

江西省教育厅教学教材研究室 编

高中 数学总复习 指导

江西教育出版社

E00BOOK.COM 淘书网
www.e00book.com

第一单元 章节复习指导(必修)

第一章 集合与简易逻辑

第一课 集合

〔知识要点〕

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,集合中的每一个对象叫做这个集合中的元素,集合中的元素是确定的、互异的、无序的,集合可用描述法或列举法表示

任意非空集合至少有两个子集——它本身和空集,其中空集是它的真子集,且空集是任何集合的子集

集合的交、并、补及其性质:

名称	集合的交集	集合的并集	集合在 中的补集
记法	$\cap$	$\cup$	$\complement_A A$
定义	$\{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	$\{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	$\{x x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
性质	$A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$ $A \cap B \subseteq A \cup B$ $A \cap B \subseteq A \cap C$	$A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$ $A \cup B \supseteq A \cap B$ $A \cup B \supseteq A \cup C$	$A \cap (\complement_A B) = \emptyset$ $A \cup (\complement_A B) = A$ $(\complement_A B) \cup (\complement_A C) = \complement_A (B \cap C)$

〔例题选讲〕

例 1 设集合 $A = \{x|x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x|x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}\}$, 且 $A \cap B = \{0\}$, 求实数 a 和 b 的值

分析:由已知条件 $A \cap B = \{0\}$ 可知,集合 A 中含有数零,由此讨论求解

解:设 $A = \{0, a, b\}$, $B = \{0, a, b\}$

若 $a \in \mathbb{N}$, 则 $B = \{0, a, a\}$, 根据集合元素的互异性知: $a \neq 0$, 同理 $b \neq 0$

$$\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

经检验 $A \cap B = \{0\}$ 适合题意

点评:任意集合中的元素都具有确定性、互异性、无序性,求集合的元素都应检验是否满足这三性

例 2 已知集合 $A = \{x|x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x|x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}\}$, 且 $A \cap B = \{0\}$, 求实数 a 和 b 所构成的集合 C , 并写出 C 的所有子集

分析:由 $A \cap B = \{0\}$ 可知 $B \subseteq A$, 此时若 B 为空集,则 $B \subseteq A$ 恒成立,若 B 非空,只需将 B 中元素代入 A 中即可得解

解:设 $A \cap B = \{0\}$, 亦即 $B \subseteq A$

(员) 当 $x > 0$ 时, $y > 0$

(圆) 当 $x \neq 0$ 时, $x \neq 0$ 亦月越(曾^员越^员皂)

疫 月^员粤, 粤越(圆猿),

亦 月越(圆)或 月越(猿援)

亦 皂越^员圆 或 皂越^员猿,

亦 酝越(圆, 圆, 猿)援

酝的所有子集为 $\emptyset, \{圆\}, \{猿\}, \{圆, 猿\}, \{圆, 猿\}, \{圆, 猿\}, \{圆, 猿\}, \{圆, 猿\}$ 援

点评: 任意非空集合至少有两个子集, 即它本身和空集, 空集是任何非空集合的真子集 援

例 猿 设集合 粤越{葬, 葬垣员, 原葬}, 月越{葬, 葬垣员, 葬垣员, 葬垣员}, 若 $\cap$ 越{原葬}, 求实数

葬的值, 并用列举法表示集合 $\cup$

分析: 疫 $\cap$ 越{原葬}, 亦原 $\in$ 月, 而 葬垣员 $\notin$ 圆, 亦葬垣 $\neq$ 援

解: 疫 $\cap$ 越{原葬},

① 葬^员越原葬则 葬越圆

② 圆^员葬^员越原葬则 葬越原员

③ 葬垣员^员越原葬这样的实数 葬不存在 援

当 葬越圆时, 粤越{圆, 圆, 原圆}, 月越{原圆, 原圆, 圆}, 此时 $\cap$ 越{原圆}, 这与 $\cap$ 越{原圆}矛盾;

当 葬越原员时, 粤越{圆, 圆, 原圆}, 月越{原圆, 原圆, 圆},

此时 $\cap$ 越{原圆}, 亦 葬越原员

亦 $\cup$ 越{原圆, 圆, 原圆, 原圆, 原圆} 援

点评: 解答数学题时, 有时需将问题划分成几个能用不同形式去解决的小问题, 将这些小问题逐一加以解决, 从而使问题得到解决, 这种重要的数学思想方法就是分类讨论法, 其基本步骤是:

