

全国师范大学附中教研信息网

高中数学

综合·应用·创新

导向研练

(高二分册)

高体柱 杨光宇 编著
周鹏家 王洪志

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学综合·应用·创新导向研练 高二/高体柱
等编著. —北京:北京工业大学出版社, 2002.7

ISBN 7-5639-1049-2

I. 高... II. 高... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065110 号

高中数学
综合·应用·创新
导向研练
(高二分册)
高体柱 杨光宇 编著
周鹏家 王洪志

*

北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308

各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷

*

2002 年 7 月修订第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷
880 mm×1230 mm 32 开 11.75 印张 344 千字
印数:1~8000 册

ISBN 7-5639-1049-2/G·572

定价:13.00 元

高中数学综合·应用·创新导向研练

编委会

(按姓氏笔画排序)

南京师范大学附中	高级教师	方华铭
西南师范大学附中	高级教师	邓晓鹏
北京师范大学二附中	特级教师	阮国杰
湖南师范大学附中	高级教师	汤正良
陕西师范大学附中	高级教师	辛 宇
华东师范大学附中	特级教师	陆继椿
东北师范大学一附中	高级教师	罗瑞兰
首都师范大学附中	特级教师	唐朝智
辽宁师范大学附中	高级教师	高体柱
华中师范大学附中	特级教师	章 英
华南师范大学附中	特级教师	彭国雄

第六章

不等式

不等式是数学的基础知识,是解决数学问题的工具之一.

基本内容包括:

1. 任意两个实数比较大小的基本方法(作差判断符号).
2. 不等式性质的五个定理、三个推论及其证明过程(这是证明和
解不等式的主要依据).
3. 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数(即均值定
理,在求最值和证明中经常用到).
4. 证明不等式最基本、最常用的方法:比较法、综合法、分析法.
5. 一元一次、一元二次不等式解法是解不等式的基本方法,解其
它不等式(分式、无理不等式、超越不等式),最终都转化为解一元一次、
一元二次不等式.
6. 含有绝对值的不等式的基本定理及推论为含有绝对值的不等
式证明及解法提供了理论依据.

6.1 不等式的性质

【研 练 指 要】

1. 实数性质: $a, b \in \mathbf{R}$ 则
- $$\begin{array}{ll} a > b & a - b > 0; \\ a = b & a - b = 0; \\ a < b & a - b < 0. \end{array}$$

比较两个实数大小,可归结为判断两个实数差的符号.

2. 不等式的性质:

定理 1. $a > b \quad b < a;$

定理 2. $a > b, b > c \quad a > c$;

定理 3. $a > b \quad a + c > b + c$;

推论 $a > b, c > d \quad a + c > b + d$;

定理 4. $a > b$ 且 $c > 0 \quad ac > bc$;

$a > b$ 且 $c < 0 \quad ac < bc$;

推论 1. $a > b > 0, c > d > 0 \quad ac > bd$;

推论 2. $a > b > 0 \quad a^n > b^n \quad (n \in N)$;

定理 5. $a > b > 0 \quad {}^n a > {}^n b \quad (n \in N)$.

3. 熟记不等式性质的五个定理和三个推论, 重点掌握定理、推论的证明过程. 这些证明方法对我们以后学习不等式的证明及养成逻辑推理的习惯很有帮助.

【典例解析】

例 1 设 $x > a > 0$, 求证 $x^3 + 13a^2x > 5ax^2 + 9a^3$.

分析 只要证 $(x^3 + 13a^2x) - (5ax^2 + 9a^3) > 0$ 即可.

证明 $(x^3 + 13a^2x) - (5ax^2 + 9a^3)$
 $= (x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3) + (-2ax^2 + 10a^2x - 8a^3)$
 $= (x - a)^3 - 2a(x^2 - 5ax + 4a^2)$
 $= (x - a)^3 - 2a(x - a)(x - 4a)$
 $= (x - a)(x^2 - 4ax + 9a^2)$
 $= (x - a)[(x - 2a)^2 + 5a^2]$.

