $A \Rightarrow D$, 即 A 是 D 的充分条件, 利用这一结论可研究多个命题之间的充要关系.

7. 证明充要性.

证明 p 是 q 的充要条件, 既要证明命题“ $p \Rightarrow q$ ”为真, 又要证明命题“ $q \Rightarrow p$ ”为真, 前者证明的是充分性, 后者证明的是必要性.

8. 从集合 A 与集合 B 之间的关系上看待充要条件.

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的充分条件;

(2) 若 $A \supseteq B$, 则 A 是 B 的必要条件;

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$, 即 $A = B$, 则 A 是 B 的充要条件;

(4) 若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$, 则 A 既不是 B 的充分条件, 也不是 B 的必要条件;

(5) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$, 则 A 是 B 的充分不必要条件;

(6) 若 $A \supseteq B$ 且 $A \not\subseteq B$, 则 A 是 B 的必要不充分条件.

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 即不充分也不必要条件

分析: 本题考查集合间的运算关系, 解此类问题通常用韦恩图较简洁, 但要注意考查一般情况和特殊情况是否均成立.

解析: 由 $A \subseteq B$ 利用韦恩图得 $(\complement_U A) \cup B = U$, 故 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的充分条件, 而 $A = B$ 时 $(\complement_U A) \cup B = U$, 故 $A \subseteq B$ 不是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的必要条件, 故选 A.

答案: A

【例5】已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

解: $p: -2 \leq x \leq 10$.

由 q 可得 $(x-1)^2 \leq m^2 (m > 0)$,

$\therefore 1-m \leq x \leq 1+m$.

$\therefore \neg p: x > 10$ 或 $x < -2, \neg q: x > 1+m$ 或 $x < 1-m$.

$\therefore \neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,

$\therefore \neg q \Rightarrow \neg p$.

故只需满足 $\begin{cases} 1+m \geq 10, \\ 1-m \leq -2. \end{cases}$

所以 $m \geq 9$.

点评: 解决这类问题时, 一是直接求解; 二是转化为等价命题求解, 即 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件等价于 q 是 p 的充分不必要条件.



主动成长



夯基达标

1. $x^2 + (y-2)^2 = 0$ 是 $x(y-2) = 0$ 的 ()

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 对任意实数 a, b, c , 在下列命题中, 真命题是 ()

- A. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件
B. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件
C. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件
D. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件

3. “ $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ ”的 ()

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x) = x|x+a| + b$ 是奇函数的充要条件是 ()

- A. $ab = 0$ B. $a + b = 0$
C. $a = b$ D. $a^2 + b^2 = 0$

5. 函数 $y = x^2 + bx + c, x \in [0, +\infty)$ 是单调函数的充要条件是 ()

- A. $b \geq 0$ B. $b \leq 0$
C. $b > 0$ D. $b < 0$

6. 从“ $\Rightarrow$ ”“ $\nRightarrow$ ”与“ $\Leftrightarrow$ ”中选出适当的符号填空 (U 为全集, A, B 为 U 的子集):

(1) $A = B$ _____ $A \subseteq B$;

(2) $A \subseteq B$ _____ $\complement_U B \subseteq \complement_U A$.

7. 从“充分条件”“必要条件”中选出适当的一种填空:

(1) “ $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实根”是“ $ac < 0$ ”的 _____;

(2) “ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ”是“ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ”的 _____.

8. 设 p, r 都是 q 的充分条件, s 是 q 的充分必要条件, t 是 s 的必要条件, t 是 r 的充分条件, 那么 p 是 t 的 _____ 条件, r 是 t 的 _____ 条件.

9. 设 $p: -2 < m < 0, 0 < n < 1; q$: 关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于 1 的正根, 试分析 p 是 q 的什么条件.

- 10 求证:关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个负实根的充要条件是 $m \geq 2$.