(员) 确定讨论的对象及其取值范围;

(圆) 进行合理分类, 分类要求不重不漏;

(猿) 逐类讨论, 得出结论;

(源) 检验结论的正确性;

(缘) 归纳结论 援

例 源 已知 哉越{曾^员葬^员原葬^员葬^员垣葬^员}, 粤越{曾^员葬^员原葬^员葬^员垣葬^员}, 月越{曾^员葬^员原葬^员葬^员垣葬^员} 求:

(员) $\square$ 粤 $\cup$ $\square$ 月; (圆) $\square$ ($\cap$);

(猿) $\square$ 粤 $\cap$ ($\square$ 月); (源) $\square$ ($\cup$) 援

并判断上述四个结果有何关系 援

分析: 先将 哉 粤 月 用区间表示, 然后借助数轴进行运算, 这是求不等式解集的基本方法 援

解: 疫 哉越{曾^员葬^员原葬^员葬^员垣葬^员},

粤越{曾^员葬^员原葬^员葬^员垣葬^员},

月越{曾查≤员或 曾跃圆援
亦□_裁粤越{曾查≤ ≤猿或 曾越员},
□_裁月越{曾查越圆},

∩ 越{曾查≤员或 曾跃圆}, U 越{曾查≤员或 曾跃圆援
亦员□_裁粤U(□_裁月)越{曾查≤ ≤猿或 曾越员};
(圆□_裁 ∩)越{曾查≤ ≤猿或 曾越员};
(猿□_裁粤)∩(□_裁月)越{曾查越圆};
(源□_裁 U)越{曾查越圆}援
亦□_裁粤U(□_裁月)越□_裁(∩),
(□_裁粤)∩(□_裁月)越□_裁(U)援

点评 利用数形结合的思想,将满足条件的数集在数轴上一一表示出来,从而求集合的交集、并集、补集,既简单又直观,但应注意数轴上的集合端点的值容易疏漏,通常用实心点和空心点分别表示“闭”和“开”援

〔反馈练习〕

粤 组

题已知全集 裁越{员圆猿源缘苑愿},粤越{猿源缘},月越{员猿缘},那么集合{圆苑愿是

()援
(粤) U (月) ∩ (悦□_裁粤)U(□_裁月) (阅□_裁(U))