$\because x > a > 0, \therefore x - a > 0$,

又 $\because (x - 2a)^2 + 5a^2 > 0$,

$\therefore (x - a)[(x - 2a)^2 + 5a^2] > 0$,

即 $x^3 + 13a^2x > 5ax^2 + 9a^3$.

说明 本题的关键是因式分解. 对每个因式的符号要给予详尽的说明. 配方法是经常使用的方法.

例 2 已知 $x > 0$, 且 $x \neq 1$, 试比较 $1 + \log_x 3$ 与 $2\log_x 2$ 的大小.

分析 $1 + \log_x 3 - 2\log_x 2 = 1 + \log_x \frac{3}{4} = \frac{\log_{\frac{3}{4}} x + 1}{\log_{\frac{3}{4}} x}$.

令 $t = \log_{\frac{3}{4}} x (t \neq 0)$, 则上式 $= \frac{t+1}{t}$,

故只要确定 $\frac{t+1}{t}$ 符号即可 .

$$\text{解} \quad 1 + \log_x 3 - 2\log_x 2 = \frac{\log_{\frac{3}{4}} x + 1}{\log_{\frac{3}{4}} x}$$

$$\text{令 } t = \log_{\frac{3}{4}} x (t \neq 0), \text{ 则 } 1 + \log_x 3 - 2\log_x 2 = \frac{t+1}{t} .$$

$\therefore \frac{t+1}{t} (t+1)t (t \neq 0)$ 因为:

(1) $t > 0$ 时, $(t+1)t > 0$;

(2) $-1 < t < 0$ 时, $(t+1)t < 0$;

(3) $t = -1$ 时, $(t+1)t = 0$;

(4) $t < -1$ 时, $(t+1)t > 0$,

故由(1)(4), 知 $t > 0$ 或 $t < -1$ 时,

即 $\log_{\frac{3}{4}} x > 0$ 或 $\log_{\frac{3}{4}} x < -1$ 时,

也就是 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{4}{3}$ 时,

$$1 + \log_x 3 > 2\log_x 2 .$$

由(2) 知, $-1 < t < 0$ 时,

即 $-1 < \log_{\frac{3}{4}} x < 0$ 时, 也就是 $1 < x < \frac{4}{3}$ 时,

$$1 + \log_x 3 < 2\log_x 2 .$$

由(3) 知, $t = -1$ 时, 即 $\log_{\frac{3}{4}} x = -1$,

也就是 $x = \frac{4}{3}$ 时, $1 + \log_x 3 = 2\log_x 2$.

说明 换元和转化思想, 降低了本题难度 . 也可以直接作差后讨论符号 .

因为 $1 + \log_x 3 - 2\log_x 2 = \log_x \frac{3x}{4}$, 所以

(1) 当 $\begin{matrix} x > 1 \\ \frac{3}{4}x > 1 \end{matrix} \quad x > \frac{4}{3} \text{ 时, } \log_x \frac{3}{4}x > 0;$

(2) 当 $\begin{matrix} x > 1 \\ 0 < \frac{3}{4}x < 1 \end{matrix} \quad 1 < x < \frac{4}{3} \text{ 时, } \log_x \frac{3}{4}x < 0;$

$$(3) \text{ 当 } \begin{matrix} x > 1 \\ \frac{3x}{4} = 1 \end{matrix} \quad x = \frac{4}{3} \text{ 时, } \log_x \frac{3}{4} x = 0;$$

$$(4) \text{ 当 } \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < \frac{3}{4} x < 1 \end{matrix} \quad 0 < x < 1 \text{ 时, } \log_x \frac{3x}{4} > 0.$$

綜上述, $x > \frac{4}{3}$ 或 $0 < x < 1$ 时, $1 + \log_x 3 > 2\log_x 2$;

$$x = \frac{4}{3} \text{ 时, } 1 + \log_x 3 = 2\log_x 2;$$

$$1 < x < \frac{4}{3} \text{ 时, } 1 + \log_x 3 < 2\log_x 2.$$

例 3 已知 $a < 0$, $-1 < b < 0$, 那么下列不等式成立的是().

$$A. a > ab > ab^2$$

$$B. ab^2 > ab > a$$

$$C. ab > a > ab^2$$

$$D. ab > ab^2 > a$$

分析 只要比较 $1, b, b^2$ 大小即可.