- 11 2006 浙江高考,7 “ $a > 0, b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 12 2006 湖南高考,4 “ $a = 1$ ”是“函数 $f(x) = |x - a|$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

- 13 2006 山东高考理,8 设 $p: x^2 - x - 20 > 0, q: \frac{1-x^2}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

- 14 2005 湖北高考,2 对任意实数 a, b, c 给出下列命题:

- ① “ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充要条件;
 ② “ $a + 5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件;
 ③ “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件;
 ④ “ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件.

- 其中真命题的个数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1.3 简单的逻辑联结词

1.3.1 ~ 1.3.2 “且”与“或”



1. “或”“且”叫做.....
 2. p 且 q 就是用联结词“.....”把命题 p 和命题 q 联结起来,得到的新命题,记作.....
 3. p 或 q 就是用联结词“.....”把命题 p 和命题 q 联结起来,得到的新命题,记作.....
 4. 命题真值表
 (1) p 且 q 形式复合

p	q	p 且 q
真	真	
真	假	假
假	真	假
假	假	

(2) p 或 q 形式复合

p	q	p 或 q
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	假



1. 以下判断中正确的是 ()
 A. 命题 p 是真命题时,命题“ $p \wedge q$ ”一定是真命题
 B. 命题“ $p \wedge q$ ”为真命题时,命题 p 一定是真命题
 C. 命题“ $p \wedge q$ ”为假命题时,命题 p 一定是假命题
 D. 命题 p 是假命题时,命题“ $p \wedge q$ ”不一定是假命题
2. 如果命题“ p 或 q ”是真命题,那么 ()
 A. 命题“ p ”与命题“ q ”都是真命题
 B. 命题“ p ”与命题“ q ”同为真命题或同为假命题
 C. 命题“ p ”与命题“ q ”只有一个真命题
 D. 命题“ p ”与命题“ q ”至少有一个真命题
3. 命题“方程 $|x| = 1$ 的解是 $x = \pm 1$ ”中,使用逻辑词的情况是 ()
 A. 没有使用逻辑联结词
 B. 使用了逻辑联结词“或”
 C. 使用了逻辑联结词“且”
 D. 使用了逻辑联结词“或”与“且”
4. 若把命题“ $A \subseteq B$ ”看成一个复合命题,那么复合命题的形式是, 其中构成它的两个简单命题分别是



1. 正确理解“且”或“或”

(1)“或”在逻辑学上称之为可兼析取词,来源于生活用语“或”,但又高于生活用语,它蕴涵了更加严格的意义.

例如,生活中“向东或向西”,指其中一个,具有排斥意义,不是向东就是向西,而数学中的“或”具有“或此或彼或兼有”三种情形,例如,数学中的“ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”,具有三层意思:① $x \in A$ 但 $x \notin B$;② $x \in B$ 但 $x \notin A$;③ $x \in A$ 且 $x \in B$,这三种中的一种成立,我们就说 $x \in A \cup B$ 成立,但是注意,“可兼有”并不意味着“一定兼有”.

(2)“且”在逻辑学上是联结判断的联结词,与生活用语中的“且”基本一致,表示而且的意思.

2. 简单命题与复合命题的判断

一个命题是简单命题还是复合命题,不能只从字面上看有没有“或”“且”,如“等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合”,此命题字面上无“且”,但可写成“等腰三角形的顶角平分线既是底边上的中线又是底边上的高线”,所以它是复合命题.

3. 复合命题“ $p \wedge q$ ”“ $p \vee q$ ”的真假判断

判断“ $p \wedge q$ ”“ $p \vee q$ ”命题的真假,主要利用真值表来判断,其步骤是:

- (1)确定命题的构成形式;
- (2)判断其中各命题的真假;
- (3)利用真值表(见下表)判断“ $p \wedge q$ ”“ $p \vee q$ ”命题的真假.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	假	真
假	假	假	假

从上面的真值表中可看出,当 p 与 q 都为真时,“ $p \wedge q$ ”形式的命题才为真,其他情形都为假;当 p 与 q 都为假时,“ $p \vee q$ ”形式的命题才为假,其他情形都为真.