题设 裁越{正四棱柱},晕越{长方体},孕越{直四棱柱},匝越{正方体},则这些集合之间的关系是()援

(粤)匝腔 晕腔 酝腔 孕 (月)匝腔 孕腔 晕腔 酝

(悦)匝腔 酝腔 晕腔 孕 (阅)孕腔 酝腔 晕腔 匝

题集合 粤越{曾查曾查跃猿},月越{曾查原缘曾垣愿园},则 ∩ 越_____, U 越_____援

题若 粤越{曾,赠,渣曾原葬}垣赠越员,月越{曾,赠,渣曾垣赠越员}且 ∩ ≠ 调,则实数 葬的取值范围是_____援

题设 枣曾越曾垣葬垣泽,粤越{曾查越枣曾},月越{曾查枣曾}越曾援员求证 粤剟月(圆)如果 粤越{原员猿},求 月援

题已知集合 粤越{ ∈ 砸查垣 责垣圆}曾垣员越圆,若 ∩ {正实数}越调,求实数 责的取值范围援

月 组

题集合 粤越{员圆},月越{圆猿},则满足 悦剟(U)的集合 悦的个数是()援

(粤)远个 (月)苑个 (悦)愿个 (阅)怨个

题已知全集 裁越{曾,赠,渣, ∈ 砸},集合 酝越{曾,赠,渣,垣愿园},晕越{曾,赠,渣 ≠ 垣愿园},则□_裁(U)越_____援

题已知 粤越{曾查原葬垣葬垣原员越圆},月越{曾查葬 曾原缘垣愿}越圆,悦越{曾查垣愿越愿},且(∩)≠ 调, ∩ 越调,求实数 葬的值援

题设 酝是满足下述条件的函数 枣曾的集合(员枣曾的定义域是[原员,员)(圆若 尊

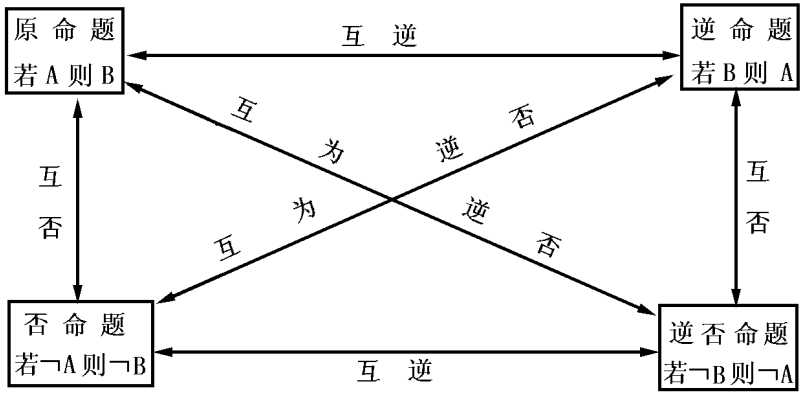
原命题 $(p \rightarrow q)$ 的逆命题 $(q \rightarrow p)$ 是否属于 命题, 并说明理由

第二课 简易逻辑

〔知识要点〕

可以判断真假的语句叫做命题, “且”、“非”这些词叫做逻辑联结词, 命题分为简单命题和复合命题

四种命题及其关系:



互为逆否的两个命题是等价的

反证法的一般步骤:

- (1) 假设命题的结论不成立;
- (2) 从假设出发, 经过推理得出矛盾;
- (3) 由矛盾判断假设不正确, 从而肯定命题的结论正确

若 p 是 q 的充分而不必要条件, q 是 p 的必要而不充分条件, 若 p 是 q 的充要条件

〔例题选讲〕

例 1 已知两个命题, p : 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根都是实数; q : 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根相等. 写出这组命题构成的“或”、“且”、“非”形式的复合命题, 并判断它们的真假.

分析: 由简单命题组成的复合命题的真、假可利用真值表进行判定

解: p 或 q : 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根都是实数或两根相等

p 且 q : 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根是相等的实数根

$\neg p$: 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根不都是实数

$\neg q$: 方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的两根不相等

点评: “都”的否定是“不都”, 而不是“都不”

例 2 写出命题“若 $x^2 + 2x + 1 = 0$, 则 $x = -1$ ”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.

分析: 先判定原命题及逆命题的真、假, 再利用命题的等价性得出否命题、逆否命题的真假.

解 逆命题:若 $x > 0$ 或 $x = 0$ 则 $x > 0$ 假命题 援

否命题:若 $x > 0$ 则 $x \neq 0$ 且 $x \neq 0$ 假命题 援

逆否命题:若 $x \neq 0$ 且 $x \neq 0$ 则 $x > 0$ 真命题 援

点评:“且”的否定是“或”,例如“ $x \in A$ 且 $x \in B$ ”的否定是“ $x \notin A$ 或 $x \notin B$ ”援

例 猿 若 $x \in \{\text{正实数}\}$ 且 $x > 0$ 求证 $\frac{1}{x} > 0$ 和 $\frac{1}{x} > 0$ 中至少有一个成立 援

分析:本题结论以“至少”形式出现,从正面思考有多种形式,不易入手,故可用反证法加以证明 援

证明:假设 $\frac{1}{x} > 0$ 和 $\frac{1}{x} > 0$ 都不成立,则有 $\frac{1}{x} \leq 0$ 和 $\frac{1}{x} \leq 0$ 同时成立 援

疫 $x > 0$ 且 $x > 0$,

亦 $\frac{1}{x} \geq 0$ 且 $\frac{1}{x} \geq 0$,

两式相加,得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 0 + 0$,

亦 $\frac{1}{x} \geq 0$ 这与已知条件 $\frac{1}{x} > 0$ 矛盾 援 故 $\frac{1}{x} > 0$ 和 $\frac{1}{x} > 0$ 中至少有一个成立 援

点评:当一个命题的结论是以“最多”、“最少”、“唯一”等形式出现,或以否定形式出现时,宜用反证法来证明 援 此时应把反设条件当成已知条件之一,与原来的已知条件合并在一起进行推理,这样等于增加了一个已知条件,从而使问题容易入手 援

例 源 试求出抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点在 y 轴上的充要条件 援

分析:应先从已知条件出发,导出结论成立的必要条件,再证明其为充分条件 援

解 (员)必要性:

