

全国师范大学附中教研信息联网

高中数学

# 综合·应用·创新

导向研练

(高一分册)

高体柱  
周鹏家 编著  
杨光宇

北京工业大学出版社

# 高中数学综合·应用·创新导向研练

## 编委会

(按姓氏笔画排序)

|           |      |     |
|-----------|------|-----|
| 南京师范大学附中  | 高级教师 | 方华铭 |
| 西南师范大学附中  | 高级教师 | 邓晓鹏 |
| 北京师范大学二附中 | 特级教师 | 阮国杰 |
| 湖南师范大学附中  | 高级教师 | 汤正良 |
| 陕西师范大学附中  | 高级教师 | 辛 宇 |
| 华东师范大学附中  | 特级教师 | 陆继椿 |
| 东北师范大学一附中 | 高级教师 | 罗瑞兰 |
| 首都师范大学附中  | 特级教师 | 唐朝智 |
| 辽宁师范大学附中  | 高级教师 | 高体柱 |
| 华中师范大学附中  | 特级教师 | 章 英 |
| 华南师范大学附中  | 特级教师 | 彭国雄 |

# 目 录

|       |            |    |
|-------|------------|----|
| 第一章   | 集合与简易逻辑    | 1  |
| 1.1   | 集合         | 1  |
| 1.2   | 子集、全集、补集   | 6  |
| 1.3   | 交集、并集      | 10 |
| 1.4   | 含绝对值的不等式解法 | 14 |
| 1.5   | 一元二次不等式解法  | 19 |
| 专题 I  | 集合与不等式     | 22 |
| 1.6   | 逻辑联结词      | 27 |
| 1.7   | 四种命题       | 30 |
| 1.8   | 充分条件与必要条件  | 34 |
| 专题 II | 简易逻辑       | 39 |
| 总结 I  | 知能升华       | 42 |
| 总结 II | 导向研练       | 45 |
| 第二章   | 函 数        | 48 |
| 2.1   | 映射         | 48 |
| 2.2   | 函数         | 53 |
| 2.3   | 函数的单调性和奇偶性 | 67 |
| 2.4   | 反函数        | 79 |
| 2.5   | 指数         | 85 |
| 2.6   | 指数函数       | 89 |

|       |                                      |     |
|-------|--------------------------------------|-----|
| 2.7   | 对数                                   | 97  |
| 2.8   | 对数函数                                 | 103 |
| 专题 I  | 函数图象的变换                              | 111 |
| 2.9   | 函数的应用举例                              | 118 |
| 专题 II | 函数的综合应用                              | 125 |
| 总结 I  | 知能升华                                 | 135 |
| 总结 II | 导向研练                                 | 139 |
| 第三章   | 数列                                   | 149 |
| 3.1   | 数列及其通项                               | 149 |
| 3.2   | 等差数列                                 | 158 |
| 3.3   | 等差数列前 $n$ 项和                         | 163 |
| 3.4   | 等比数列                                 | 170 |
| 3.5   | 等比数列前 $n$ 项和                         | 179 |
| 专题 I  | 数列求和                                 | 185 |
| 专题 II | 数列应用问题                               | 192 |
| 总结 I  | 知能升华                                 | 204 |
| 总结 II | 导向研练                                 | 216 |
| 第四章   | 三角函数                                 | 221 |
| 4.1   | 角的概念的推广                              | 221 |
| 4.2   | 弧变制                                  | 228 |
| 4.3   | 任意角的三角函数                             | 234 |
| 4.4   | 同角三角函数的基本关系式                         | 241 |
| 4.5   | 正弦、余弦的诱导公式                           | 247 |
| 4.6   | 两角和与差的正弦、余弦、正切                       | 254 |
| 4.7   | 二倍角的正弦、余弦、正切                         | 262 |
| 4.8   | 正弦函数, 余弦函数的图象和性质                     | 269 |
| 4.9   | 函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象 | 279 |