【例1】分别指出下列复合命题的形式及构成的简单命题:

- (1)李明是老师,赵山也是老师;
- (2)1 是合数或质数;
- (3)他是运动员兼教练员;
- (4)不仅这些文学作品艺术上有缺点,而且政治上也有错误.

解:(1)这个命题是“ $p \wedge q$ ”的形式,其中 p :李明是老师, q :赵山是老师.

(2)这个命题是“ $p \vee q$ ”的形式,其中 p :1 是合数, q :1 是质数.

(3)这个命题是“ $p \wedge q$ ”的形式,其中 p :他是运动员, q :他是教练员.

(4)这个命题是“ $p \wedge q$ ”的形式,其中 p :这些文学作品艺术上有缺点, q :这些文学作品政治上有错误.

点评:正确理解逻辑联结词“或”“且”的含义是解题的关键,应根据组成上述各复合命题的语句中所出现的逻辑联结词或语句的意义确定复合命题的形式.

【例2】已知 $a > 0, a \neq 1$, 设 P : 函数 $y = \log_a(x+1)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 内单调递减; Q : 曲线 $y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴交于不同的两点, 如果 P 和 Q 有且只有一个正确, 求 a 的取值范围.

解:当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减. 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 内不是单调递减; 曲线 $y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴交于两点等价于 $(2a-3)^2 - 4 > 0$, 即 $a < \frac{1}{2}$ 或 $a > \frac{5}{2}$.

(1)若 P 正确, 且 Q 不正确, 即函数 $y = \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 曲线 $y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴不交于两点, 因此 $a \in (0, 1) \cap [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{5}{2}]$, 即 $a \in [\frac{1}{2}, 1)$.

(2)若 P 不正确, 且 Q 正确, 即函数 $y = \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 内不是单调递减, 曲线 $y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴交于两点, 因此 $a \in (1, +\infty) \cap ((0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty))$, 即 $a \in (\frac{5}{2}, +\infty)$.

综上, a 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$.

点评: 本题考查对数函数与二次函数的单调性及简易逻辑等, 还考查了分类讨论的思想方法.



主动成长



夯基达标

1 命题“存在实数 x , 使 $|x+1| \leq 0$, 且 $x^2 < 4$ ”是 ()

- A. “ p 或 q ”的形式
- B. 没有任何形式
- C. 真命题
- D. 假命题

2 下列命题, 其中假命题的个数为 ()

- ① $5 > 4$, 或 $4 > 5$ ② $9 \geq 3$ ③ 命题“若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$ ”
- ④ 命题“菱形的两条对角线互相垂直”
- A. 0 个 B. 1 个
- C. 2 个 D. 3 个

3 分别用“ $p \vee q$ ”“ $p \wedge q$ ”填空.

- (1) 命题“集合 $A \supsetneq B$ ”是 _____ 的形式;
- (2) 命题“ $\sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2$ ”是 _____ 的形式;
- (3) 命题“60 是 10 与 12 的公倍数”是 _____ 的形式.

4 指出下列命题的构成形式及构成它的简单命题.

- (1) 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边;
- (2) 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧;
- (3) 方程 $(x-1)(x-2) = 0$ 的根是 $x=1$ 或 $x=2$.

5 分别指出由下列各组命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”形式, 并判断真假.

- (1) $p: 2n-1 (n \in \mathbf{Z})$ 是奇数; $q: 2n-1 (n \in \mathbf{Z})$ 是偶数;
- (2) $p: a^2 + b^2 < 0 (a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$; $q: a^2 + b^2 \geq 0$;
- (3) p : 集合中元素是确定的; q : 集合中元素是无序的;
- (4) $p: \pi$ 是无理数; $q: \sqrt{12}$ 不是实数;
- (5) $p: 9$ 是质数; $q: 8$ 是 12 的约数;
- (6) $p: \emptyset = \{0\}$; $q: \emptyset \subseteq \emptyset$.

6 有 6 名歌手参加电视歌曲大奖赛, 组委会只设一名特别奖. 观众 A、B、C、D 四人对于谁能获得特别奖进行了如下猜测:

A 说: “不是 1 号就是 2 号能获得特别奖”.