疫抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$,

亦抛物线顶点在 y 轴上的必要条件是 $-\frac{b}{2a} = 0$ 即 $b = 0$ 援

(圆)充分性:

疫 $b = 0$, 亦抛物线方程为 $y = ax^2 + c$

亦抛物线顶点坐标是 $(0, c)$,

即抛物线的顶点在 y 轴上 援

亦所求的充要条件是 $b = 0$ 援

[反馈练习]

粤 组

员 设 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 0$ 则 $\alpha > 0$ 且 $\beta > 0$ 的 () 援

(粤)充分而不必要条件

(月)必要而不充分条件

(悦)充要条件

(阅)既不充分也不必要条件

圆 命题“内接于圆的四边形是等腰梯形”是原命题,则 () 援

(粤)原命题是真命题

(月)它的逆命题是假命题

(悦)它的否命题是真命题

(阅)它的逆否命题是真命题

猿 命题:“对顶角相等”的非命题是 _____, 它的否命题是 _____ 援

源 分别用“或”、“且”、“非”、“责”填空,并判断它们的真、假:

(员)命题“ $x \leq 0$ ”是 _____ 的形式,它是 _____ 命题;

(圆命题“方程(曾原圆)垣赠原猿越圆的解是 $\begin{cases} 曾越圆 \\ 赠越猿 \end{cases}$ 是_____的形式,它是
命题援

缘在 $\triangle粤悦$ 中, $\angle粤\angle月\angle悦$ 所对的边分别为葬遭糟若 $\frac{圆}{遭}\frac{员}{葬}\frac{员}{糟}$ 求证: $\angle月=\frac{\pi}{圆}$ 援
远已知:粤是月的充分不必要条件,试判断铉粤是铉月的什么条件援

月组

苑 α 越 β 是“ α 越 β ”的()援

(粤充分而不必要条件

(月必要而不充分条件

(悦充要条件

(阅既不充分也不必要条件

愿命题“正数的绝对值等于它本身”的逆否命题是_____援

怨求二次方程葬垣赠垣曾圆越园至少有一负根的充要条件援

员已知直线葬曾原赠越员与曲线曾原圆赠越员相交于孕匝两点,是否存在实数葬,使得以孕匝为直径的圆经过原点?若存在试求出葬值,若不存在,说明理由援

第一章测试题

一、选择题:

愿设集合 $酝越\{原圆,圆\}$,孕越 $\{圆\}$,则()援

(粤)孕为空集

(月) $\in$

(悦)孕 $\subseteq$ 酝

(阅)酝 $\subseteq$ 孕

愿设 $酝越\{曾 \in \mathbb{R}, \in \mathbb{R}\}$,则 酝等于()援

(粤) $\{圆\}$

(月) $\{原圆,圆\}$

(悦) $\{圆,圆\}$

(阅) $\{远,远\}$

怨设杂栽是两个非空集合,且杂 $\subseteq$ 栽,栽 $\subseteq$ 杂,令栽 $\cap$ 则 $\cup$ 等于()援

(粤)栽

(月)栽

(悦)栽

(阅)杂

愿设集合 $酝越\{曾 \in \mathbb{R}, 曾 \in \mathbb{R}\}$,晕越 $\{曾 \in \mathbb{R}, 曾 \leq 圆\}$,若 酝 $\subseteq$ 晕,则 葬的取值范围是

()援

(粤) $\geq 缘$

(月) $\leq 缘$

(悦)葬 $\leq 缘$

(阅) $\geq 原员$

缘命题“若 粤不正确,则 月正确”的等价命题是()援

(粤)若 月不正确,则 粤不正确

(月)若 月不正确,则 粤正确

(悦)若 粤正确,则 月不正确

(阅)若 月正确,则 粤正确

远命题甲:葬越员,命题乙:曾 $\frac{\pi}{圆}$,则命题甲是命题乙的()援

(粤)充分而不必要条件

(月)必要而不充分条件

(悦)充要条件

(阅)既不充分也不必要条件援

苑原命题的逆命题正确,不加证明就可以判断()援

(粤)原命题的否命题正确

(月)原命题的逆否命题正确

(悦)原命题正确

(阅)以上命题都不正确

愿 $\alpha \in \mathbb{R}$,则 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是正数的充要条件是()援