|       |                 |     |
|-------|-----------------|-----|
| 4 .10 | 正切函数的图象和性质      | 285 |
| 4 .11 | 已知三角函数值求角       | 291 |
| 专题    | 三角函数式的变换及应用     | 297 |
| 总结 I  | 知能升华            | 306 |
| 总结 II | 导向研练            | 318 |
| 第五章   | 平面向量            | 325 |
| 5 .1  | 向量              | 327 |
| 5 .2  | 向量的加法和减法        | 330 |
| 5 .3  | 实数与向量的积         | 335 |
| 5 .4  | 平面向量的坐标运算       | 342 |
| 5 .5  | 线段的定比分点         | 349 |
| 5 .6  | 平面向量的数量积及运算律    | 357 |
| 5 .7  | 平面向量积的坐标表示      | 363 |
| 5 .8  | 平移              | 369 |
| 5 .9  | 正弦定理 余弦定理       | 375 |
| 5 .10 | 解斜三角形应用举例       | 385 |
| 总结 I  | 知能升华            | 392 |
| 总结 II | 导向研练 A(向量综合)    | 398 |
|       | 导向研练 B(正余弦定理应用) |     |
|       | .....           | 401 |

# 第一章

## 集合与简易逻辑

19 世纪,整个数学的严格化取得了重要进展,数理逻辑的建立,为数学的进一步发展打下了基础,集合论的一般思想开始渗入数学的各个分支.这不但促进了数学的进一步发展,而且导致了对数学基础更为深刻的分析和对数学概念之间的相互关系以及各个理论结构的探讨.因此,集合与简易逻辑的知识在初中到高中阶段的学习中逐步渗透是至关重要的.集合概念及其理论,称为集合论,是现代数学的重要基础.数学许多重要的分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑等都建立在集合理论的基础上,其所反映的数学思想在广泛的领域中得到应用.逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科,基本的逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具.集合的初步知识与简易逻辑知识是学习和使用数学语言的基础,因此把它们安排在高中数学的起始章.

### 1.1 集合

#### 【研 练 指 要】

本单元重点介绍集合的概念,难点是集合的各个基本概念的内涵,以及相互间的区别和联系.

- (1) 应注意构成集合的元素必须满足确定性、互异性和无序性.
- (2) 元素与集合之间的关系是“属于”或“不属于”的关系.二者必居其一.
- (3) 注意“空集”的概念,注意“0”是自然数.

## 【典例解析】

**例 1** 考察下列每组对象能否构成一个集合？

- (1) 某班的高个同学.
- (2) 学校中的好人.
- (3) 很小的数.
- (4) 某班级 17 岁以下的学生.
- (5) 直角坐标平面内横、纵坐标都大于零的点.
- (6) 比 2 大的几个数.
- (7)  $\pi$  的近似值.
- (8) 某教室内的日光灯.

分析 “高个同学”无明确的标准, 张三是否是高个无法确定, 因此“高个同学”不能构成集合. 类似的(2)、(3)、(6)、(7) 也不能构成集合.

任给一位同学, 可以明确地判断是不是 17 周岁以下, “是”或“不是”二者必居其一, 即符合确定性, (4) 能构成集合. 类似的(5)、(8) 也能构成集合.

**例 2** 用列举法表示下列集合:

- (1) 不大于 6 的非负整数所组成的集合;
- (2)  $\{(x, y) \mid x + y = 4, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ .

解 (1)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;

(2)  $\{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ .

**例 3** 用描述法表示下列集合:

- (1) 所有被 4 除余 1 的自然数集合;
- (2) 坐标平面内第三象限内点的集合.

解 (1)  $\{x \mid x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$  或解答为

$\{x \mid x = 4n - 3, n \in \mathbb{N}^*\}$ , 这里的第二个答案是由于

$4n - 3 = 4n - 4 + 1 = 4(n - 1) + 1, (n - 1) \in \mathbb{N}$  的缘故.

(2)  $\{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$ , 这里  $(x, y)$  不能写成  $x; y$  或  $x, y$ , 必须写成点  $(x, y)$  才行.

**例 4** 设集合  $A = \{xy, y, 10\}$ ,  $B = \{100, y, x\}$ , 若  $A = B$ , 求  $x, y$  的值.

分析 应注意元素的互异性、无序性.