解 $\because -1 < b < 0, \therefore b < b^2 < 1$; 又 $\because a < 0$,

$\therefore ab > ab^2 > a$, 故选 D.

说明 要注意观察题中的条件和结论, 从而找出解题方法. 本题也可以用赋值法来作: 令 $a = -2, b = -\frac{1}{2}$, 代入即可得出正确结论.

例 4 若实数 a, b, c, d 满足条件: (1) $d > c$, (2) $a + b = c + d$, (3) $a + d < b + c$, 试确定 a, b, c, d 的大小.

分析 利用赋值法很容易得出结论. 令 $d = 5, c = 4, a = 3, b = 6$, 可知

$$a + b = c + d \quad \text{从而得出 } b > d > c > a.$$

$$a + d < b + c$$

但赋值法得的结论, 需要给出证明.

$$\text{解 } \because a + d < b + c \quad \begin{matrix} a + b + d < 2b + c \\ a + b = c + d \end{matrix}$$

$$c + 2d < 2b + c \quad d < b, \quad \text{①}$$

$$\because a + d < b + c \quad \begin{matrix} a + d + c < b + 2c \\ a + b = c + d \end{matrix}$$

$$2a + b < b + 2c \quad a < c \quad \textcircled{2}$$

$$\text{又} \because d > c \quad \textcircled{3}$$

由①②③可知, $a < c < d < b$.

例 5 已知, $a > b > 0, c > d > 0, n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1$,

$$\text{求证} \quad {}^n \frac{a}{d} > {}^n \frac{b}{c}.$$

分析 只要证明 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ 即可.

$$\text{证明} \quad \because \frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{dc},$$

$$\because \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \quad ac > bd \quad ac - bd > 0,$$

$$\text{因此可知} \quad \frac{ac - bd}{dc} > 0,$$

$$\therefore \frac{a}{d} > \frac{b}{c} > 0, \text{可推出} \quad {}^n \frac{a}{d} > {}^n \frac{b}{c}.$$

说明 例 4、例 5 主要考查不等式性质的应用及推理论证能力。

例 6 若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则().

$$\text{A. } a^2 > b^2$$

$$\text{B. } \frac{b}{a} < 1$$

$$\text{C. } \lg(a - b) > 0$$

$$\text{D. } \left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

$$\text{分析} \quad \text{A. } a^2 > b^2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) > 0, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{又} \quad a > b, a - b > 0, \quad \textcircled{2}$$

由②知, $a + b < 0$ 时①不成立.

$$\text{B. } \frac{b}{a} < 1 \quad \frac{b}{a} - 1 < 0 \quad \frac{b - a}{a} < 0, \quad \textcircled{3}$$

$$\text{又} \because a > b, b - a < 0, \quad \textcircled{4}$$

由④知, $a < 0$ 时,③不成立.

$$\text{C. } \lg(a - b) > 0 \quad \begin{array}{l} a - b > 0 \\ a - b > 1 \end{array} \quad \textcircled{5}$$

$$\because a > b, a - b > 0, \quad \textcircled{6}$$

又 $\because a, b$ 是任意实数, $\therefore a - b > 1$ 不一定成立.

D. 因为 $a > b$, 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数,

所以, $f(a) < f(b)$, 即 $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$ 成立.

综上所述可知: D 正确.