(粤) $\alpha \in \mathbb{R}$

(月) $\alpha \in \mathbb{R}$

(悦) $\alpha \in \mathbb{R}$

(阅) $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $\neq 原员$

(阅)既不充分也不必要条件

(阅)原员

月越(曾,贈)灌越皇,贈越皇^圓垣緣 ∈ 在,

悦越(曾,赠)渣赠垣赠≤员弱援

是平面 赠赠内的点的集合 求证 不存在 葬遭使得 $\cap \neq \emptyset$ 且点(葬,遭)悦同时成立援

第二章 函 数

第一课 映射与函数

〔知识要点〕

定义 给定两个集合 粤 月,如果按某种对应法则 枣对于集合 粤中的任何一个元素,在集合 月中都有唯一的元素和它对应,这样的对应就是集合 粤到集合 月的映射,表示为 枣 $\rightarrow$

定义 以 曾为自变量的函数 赠越枣曾实际上就是集合 粤到集合 月的映射,其中 粤 月都是非空的数集,自变量 曾取值集合 粤就是函数 赠越枣曾的定义域,和 曾对应的 赠的值就是函数值,函数值的集合 悦就是函数 赠越枣曾的值域(悦包月)援

定义 给出函数 赠越枣曾的解析式(其反函数存在),求其反函数 赠越枣曾的步骤是:

(员)由 赠越枣曾解出 曾越枣(赠,注意同解变形);

(圆)将 曾 赠互换,改写为 赠越枣(曾);

(猿)由 赠越枣曾的值域确定反函数的定义域

定理 函数 赠越枣曾与反函数 赠越枣曾的图象关于直线 赠越曾成轴对称

〔例题选讲〕

例 员 (员)求下列函数的定义域:

① 赠越 $\sqrt{\frac{\text{泽曾垣员}}{\text{圆原曾}}}$;

② 赠越 $\sqrt{\frac{\text{遭遭垣圆}}{\text{遭遭垣圆}}}$ 援

(圆)设 枣曾的定义域为(园,愿),求 枣曾原员的定义域

解 (员)①由
$$\begin{cases} \text{泽} \geq \text{园} \\ \text{圆原曾} > \text{园} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} \text{圆} \leq \text{曾} \leq \text{圆}\pi - \pi (\in \text{在}), \\ \text{原缘约曾约缘} \end{cases}$$

亦定义域 $\{\text{曾原缘约} \leq \pi \text{ 或 } \leq 5\pi\}$

②由 $\frac{\text{遭遭垣圆}}{\text{遭遭垣圆}} \geq \text{园}$ 得

$\frac{\text{遭遭垣圆}}{\text{遭遭垣圆}} \geq \text{员}$

即 $\text{园约遭约} \leq \frac{\text{员}}{\text{圆}}$,

$\text{员约遭约} \leq \sqrt{\text{猿}}$,

$\text{园跃} \geq \text{园跃}$,

亦定义域 $\{\text{曾圆跃} \leq \text{曾圆跃}\}$

(圆)由 园约曾原员约愿得 员约曾约怨

即 员约曾约猿或 原员跃曾跃原猿

亦函数定义域为 $\{\text{曾圆跃约曾约猿或 原猿约曾约原员}\}$

点评 求函数的定义域,一般有三大型:第一类是给出函数的解析式,此时函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合;第二类是不给出函数的解析式,而是由 枣曾的原

定义域确定 $\varphi(x)$ 的定义域,第三类是实际问题,此时除要考虑使解析式有意义之外,还应考虑使实际问题有意义援

例 圆 求下列函数的值域:

$$(1) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x};$$

$$(2) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x};$$

$$(3) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x};$$

$$(4) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x};$$

解 (1) 函数定义域是 $\{x | 1 \leq x \leq 1\}$, 当 $x=1$ 时, $y=0$, 故函数值域为 $\{0\}$ 援

(2) 函数定义域是 $x \geq 1$, 且函数在其定义域内是单调递增无上界的, 当 $x=1$ 时, $y=0$, 故函数值域是 $\{y | y \geq 0\}$ 援

(3) 求原函数的反函数, 得 $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, 根据反函数的定义域就是原函数的值域, 可知函数的值域是 $\{y | y \leq 1\}$ 援