B 说: “3 号不可能获得特别奖”.

C 说: “4 号、5 号、6 号都不可能获得特别奖”.

D 说: “能获得特别奖的是 4 号、5 号、6 号中的一个”.

比赛结果公布后表明, A、B、C、D 四人中只有一个人猜对了. 问: 究竟是谁猜对了? 究竟是几号歌手获得了特别奖?

7 已知 p : 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负实根; q : 方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根, 若 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 求 m 的取值范围.



走近高考

8 2005 北京宣武模拟, 7 设有两个命题: ① 关于 x 的不等式 $x^2 + 2ax + 4 > 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立; ② 函数 $f(x) = -(5-2a)^x$ 是减函数. 若命题有且只有一个是真命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, 2)$
- C. $(-2, 2)$ D. $(2, \frac{5}{2})$

9 2005 哈东辽 II, 3 命题 $p: x = \pi$ 是 $y = |\sin x|$ 的一条对称轴, $q: 2\pi$ 是 $y = |\sin x|$ 的最小正周期. 下列命题, 其中真命题有 ()

- ① p 或 q ② p 且 q ③ p ④ q
- A. 0 个 B. 1 个
- C. 2 个 D. 3 个

10 2006 华中师大附中模拟, 19 已知命题 p : 方程 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解; 命题 q : 只有一个实数 x 满足不等式 $x^2 + 2ax + 2a \leq 0$, 若命题“ p 或 q ”是假命题, 求 a 的取值范围.

1.3.3 “非”



新知预习

- 1. 逻辑联结词“非”(也称“否定”)是从日常语言中的_____等抽象而来的.
- 2. 一般地,对命题 p 加以否定,就得到一个新的命题,记作_____,读作“非 p ”或“ p 的否定”.
- 3. p 与 $\neg p$ 真值表

p	$\neg p$
真	_____
假	_____

基础示例

- 如果命题“ $p \vee q$ ”与命题“ $\neg p$ ”都是真命题,那么 $\dots$ ()
- A. 命题 p 不一定是假命题
 - B. 命题 q 一定为真命题
 - C. 命题 q 不一定是真命题
 - D. 命题 p 与命题 q 的真假相同



重难突破

- 1. 正确理解“非”
数学中“非”与生活用语基本一致,它是从生活用语中的“不是”“全盘否定”“问题的反面”抽象而来的,表示否定,正确了解其意义有利于解决数学问题.
一般地,对命题 p 加以否定,就得到一个新的命题,记作 $\neg p$, p 与 $\neg p$ 的真假不同,一个为真,另一个必定为假,可类比集合中的补集加以理解.

2. 复合命题的真假判断

判断复合命题的真假,可按下面步骤进行:(1)确定复合命题的形式;(2)判断其中简单命题的真假;(3)根据真值表(见下表)判断复合命题的真假.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

活学巧用

【例1】写出下列命题的否定,并判断其真假.

- (1) p : $\sqrt{2}$ 是有理数;
- (2) p :5 不是 15 的约数;
- (3) p : $2 < 3$;
- (4) p : $8 + 7 \neq 15$;
- (5) p :空集是任何集合的真子集.

解:(1) $\neg p$: $\sqrt{2}$ 不是有理数. 命题 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题;
(2) $\neg p$:5 是 15 的约数. 命题 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题;
(3) $\neg p$: $2 \geq 3$. 命题 p 是真命题, $\neg p$ 是假命题;
(4) $\neg p$: $8 + 7 = 15$. 命题 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题;
(5) $\neg p$:空集不是任何集合的真子集. 命题 p 是假命题,命题 $\neg p$ 是真命题.

【例2】指出下列命题的真假:

- (1)命题:“不等式 $|x + 2| \leq 0$ 没有实数解”;
- (2)命题:“ -1 是偶数或奇数”;
- (3)命题:“ $\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$,也属于集合 $\mathbf{R}$ ”;
- (4)命题:“ $A \not\subseteq (A \cup B)$ ”.