例 7 已知 $a > b$ 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小关系为().

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 或 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

D. 以上答案都不对

分析 $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$, 由 $a > b$ 知 $b-a < 0$, 只要讨论 ab 符号即可.

解 $\because a > b$,

若 $ab > 0$ 时, $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab} \quad \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$;

若 $ab < 0$ 时, $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

由此知, C 正确.

说明 利用不等式性质证明不等式时, 有时对字母的取值范围要进行分类讨论.

例 8 已知 $a > b > 0, c < d < 0$, 求证: $\frac{b}{a-c} < \frac{a}{b-d}$.

证明 $\begin{array}{lll} a > b > 0 & a > b > 0 & a > b > 0 \\ c < d < 0 & -c > -d > 0 & a-c > b-d > 0 \\ a > b > 0 & & \end{array}$
 $\frac{1}{b-d} > \frac{1}{a-c} > 0 \quad \frac{a}{b-d} > \frac{b}{a-c} > 0.$

说明 利用不等式性质证明时, 要特别注意定理成立的条件.

【拓展研练】

一、选择题

1. 若 $x < 1$, 则().

A. $\frac{1}{x} < 1$

B. $x^2 < 1$

C. $x^3 - 1 < 0$

D. $|x| - 1 < 0$

2. 设 $a > b > m > 0, x = \frac{b-m}{a-m}, y = \frac{b}{a}, z = \frac{b+m}{a+m}$, 则 x, y, z 的大小关系是().

A. $y > x > z$

B. $z > y > x$

C. $x > y > z$

D. $y > z > x$

3. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式中不能成立的是().

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C. $|a| > |b|$

D. $a^2 > b^2$

4. 设 $a > b > 0$, $x = a + b - a$, $y = a - a - b$, 则 x, y 的大小关系是().

A. $x > y$

B. $x \geq y$

C. $x < y$

D. $x \leq y$

5. 若 $a > 0, b > 0$, 则不等式 $-b < \frac{1}{x} < a$ 等价于().

A. $x < -\frac{1}{b}$ 或 $x > \frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{b} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{a}$

C. $-\frac{1}{a} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{b}$

D. $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$

6. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则下列各式中恒成立的是().

A. $-2 < \alpha - \beta < 2$

B. $-2 < \alpha - \beta < -1$

C. $-2 < \alpha - \beta < 0$

D. $-1 < \alpha - \beta < 1$

7. 当 $a > b > c$ 时, 下列不等式恒成立的是().

A. $ab > ac$

B. $a|c| > b|c|$

C. $|ab| > |bc|$

D. $(a-b)|c-b| > 0$

8. 如果 $-1 < a < b < 0$, 则有().

A. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < b^2 < a^2$

B. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < a^2 < b^2$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < b^2 < a^2$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < a^2 < b^2$

9. 如果 $a > b$, 那么在 ① $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, ② $\arctan a > \arctan b$, ③ $\lg(a^2 + 1) > \lg(b^2 + 1)$, ④ $(\sin \theta)^a < (\sin \theta)^b$ $0 < \theta < \frac{\pi}{b}$ 中正确的是().

A. ② 和 ③

B. ① 和 ③

C. 仅有 ④

D. ② 和 ④

10. 已知 $x > y > z$, 且 $x + y + z = 2$, 则().

A. $xy > yz$

B. $xz > yz$

C. $xy > xz$

D. $x|y| > z|y|$

11. 若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则().

A. $a^2 > b^2$

B. $\frac{b}{a} < 1$

C. $\lg(a-b) > 0$

D. $\frac{1}{2}^a < \frac{1}{2}^b$

12. 下列四个命题中, 真命题是().