解  $xy = 100,$  解得  $x = -10,$   
 $\textcircled{*} \textcircled{C} \models 10,$   $y = -10,$

此时  $A = \{100, -10, 10\}, B = \{100, -10, 10\}.$

说明 由  $y \neq 10$   $x \neq 10$ , 不然  $\frac{xy}{y} = \frac{100}{10}$ , 集合  $A$  元素不互异.

例5 已知对任意的  $x \in S$  且  $x \in \mathbb{N}^*$ , 集合  $S$  满足下列条件: 若  $x \in S$ , 则  $8 - x \in S$ , 回答下列问题:

- (1) 若  $S$  中只有一个元素, 这个元素是什么?
- (2) 若  $S$  中只有两个元素, 试写出集合  $S$  来;
- (3) 所有满足题设条件的  $S$  共有多少个?

解: (1) 这个元素是 4,  $\because 4 \in S, 8 - 4 = 4 \in S$ ;

(2)  $S$  为  $\{1, 7\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}$ ;

(3)  $S$  共有 15 个, 如  $S = \{1, 4, 7\}, S = \{1, 2, 6, 7\}$  等.

例6 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\},$

- (1) 若  $A$  中只有一个元素, 求  $a$  的值, 并求出这个元素;
- (2) 若  $A$  中至少有一个元素, 求  $a$  的取值范围.

分析 (1) 集合  $A$  中只有一个元素, 等价于方程

$ax^2 + 2x + 1 = 0$  只有一个根或两个相同的根, 而方程中的  $a = 0$  时, 方程就转化为方程  $2x + 1 = 0$ , 可见只有一个根. 当  $a \neq 0$  时, 方程中  $\Delta = 0$  时, 有两个相同的根.

(2) 集合中至少有一个元素, 则方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个根, 所以这个方程除包含题(1)中求得的  $a$  值外, 当  $a \neq 0$  且  $\Delta > 0$  时方程有两个不相同的根.

解 (1)  $\because$  集合  $A$  中只有一个元素,

$\therefore$  当  $a = 0$  时, 解之, 得  $x = -\frac{1}{2},$

当  $a \neq 0,$  得  $a = 1,$  解之, 得  $x = -1,$   
 $\Delta = 4 - 4a = 0,$

$\therefore$  若  $A$  中只有一个元素时,  $a = 0$ , 这个元素为  $-\frac{1}{2};$

或  $a = 1$ , 这个元素为  $-1.$

(2) 因为集合  $A$  中至少有一个元素, 所以



① 当集合中有一个元素时,  $a = 0$  或  $a = 1$ ;

② 当集合中有两个或两个以上元素时, 有  $\begin{matrix} a \neq 0, \\ \Delta > 0, \end{matrix}$  得  $a < 1$

且  $a \neq 0$ , 综上所述可知集合中至少有一个元素时  $a \leq 1$ .

**例 7** 已知某实数集  $A$  满足: 若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ . 证明

(1) 若  $2 \in A$ , 则在  $A$  中还有另外两个数, 求出这两个数;

(2) 集合  $A$  不可能是单元素实数集;

(3) 集合  $A$  中至少有三个不同的元素.

**分析** (1) 根据法则: “若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ ”进行运算即可.

(2) 由法则可知, 若  $a \in A$  且  $a \neq 1$ , 就有  $\frac{1}{1-a} \in A$ . 若集合  $A$  为单元素的实数集, 那么必有  $a = \frac{1}{1-a}$ , 然后得出矛盾.

(3) 还是应用法则, 可以得到集合  $A$  中相异的三个元素.

**证明** (1)  $\because$  若  $a \in A, a \neq 1$ , 则有  $\frac{1}{1-a} \in A$ ,

又  $2 \in A, 2 \neq 1$ , 则有  $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$ ,

$\because -1 \in A, -1 \neq 1$ , 则有  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$ ,

$\because \frac{1}{2} \in A, \frac{1}{2} \neq 1$ , 则有  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$ .

如此循环往复得出另两个数  $-1, \frac{1}{2} \in A$ .

(2) 反证法:

若  $A$  是单元素的实数集,

$\because a \in A, a \neq 1$  时, 有  $\frac{1}{1-a} \in A$ ,

$\therefore a = \frac{1}{1-a}$ , 整理得  $a^2 - a + 1 = 0$ , 方程无实数解,

$\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$ ,  $\therefore$  集合  $A$  不可能是单元素的实数集.