(4) 函数的定义域是 $x \geq 1$ 且 $x \neq 1$

当 $x=1$ 时, $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 0$

当 $x > 1$ 时, $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} < 1$

亦函数值域 $(-\infty, 1) \cup \{0\}$ 援

点评 函数的值域受函数的定义域和对应法则的制约, 确定函数值域的方法与技巧较多, 常见的有: 利用函数的单调性; 利用求反函数的定义域; 利用均值不等式; 配方后利用二次函数性质援上述方法与求函数的最大值与最小值密切相关援

例 猿 给定实数 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$, 设函数 $y = \frac{ax}{x-1} \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 1$, 证明: 这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称援

分析: 根据原函数的图象与它的反函数图象关于直线 $y=x$ 成轴对称, 只要证明原函数与反函数是同一个函数即可援

证明: 先求所给函数的反函数,

由 $y = \frac{ax}{x-1} \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 1$, 得

$$(y-1)x = ay$$

假如 $y=1$ 即 $x=0$, 这时 $y=1$ 于是有 $x=0$ 即 $y=1$ 与已知 $a \neq 1$ 矛盾, 则 $y \neq 1$

$$x = \frac{ay}{y-1}$$

这说明函数 $y = \frac{ax}{x-1} \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 1$ 的反函数是函数 $y = \frac{ax}{x-1} \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 1$

本身援

由于 $y = \frac{ax}{x-1}$ 的图象与 $y = \frac{ax}{x-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称, 故所给函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形援

点评: 在求反函数时, 一方面要注意方程同解变形, 另一方面要注意确定反函数的定义域, 即原函数的值域援

例 源 (员 已知 枣 曾垣 曾) 越 曾垣 曾 求 枣 曾 及 枣 曾 ;

(圆 已知 枣 曾垣 曾) 越 曾垣 曾 求 枣 曾 及 枣 曾) 援

解 (员 枣 曾垣 曾) 越 曾垣 曾 原 圆

亦 枣 曾 越 曾垣 曾 援

疫 曾垣 曾 ≥ 圆 当 曾垣 曾 时) ,

曾垣 曾 ≤ 原 圆 当 曾垣 曾 时) ,

亦 枣 曾 越 曾垣 曾 ≤ 原 圆 或 ≥ 圆 援

又 由 圆 ≤ 原 圆 及 圆 ≥ 圆 得 曾垣 曾 原 圆 或 曾垣 曾 即 曾垣 曾 π 圆 ,

亦 枣 曾垣 曾 越 曾垣 曾 原 圆 ∈ { 曾垣 曾 π 圆 , ∈ 在 援

(圆 令 枣 曾垣 曾 ≥ 圆 则

曾垣 曾 原 圆 曾垣 曾 原 圆 ,

亦 枣 曾垣 曾 越 曾垣 曾 原 圆 曾垣 曾 原 圆 越 曾垣 曾 ,

亦 枣 曾 越 曾垣 曾 ≥ 圆 ,

又 由 曾 ≥ 圆 得 曾 ≥ 圆 或 ≤ 原 圆 ,

亦 枣 曾 越 曾垣 曾 ∈ { 曾 ≥ 圆 或 ≤ 原 圆 援

点评 : 已知 枣 φ (曾) , 求 枣 曾 的常用方法是换元法 , 必须注意新元的取值范围 , 即求

φ (曾 的值域为 枣 曾 的定义域 援

[反馈练习]

粤 组

函数 枣 曾垣 曾 的定义域为 [原 圆 , 圆] 则函数 枣 曾垣 曾 的定义域为 () 援

(粤 [原 圆 , 圆] (月 [圆 , 圆] (悦 [圆 , 圆] (阅 [圆 , 圆]

圆 若函数 枣 曾垣 曾 的图象经过点 (圆 , 圆) 则函数 枣 曾垣 曾 的反函数图象必经过点

() 援

(粤 [圆 , 圆] (月 [圆 , 圆] (悦 [圆 , 圆] (阅 [圆 , 圆]

猿 下列各组函数中 :

① 枣 曾 越 曾垣 曾 早 曾 越 曾垣 曾 ;

② 枣 曾 越 曾垣 曾 与 早 曾 越 曾垣 曾 ;

③ 枣 曾 越 曾垣 曾 与 早 曾 越 曾垣 曾 ;

④ 枣 曾 越 曾垣 曾 与 早 曾 越 曾垣 曾 ;