A. $\begin{matrix} x > 2 & x + y > 5 \\ y > 3 & xy > 6 \end{matrix}$

$$\text{B. } a > b \text{ 且 } ab \neq 0 \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{C. } \lg(a^2 + 1) > \lg(b^2 + 1) \quad a > b$$

$$\text{D. } c < 0 \quad 2^c < \frac{1}{2}^c$$

13. 设 $f(x) = |\lg x|$, 若 $0 < a < b < c$, 且 $f(a) > f(c) > f(b)$, 则有 ().

$$\text{A. } (a-1)(c-1) > 0$$

$$\text{B. } ac > 1$$

$$\text{C. } ac = 1$$

$$\text{D. } ac < 1$$

二、判断题

14. 下列命题是否正确, 说明理由.

(1) 若 $a > b, c = d$, 则 $ac > bd$;

(2) 若 $ac < bc$, 则 $a < b$;

(3) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

(4) 若 $a > b, c < d$, 则 $a + c > b + d, ac > bd$;

(5) 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$;

(6) 若 $a > b, c > d$, 则 $a - c > b - d$;

(7) 若 $a > b$, 则 $a^n > b^n, {}^n a > {}^n b$.

三、解答题

15. 设 $60 < a < 84, 28 < b < 33$, 求 $a + b, a - b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

16. 设 $a > 0, a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 与 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小, 并证明你的结果.

17. 求使不等式 $a^2 > b^2, \frac{a}{b} > 1, \lg(a-b) > 0, 2^a > 2^{(b-1)}$ 都成立的 a 与 b 的关系.

18. 已知 $f(x) = ax^2 - c$, 且 $-4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

【参 考 答 案】

1.C 2.C 3.B 4.C 5.A 6.C 7.D 8.A 9.D 10.C

11.D 12.D 13.D

14. (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)均不正确.

15. 由 $60 < a < 84, 28 < b < 33$ 可得 $88 < a + b < 117$.

又 $-33 < -b < -28$, 故 $27 < a - b < 56$.

$\therefore \frac{1}{33} < \frac{1}{b} < \frac{1}{28}, \therefore \frac{60}{33} < \frac{a}{b} < \frac{84}{28}$, 即 $\frac{20}{11} < \frac{a}{b} < 3$.

$$16. \because t > 0, \therefore \frac{1}{2} \log_a t = \log_a t, \text{又} \because (t - 1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore t + 1 \geq 2t, \frac{t+1}{2} \geq t,$$

$$\therefore \text{当 } a > 1 \text{ 时}, \log_a \frac{t+1}{2} \geq \log_a t = \frac{1}{2} \log_a t;$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时}, \log_a \frac{t+1}{2} \leq \frac{1}{2} \log_a t.$$

$$(a - b)(a + b) > 0$$

$$17. \frac{a-b}{b} > 0 \quad a > b + 1 > b > 0.$$

$$a - b > 1$$

$$a > b + 1$$

$$18. \text{解: } f(1) = a - c, f(2) = 4a - c,$$

$$\text{设 } f(3) = mf(1) + nf(2) = 9a - c,$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad m + 4n &= 9 & m &= -\frac{5}{3} \\ -m - n &= -1 & n &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{则 } \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3} f(1) \leq \frac{20}{3}, \quad \frac{8}{3} \leq \frac{8}{3} f(2) \leq \frac{40}{3},$$

$$f(3) = \frac{5}{3}(1) + \frac{8}{3} f(2),$$

$$\therefore -1 \leq f(3) \leq 20.$$

6.2 算术平均数与几何平均数

【研 练 指 要】

1. 如果 $a, b \in \mathbf{R}$, 那么 $(a - b)^2 \geq 0$,

即 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号) .

2. 定理: 如果 a, b 是正数, 那么 $\frac{a+b}{2} \geq ab$ (当且仅当 $a = b$ 时取等号) .

这里称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a, b 的算术平均数, 称 ab 为 a, b 的几何平均数 .

这个定理又可叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数 这个定理又简称为均值定理 .

3. 均值定理的应用(求最大值或最小值) .