(3)  $\because a \in A, a \neq 1$  时, 有  $\frac{1}{1-a} \in A$ ,

$\therefore \frac{1}{1-a} \in A$ , 且  $\frac{1}{1-a} \neq 1$ ,

即  $a \neq 0$  时, 有  $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \in A$ ,

$\therefore \frac{a-1}{a} \in A$ , 且  $\frac{a-1}{a} \neq 1$ ,

即  $a-1 \neq a$  时, 有  $\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}} = a \in A$ , 如此循环出现三个数

$a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a} \in A$ . 由(2) 知  $a \neq \frac{1}{1-a} \neq \frac{a-1}{a}$ ,

$\therefore$  集合  $A$  中至少有三个不同的元素.

### 【拓展研练】

一、选择题(每题有一个正确答案)

1. 下面六个关系式: ①  $\{0\} = \{0\}$ , ②  $\{0\} \in \{0\}$ , ③  $\{a\} \in \{a, b\}$ , ④  $a \in \{a, b\}$ ,  
⑤  $\mathbb{R} = \{\text{实数集}\}$ , ⑥  $\mathbb{R} = \{\text{实数}\}$ , 正确的是( ).

A. ①②④⑤      B. ②④⑥      C. ①③⑤      D. 都是错的

2. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{6-x} \in \mathbb{N}\}$ , 则用列举法表示集合  $A$  为( ).

A.  $\{2, 3, 4\}$       B.  $\{0, 2, 3, 4\}$       C.  $\{0, 2, 3, 4, 5\}$       D.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. 数集  $\{0, 1, x^2 - x\}$  中的  $x$  不能取哪些数值( ).

A.  $0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$       B.  $1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$       C.  $0, 1$       D.  $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4. 判断下列说法正确的个数

(1) 我国较大的河流组成一个集合.

(2)  $\frac{1}{5}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, 0.2$  这些数组成的集合含有 5 个元素.

(3) 集合  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  与集合  $\{1, 3, 2, 0, 4\}$  表示两个不同集合.

(4) 集合  $\{(x, y) \mid y < 0\}$  表示的是第二象限的点.

A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 3 个

5. 不能形成集合的是( ).

A. 全体  $\mathbb{R}^t \triangle$

B. 《高一代数》中所有习题

C. 《高二几何》中的所有难题

D. 所有的无理数

6. 有下列四个命题: ①  $\{0\}$  是空集; ② 若  $a \in \mathbb{N}$  则  $-a \in \mathbb{N}$ ; ③  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2$

-  $4x + 4 = 0$  有两个元素; ④ 集合  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbb{N}\}$  是有限集, 其中正确命题的个数为( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

## 二、填空题

7. 用另一种形式表示下列集合:  $A = \{(x, y) \mid x + y = 8, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$  则  $A =$  \_\_\_\_\_.

8. 若  $\frac{1-x}{1+x} \in \{x\}$  则  $x$  的值为: \_\_\_\_\_.

## 【参 考 答 案】

1. B 2. C 3. D 4. A 5. C 6. A 7.  $A = \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)\}$  8.  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ .

# 1.2 子集、全集、补集

## 【研 练 指 要】

(1) 了解集合的包含、相等关系的意义, 理解子集、真子集的概念, 理解补集的概念, 了解全集的意义. 子集、补集的概念是这一节的重点.

(2) 弄清元素与子集、属于与包含之间的区别是这一节的难点. 空集是任何集合的子集, 在有关子集、真子集的问题中, 务必注意这一特殊的情况. 学会用韦恩图解题是数形结合的基本思想方法之一.

## 【典 例 解 析】

**例 1** (1) 求满足条件  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} \cap M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$  的集合  $M$  的个数.

(2) 设集合  $A = \{1, 2\}$ , 集合  $B = \{x \in A\}$ , 用列举法写出  $B$ , 并指出集合  $A$  与集合  $B$  的关系.