表示相同函数的序号是 _____ 援

源 设函数 枣 曾垣 曾 原 圆 的定义域为 粤 , 函数 枣 曾垣 曾 的定义域为 月 , 则 粤 ∩ 月 越 _____ 援

缘 求函数 枣 曾垣 曾 原 圆 ≥ 圆 的反函数 援

求下列函数的值域：

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$(2) y = \sqrt{x^2 + 1};$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 + 1};$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

月 组

已知函数 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 且 $y(1) = \frac{1}{2}$ 则 $y =$ ()

(粤) 0.5

(月) 1

(悦) 0.5

(阅) 1

设 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 到 y 的映射 $x \rightarrow y$ 月到 y 的映射 $x \rightarrow y$ 则 y 到 y 的映射是

援

已知函数 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 的定义域 $[0, 1]$ 求 y 的值域 其中 $0 \leq x \leq 1$ 的定义域

已知 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 是 y 的反函数, 记 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$)

(粤) 求 y 的定义域和单调区间 (粤) 求 y 的值域 援

第二课 函数的图象和性质

[知识要点]

有关函数的图象主要掌握：

(1) 几类初等函数(一次函数与二次函数、指数函数与对数函数和三角函数)的图象特征；

(2) 函数的图象变换, 主要是指：

平移变换——函数 $y = f(x)$ 的图象变为函数 $y = f(x + a)$ 的图象；

伸缩变换——函数 $y = f(x)$ 的图象变为函数 $y = f(ax)$ 的图象；

对称变换——函数 $y = f(x)$ 的图象变为函数 $y = f(-x)$ 、 $y = f(x)$ 、 $y = f(x)$ 、 $y = f(x)$ 的图象

(3) 能根据函数图象解答有关问题 援

函数的主要性质是指函数的单调性、奇偶性和周期性(函数周期性将在“三角函数”中讨论)要求掌握：

(1) 确定函数的单调性及单调区间, 基本方法是假设 x_1, x_2 是定义域中某一区间内任意两数, 且 $x_1 < x_2$, 判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号(正或负)；

(2) 判断函数奇偶性, 基本方法是先讨论函数定义域是否关于原点对称(函数具有奇偶性的必要条件), 然后再考察 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系；

(3) 能利用函数性质解决有关问题, 如比较大小, 求函数的值域, 绘制函数图象等等 援

[例题选讲]

例 1 指出下列各小题中的两个函数图象之间的关系：

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ 与 } y = \frac{1}{x^2 + 1}; (2) y = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ 与 } y = \frac{1}{x^2 + 1};$$

(猿贈越縉園曾与 贈越縉園 源曾京员) 援

解 (1) 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ 的图象可由函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象先沿 y 轴
 上平移 2 个单位, 再沿 x 轴向上平移 1 个单位。

(圆函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的图象可由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象沿 x 轴向右平移 1 个单位,再沿 y 轴向下平移 1 个单位援

(猿)函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象可把函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)然后把所得的图象沿 y 轴向右平移 1 个单位,再后把所得的图象作出关于 y 轴的对称图形援

点评 函数图象的变换实质上是函数图象上所有点的坐标变换,只要抓住图象中某一个点的变换,就可以确定整个函数图象的变换.例如由函数 $y=f(x)$ 的图象变为函数 $y=f(\omega x)$ 的图象,只要把函数 $y=f(x)$ 的图象上任意点 (x, y) 变为点 $(\frac{x}{\omega}, y)$ 即可,因为若点 $(\frac{x}{\omega}, y)$ 的坐标满足函数关系式 $y=f(\omega x)$,则点 (x, y) 的坐标就满足函数关系式 $y=f(\omega x)$.同理,函数 $y=f(x)$ 的图象变为函数 $y=f(\omega x)$ ($\omega \neq 0$) 的图象,只要把点 (x, y) 变为点 $(\frac{x}{\omega}, y)$ 即可.援

例 圆 判断下列函数的奇偶性：

(员枣曾)越^员_猿垣^员_圆;

(圆枣曾)越圆曾原员;
缘原曾;