已知 x, y 都是正数,

(1) 如果积 xy 是定值 p , 那么当 $x = y = \sqrt{p}$ 时, 积 $x + y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$;

(2) 如果和 $x + y$ 是定值 s , 那么当 $x = y = \frac{s}{2}$ 时, 积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

要特别注意由均值定理求最大值(最小值) 的三个条件: ① x, y 为正数, ② 积为定值(和为定值), ③ $x = y$ 时取得最值 .

4. 均值定理可以推广到三元的情况 .

即 a, b, c 是正数, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$,

当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立 .

或写成 $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ 形式 .

【典例解析】

例 1 下列命题正确的是() .

A. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2

B. 函数 $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$ 的最小值为 2

C. 函数 $y = 2 - 3x - \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的最大值为 $2 - 4\sqrt{3}$

D. 函数 $y = 2 - 3x - \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的最小值为 $2 - 4\sqrt{3}$

分析 A. 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$,

因此可知 $y = x + \frac{1}{x}$ 没有最小值 .

B. $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \frac{x^2 + 2 + 1}{x^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + 2} > 1$, 等号

不成立, 没有最小值 2 .

因为若等号成立, 需 $x^2 + 2 = \frac{1}{x^2 + 2}$ 即 $x^2 + 2 = 1$ ① 而

① 不成立, 故 $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$ 没有最小值.

$$C. \because 3x + \frac{4}{x} \geq 2 \quad 3 \cdot 4 = 4 \quad 3 \quad (x > 0),$$

当 $3x = \frac{4}{x}$, 即 $x = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

$$\therefore \text{函数 } y = 2 - 3x - \frac{4}{x} = 2 - (3x + \frac{4}{x}) \leq 2 - 4 \quad 3,$$

即函数有最大值 $2 - 4 \quad 3$, 此时 $x = \frac{2}{3}$.

D. 由 C 可知 D 最小值为 $2 - 4 \quad 3$ 不成立. 综上述, C 正确.

说明 本题主要考查能否正确运用均值不等式求最值. 用均值不等式求最值的三个条件一个也不能少.

例 2 (1) 正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为

_____.

(2) $x^2 + 2y^2 = 1$, 则 $x^2 \cdot y^4$ 的最大值为_____.

解 (1) $\because x, y \in \mathbf{R}^+$, $x + 2y = 1$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + 2y}{x} + \frac{x + 2y}{y}$$

$$= 1 + 2 \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq 3 + 2 \quad 2,$$

当 $2 \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = 2y$, 也就是 $y = \frac{1}{2 + 2} = \frac{2 - 2}{2}$,

$x = 2 - 1$ 时, 等号成立. 故 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 最小值为 $3 + 2 \quad 2$.

$$(2) x^2 + 2y^2 = 1 \therefore x^2 \cdot y^4 = x^2 \cdot y^2 \cdot y^2 \leq \frac{x^2 + y^2 + y^2}{3}^3 =$$

$$\frac{1}{3}^3 = \frac{1}{27}, \text{ 当 } x^2 = y^2 = \frac{1}{3} \text{ 时, 等号成立. 故 } x^2 \cdot y^4 \text{ 的最大值为 } \frac{1}{27}.$$

说明 根据(1)、(2)的条件 $x + 2y = 1$, x, y 为正数, 及 $x^2 + 2y^2 = 1$, 不难发现, 用换元法也可求解. 作法是:

(1) 令 $x = \cos^2 \theta$, $2y = \sin^2 \theta$,

$$\text{则 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \tan^2 \theta + 2(1 + \cot^2 \theta) \\
 &= 3 + \tan^2 \theta + 2\cot^2 \theta \geq 3 + 2\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

当 $\tan^2 \theta = 2\cot^2 \theta$ 时, 即 $\tan^2 \theta = 2, \cot^2 \theta = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 令 } x^2 &= \cos^2 \theta, 2y^2 = \sin^2 \theta, \text{ 则 } x^2 \cdot y^4 = \cos^2 \theta \cdot \frac{\sin^4 \theta}{4} = \cos^2 \theta \\
 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} &\leq \frac{\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \theta}{2}}{3} = \frac{1}{27}.
 \end{aligned}$$

当 $\cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{2}$ 时, 即 $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

利用不等式求最大值或最小值, 要注意变量是否为正, 和或积是否为定值, 等号能否成立.