**分析** (1)  $M$  是集合  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$  的子集, 又  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$  是空集, 它是  $M$  的真子集, 所以  $M$  不是空集, 所以问题归结为求  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$  非空子集的个数.

(2) 集合  $B$  的元素是集合  $A$  的子集, 问题归结为写出集合  $A$  的所有子集.

**解** (1)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} = \{-1, 1\}$  其非空子集为

$\{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}$ , 所以满足条件

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} \cap M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$  的集合  $M$  共 3 个.

(2)  $A$  的子集为  $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset$ ,

$\therefore B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A\} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$ .

集合  $A$  是集合  $B$  的一个元素,  $\therefore A$  与  $B$  的关系是  $A \in B$ .

说明 集合的元素可由集合构成, 应注意准确识别集合的元素.

**例 2** (1) 若集合  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ ,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 = 0\}$ , 且  $S \subseteq P$ , 求由  $a$  可取的值组成的集合.

(2) 若集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ ,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$ , 且  $B \subseteq A$ , 求由  $m$  可取的值组成的集合.

解 (1)  $P = \{-3, 2\}$ , 当  $a = 0$  时  $S = \emptyset$ , 满足  $S \subseteq P$ ;

当  $a \neq 0$ ,  $S = \{-\frac{1}{a}\}$ , 为满足  $S \subseteq P$ , 可使  $-\frac{1}{a} = -3$  或  $-\frac{1}{a} = 2$ ,

此时  $a = \frac{1}{3}$  或  $a = -\frac{1}{2}$ .

故所求  $a$  的取值集合为  $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$ .

(2) 当  $m + 1 > 2m - 1$  即  $m < 2$  时,  $B = \emptyset$ , 满足  $B \subseteq A$ .

$$m + 1 \leq 2m - 1,$$

若  $B \neq \emptyset$  且  $B \subseteq A$ , 有  $m + 1 \geq -2$ , 得  $2 \leq m \leq 3$ ,

$$2m - 1 \leq 5,$$

故  $m < 2$  或  $2 \leq m \leq 3$ , 即所求集合为  $\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq 3\}$ .

**例 3** 若  $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,

$T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$ , 试判断  $S$  与  $T$  两个集合之间存在着怎样一种关系.

解法 1  $\because S = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ ,

$T = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ , 可判断  $S = T$ .

解法 2 由  $2n + 1 = \begin{matrix} 4k + 1, (n = 2k \text{ 时}) \\ 4k - 1, (n = 2k - 1 \text{ 时}) \end{matrix}$  知  $S = T$ .

解法 3  $S$  为全体奇数的集合, 而  $T$  中的  $4k \pm 1$  都为奇数, 故有

$T \subseteq S$ , 又任取  $x \in S$ , 则  $x = 2n + 1 (n \in \mathbb{Z})$ ,

当  $n = 2k (k \in \mathbb{Z})$  时,  $x = 4k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ , 此时  $x \in T$ ,

当  $n = 2k - 1 (k \in \mathbb{Z})$  时,  $x = 4k - 1 (k \in \mathbb{Z})$ , 此时  $x \in T$   
故有  $S \subseteq T$ ,

$$\text{由 } \begin{matrix} T & S \\ S & T \end{matrix} \quad S = T.$$

注意: 解法二最佳, 解法三用到集合相等的概念.

**例 4** 设全集  $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$ ,  $A = \{b, 2\}$ ,  $\complement_U A = \{5\}$ ,  
求实数  $a, b$  的值.

解  $\complement_U A = \{5\}$ ,  $\therefore 5 \in U$  且  $5 \notin A$ , 又  $b \in A$ ,  $\therefore b \in U$ ,

$$\begin{aligned} \text{由此得 } a^2 + 2a - 3 &= 5, & \text{①} \\ b &= 3, & \text{②} \end{aligned} \quad \text{由 ① 得 } a = -4, a = 2,$$

$$\therefore a = 2, b = 3 \text{ 或 } a = -4, b = 3.$$

**例 5** 已知  $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ , 求  $x$  的所有可能情况.

解 由  $\{1, 2\} \subseteq X$  可知  $X$  中至少含有 1, 2 这两个元素, 又由  
 $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$  可知  $X$  是  $\{1, 2, 3, 4\}$  的真子集, 所以  $X$  中最多含有 3 个  
元素. 因此  $X = \{1, 2\}$  或  $X = \{1, 2, 3\}$  或  $X = \{1, 2, 4\}$ .