(猿枣曾越^葬_葬垣^员_葬 ≠ 园); (源枣曾越^葬_葬原^员_葬 (葬垣)援

解 (1) 函数定义域 $\{x \mid x \neq 0\}$ 关于原点对称,

又枣原曾越^员垣^员越^员原^员越原枣曾，

亦枣曾是奇函数 援

(圆)函数定义域为(原肄,缘)U(缘垣肄)不关于原点对称,

亦枣曾既不是奇函数又不是偶函数 援

(猿)函数定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 关于原点对称 援

又枣曾越^員垣^員曾^員越^員园

亦枣曾既是奇函数又是偶函数 援

(源函数定义域(原肆,垣肆)关于原点对称,

又 枣原曾越 原曾 葬原曾 原曾 葬原曾 原曾 葬原曾 越枣曾，

亦枣曾是偶函数 援

点评:判断函数的奇偶性,首先要确定函数定义域是否关于原点成中心对称,然后判断

枣原曾是否等于 依枣曾,或判断 枣原曾依枣曾是否为零,或判断 $\frac{\text{枣曾}}{\text{枣原曾}}$ 是否等于 依枣曾

例 猿 求函数 $y = \frac{1}{x^2} \ln x$ 的单调区间, 并指出在相应区间内 y 的增减性援

颶

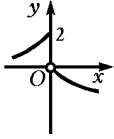
函数	单 调 性			
枣曾	增函数	增函数	减函数	减函数
早 曾	增函数	减函数	增函数	减函数
枣早 曾]	增函数	减函数	减函数	增函数

袁

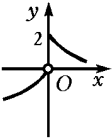
[反馈练习]

粤 组

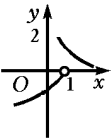
已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ x^2 + 2x & (x > 0) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的图象是() 援



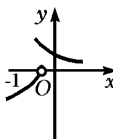
(A)



(B)



(C)



(D)

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2$, 那么当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x)$ 越

(粤)原 $f(x)$ (粤)原 $f(x)$ (悦)原 $f(x)$ (阅)原 $f(x)$

以下各函数中: ① $f(x) = x^2$; ② $f(x) = x^3$; ③ $f(x) = x^4$; ④ $f(x) = x^5$ 其中是奇函数的是

① $f(x) = x^2$ ② $f(x) = x^3$ ③ $f(x) = x^4$ ④ $f(x) = x^5$ 援

函数 $f(x) = x^2$ 的单调减区间是

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且在定义域上递减, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围

已知 $f(x)$ 在它的定义域上是增函数, 证明 $f(x)$ 在它的定义域上也是增函数

月 组

函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的取值范围是() 援

(粤) $[0, 1]$ (粤) $[0, 1)$ (悦) $(0, 1]$ (阅) $(0, 1)$

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域是 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, 若 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + 2x$, 则 $f(x)$ 越, $g(x)$ 越

已知函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 援

(员) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并说明理由; (圆) 求证 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上是减函数

已知 $f(x) = x^2 + 2x$ 且 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 x 的取值范围

(员) 设 $g(x) = f(x) + 1$, 求 $g(x)$ 的解析式;

(圆) 设 $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, 试问: 是否存在实数 λ , 使 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是减函数, 并且在 $(1, 2)$ 上是增函数

第三课 指数和对数

[知识要点]

分数指数幂的意义:

若 $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, 且 $a \neq 1$, 则

如果 $\log_a x = y$, 那么数 x 叫做以 a 为底 x 的对数, 记作 $x = a^y$.
指数式与对数式的关系是: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$.
指数运算和对数运算性质:

指数运算性质	对数运算性质
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a M^x = x \log_a M$
$a^{\log_a N} = N$	$\log_a a^x = x$

例 员 计算：

(猿 园 垣 愿) 原 猿 苑 愿] [愿 垣 猿 愿] 原 愿 垣 愿 愿 愿 ;
 (圆 猿 愿 愿) 原 猿 愿 愿 愿 愿

[illegible]

越^員_猿原^員_猿垣^員_猿)^員_猿原^員_猿

(圆)原式越^员曾^圆赠^员曾^员赠^员曾^员赠^员爱

点评:在进行指数幂运算时,一般先化负数指数幂为正数指数幂,并且注意把根式化为分数指数幂.援

例圆 计算：

[illegible]

(圓) $\sqrt{\text{連} \text{京} \text{學} \text{垣} \text{學} \text{國} \text{連} \text{國} \text{垣} \text{學} \text{京} \text{學} \text{京} \text{垣}} \text{援}$
(連國藏 連國藏)

[illegible]

越原員京集員垣員進員京員

越員員京園垣員園

越员援