**例 6** 已知集合  $P = \{2, x, y\}$ ,  $Q = \{2x, y^2, 2\}$ , 且  $P = Q$ ,  
求  $x, y$  的值.

解  $\because P = Q$ ,  $\therefore$  集合  $P, Q$  中的元素应完全相同, 有两种情形:

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 2x, & \text{①} & \quad x = y^2, & \text{③} \\ y &= y^2, & \text{②} & \quad y = 2x. & \text{④} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

(I) 由 ① 得  $x = 0$ ; 由 ② 得  $y = 0$  或  $y = 1$ . 方程组 (I) 的解为

$$\begin{aligned} x &= 0, & x &= 0, & \therefore & x = 0 \\ y &= 0, & y &= 1. & \therefore & y = 0 \end{aligned} \quad \text{与集合中元素的互异性矛盾, 应舍去.}$$

$$\therefore x = 0, y = 1.$$

(2) 在 ③、④ 中消去  $x$ , 得  $2y^2 = y$ ,  $\therefore y = 0$  或  $y = \frac{1}{2}$ .

$\because y = 0$  时  $x = 0$ , 不适合,  $\therefore x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$ .

综上所述得  $x = 0, y = 1$  或  $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}$ .

**例 7** 已知全集  $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$ ,  $A = \{2, a^2 + 7a - 12\}$ ,  $\complement_U A = \{5\}$ , 求  $a$  的值.

解  $\because C_U A = \{5\}, \therefore 5 \in U$  且  $5 \notin A$ ;

$\because a + 7 \in A, \therefore a + 7 \in U$ .

$$\therefore a^2 + 2a - 3 = 5, \quad ①$$

$$\therefore a + 7 \neq 5. \quad ②$$

由 ① 解得  $a = -4, a = 2$ , 它们都适合 ②,

但  $a = 2$  时,  $a + 7 = 9 \notin U$ , 舍去  $a = 2$ .  $\therefore a = -4$ .

**例 8** 设全集  $U = \mathbb{R}$ , 集合  $A = \{a \mid \text{二次方程 } ax^2 - x + 1 = 0 \text{ 有实根}\}$ , 求  ${}_U A$ .

解  $\because A = \{a \mid 1 - 4a \geq 0\} = \{a \mid a \leq \frac{1}{4}\}$ ,

$$\therefore {}_U A = \{a \mid a > \frac{1}{4}\}.$$

### 【拓展研练】

一、选择题(每题有一个正确答案)

1. 若  $A = \{x \mid x > 1\}$ ,  $B = \{x \mid x \geq a\}$ , 且  $B \subseteq A$ , 则( ).

- A.  $a > 1$                       B.  $a \geq 1$                       C.  $a < 1$                       D.  $a \leq 1$

2. 设  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $a$  的取值范围是( ).

- A.  $a \leq -1$                       B.  $a < 1$                       C.  $a \geq 3$                       D.  $a > -1$

3. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ , 且  $A = \{x \in U \mid x^2 - 5x + m = 0\}$ , 若  ${}_U A = \{2, 3\}$ , 则  $m$  的值为( ).

- A. 6                                  B. 4                                  C. 2                                  D. 0

二、填空题

4.  $U = \{x \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $B = \{x \mid x = \frac{1}{4^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ , 则  ${}_U B =$  \_\_\_\_\_.

5. 满足关系  $\{2\} \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$  的集合  $B$  有 \_\_\_\_\_ 个.

6. 设全集  $U = \mathbb{Z}$ ,  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$ ,  $B = \{x \mid x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\}$ , 则  ${}_U A$  与  ${}_U B$  的关系是 \_\_\_\_\_.

7. 集合  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 4n \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $C = \{m \in \mathbb{R} \mid \frac{m-3}{2} \in \mathbb{Z}\}$ , 那么  $A, B, C$  的关系是 \_\_\_\_\_.

8. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x - 1 = 0\}$  且  $B \subseteq A$  则  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题

9. 已知  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{3\}$   ${}_U A$  写出所有满足要求的

集合 B.

10. 设  $U = \{-\frac{1}{3}, 5, -3\}$ ,  $-\frac{1}{3}$  是  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px - 5 = 0\}$  与  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 10x + q = 0\}$  的共有元素, 求  $\complement_U A$ ,  $\complement_U B$ .

【参 考 答 案】

1. A    2. A    3. B    4.  $\complement_U B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^{2n-1}}, n \in \mathbb{N}^*\}$     5. 8 个

6.  $\complement_U A$ ,  $\complement_U B$     7.  $A = B = C$     8. 0 或  $\frac{1}{3}$  或  $-1$     9. B 为  $\{3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}$     10.  $\complement_U A = \{-3\}$ ,  $\complement_U B = \{5\}$

解: A、B 中的方程都有一根为  $-\frac{1}{3}$ , 分别代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p - 5 &= 0, & \therefore p &= -14, \\ \frac{1}{3} - \frac{10}{3} + q &= 0, & q &= 3, \end{aligned}$$

$$\therefore A = \{-\frac{1}{3}, 5\} \quad B = \{-\frac{1}{3}, -3\} \quad \therefore \complement_U A = \{-3\}, \quad \complement_U B = \{5\}$$

## 1.3 交集、并集

【研 练 指 要】

交集与并集的定义分别为  $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ,  $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ; 还要注意  $A \cap B = B \cap A$ ,  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap \mathbb{R} = A$ ,  $A \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ,  $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$ ;  $A \cap B = A$  则  $A \subseteq B$ ,  $A \cup B = A$  则  $B \subseteq A$ ,  $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ ,  $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ , 利用韦恩图可直观地优化解题程序, 这对于解决问题非常必要.

【典 例 解 析】

**例 1** 已知元素  $(1, 2) \in (A \cap B)$ ,

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = ax + b\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - ay - b = 0\}$ , 求 a、b 之值.

$$\begin{array}{ll} \text{解} & \text{由题意} \quad \begin{cases} 4 = a + b, \\ 1 - 2a - b = 0, \end{cases} & \text{解得} \quad \begin{cases} a = -3, \\ b = 7. \end{cases} \end{array}$$

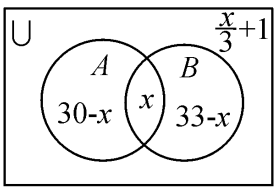
**例 2** 集合  $P = \{s \in \mathbb{R} \mid s = x^2 + 3x + 1\}$ ,  $T = \{t \in \mathbb{R} \mid t = y^2 + 3y + 1\}$

之间的关系是( ).

答案  $P = T$ .

**例 3** 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度, 有如下结果: 赞成 A 的人数是全体的五分之三, 其余的不赞成; 赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人, 其余的不赞成. 另外, 对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人, 问 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生, 各有多少人?

**解** 如图: 赞成 A 的人数为  $50 \times \frac{3}{5} = 30$ , 赞成 B 的人数为  $30 + 3 = 33$ , 记 50 名学生集合为 U, 设对 A、B 都赞成的学生人数为 x, 则对 A、B 都不赞成的



学生人数为  $\frac{x}{3} + 1$ , 赞成 A 而不赞成 B 的人数为  $30 - x$ , 赞成 B 而不赞成 A 的人数为  $33 - x$ . 由题意得方程  $(30 - x) + (33 - x) + x + (\frac{x}{3} + 1) = 50$ , 解得  $x = 21$ ,  $\frac{x}{3} + 1 = 8$ , 所以, 对 A、B 都赞成的有 21 人, 对 A、B 都不赞成的学生有 8 人.

**例 4** 已知  $A = \{2, 5\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + px + q = 0\}$ ,  $A \cup B = A$ ,  $A \cap B = \{5\}$ , 求 p, q 的值.

**解** 由于  $A \cup B = A$ , 知  $B \subseteq A$ ,  $\because A \cap B = \{5\}$ , 且  $A = \{2, 5\} \therefore 5 \in B$  且  $2 \notin B$ ,  $\therefore B = \{5\}$ , 因此方程  $x^2 + px + q = 0$  有两个相等的实根, 即  $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 0$ , 由此得  $p = -10$ ,  $q = 25$ .

**例 5** 设  $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - ax + 2 = 0\}$ , 若  $A \cup B = A$ , 求由 a 的值组成的集合.

**解** 由  $A \cup B = A$ , 可知  $B \subseteq A$ , 而  $A = \{1, 2\}$ , 故 B 可为  $\{1, 2\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  或  $\emptyset$ .

当  $B = \{1, 2\} = A$  时, 显然有  $a = 3$ ;

当  $B = \{1\}$ ,  $\{2\}$  或  $\emptyset$  时, 方程  $x^2 - ax + 2 = 0$  有等根或无实根, 故  $\Delta \leq 0$ , 即  $a^2 - 8 \leq 0$ , 解得  $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ , 但  $a = \pm \sqrt{2}$  时, 得

$B = \{-\sqrt{2}\}$  或  $\{\sqrt{2}\}$ , 不能满足  $B \subseteq A$ , 故所求 a 值的集合为



$$\{3\} \cup \{a \mid -2 < a < 2\}.$$

**例 6** 已知集合  $A = \{x \mid -2 < x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ,

$$B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}, \text{ 且 } A \cap B = \{x \mid 1 < x \leq 3\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x + 2 > 0\}, \text{ 试求 } a, b \text{ 之值.}$$

**分析** 借助数轴, 进行子、交、并、补运算是常用的数形结合法.

**解** 把数集  $A, A \cap B, A \cup B$  表示在数轴上, 如图可知,

$B$  中的元素大于等于  $-1$ , 且小于等于  $3$ , 即  $-1 \leq x \leq 3$ ,

$\therefore$  不等式  $x^2 + ax + b \leq 0$  的解集为  $-1 \leq x \leq 3$ .

$$\begin{aligned} \therefore -1 + 3 &= -a, & a &= -2, b = -3. \\ (-1)3 &= b, \end{aligned}$$

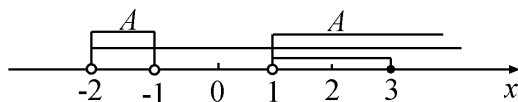


图 1-2

### 【拓展研练】

一、选择题(每题有一个正确答案)

1. 设  $A = \{1, 2\}$ , 则满足  $X \cup A = \{1, 2, 3\}$  的集合  $X$  的个数是( ).

- A. 8                      B. 7                      C. 4                      D. 1

2. 设全集  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $A$  与  $B$  都是它的子集, 且  $A \cap B = \{b\}$ ,  
 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{d, f\}$ ,  $(\complement_U A) \cap B = \{a, h\}$ , 则集合  $A$  为( ).

- A.  $A = \{c, e\}$                       B.  $A = \{c, e, g\}$   
 C.  $A = \{b, c, e, g\}$                       D.  $A = \{b, e, g\}$

3. 设  $U = \mathbb{Z}$ ,  $M = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $P = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,

则  $M \cap (\complement_U P) = ( )$ .

- A.  $\{x \mid x = 3k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$                       B.  $\{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$   
 C.  $\{x \mid x = 6k \pm 2, k \in \mathbb{Z}\}$                       D.  $\{x \mid x = 4k \text{ 或 } x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

4. 设集合  $M = \{x \mid f(x) = 0\}$ ,  $T = \{x \mid g(x) = 0\}$ , 则方程

$f(x) \cdot g(x) = 0$  的解集是( ).

- A.  $M \cap T$                       B.  $M \cup T$                       C.  $M$                       D.  $T$

5. 全集为  $U$ , 非空集合  $M, N$  满足:  $M \cap N = \emptyset$ , 则下列集合中一定是空集的是( ).

- A.  $(\complement_U M) \cap (\complement_U N)$                       B.  $(\complement_U M) \cup N$   
 C.  $(\complement_U M) \cup (\complement_U N)$                       D.  $M \cap (\complement_U N)$

6. 如图 1-3,  $U$  是全集,  $M, P, S$  是  $U$  的三个子集, 则阴影部分所表示的集合是( ).