通过变形, 使和或积为定值, 是使用不等式求最值的基本技巧. 如本例.

例 3 (1) 求 $f(x) = 4x^2 + \frac{16}{(x^2 + 1)^2}$ 的最小值;

(2) 设 $x > y > 0, xy = 1$, 求 $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ 的最小值;

(3) 关于 x 的方程 $9^x + (4 + a) \cdot 3^x + 4 = 0$ 有解, 求实数 a 的取值范围.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (1) f(x) &= 4x^2 + \frac{16}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= 4x^2 + 4 + \frac{16}{(x^2 + 1)^2} - 4 \\
 &= 2(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) + \frac{16}{(x^2 + 1)^2} - 4 \\
 &\geq 3 \sqrt[3]{2(x^2 + 1) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot \frac{16}{(x^2 + 1)^2}} - 4 \\
 &= 3 \times 4 - 4 = 8.
 \end{aligned}$$

当 $2(x^2 + 1) = \frac{16}{(x^2 + 1)^2}$, 即 $x^2 + 1 = 2$ 时, 等号成立.

故 $f(x)$ 最小值为 8.

(2) $\because x > y > 0, xy = 1, \therefore x - y > 0$

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2}{x - y}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{x-y} + \frac{2}{x-y} = x-y + \frac{2}{x-y} \geq 2 \quad 2.$$

当 $x-y = \frac{2}{x-y}$, 即 $x-y = 2$,

也就是 $x = 2 + \frac{6-2}{2} = \frac{6+2}{2}$, $y = \frac{6-2}{2}$ 时, 等号成立.

故 $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 最小值为 $2 \quad 2$.

(3) 由 $9^x + (4+a) \cdot 3^x + 4 = 0$,

$$\text{得} \quad a = -3^x + \frac{4}{3^x} + 4. \quad \textcircled{1}$$

$$\because 3^x + \frac{4}{3^x} \geq 2 \quad 3^x \cdot \frac{4}{3^x} = 4, \quad \textcircled{2}$$

当 $3^x = \frac{4}{3^x}$, 即 $3^x = 2$ 时, 等号成立.

由 ①② 得 $a \leq -8$.

故 a 的取值范围是 $(-\infty, -8]$.

例 4 (1) 设长方体的体积为定值 V , 求它的表面积的最小值.

(2) 设长方体的对角线为定长 L , 求它的表面积的最大值.

解 (1) 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 则 a, b, c 为正数.

依题意 $V = abc$, 则长方体表面积

$$\begin{aligned} S &= 2(ab + bc + ca) \\ &\geq 2 \cdot 3 \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} \\ &= 6 \sqrt[3]{V^2}. \end{aligned}$$

当 $ab = bc = ca$, 即 $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ 时, 等号成立.

即长方体表面积最小值为 $6 \sqrt[3]{V^2}$.

(2) 设长方体长、宽、高分别为 a, b, c , 则 a, b, c 为正数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = L^2$. 则长方体表面积

$$\begin{aligned} S &= 2(ab + bc + ca) \\ &\leq a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 = 2L^2. \end{aligned}$$

当 $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3} L$ 时, 等号成立.

故长方体表面积最大值为 $2L^2$.

例 5 制造容积为 $\frac{\pi}{2}$ 立方米的无盖圆柱形桶, 用来做底面的金属板价格为每平方米 30 元, 做侧面的金属板的价格为每平方米 20 元, 要使用料成本最低, 求此圆柱形桶的半径和高.

解 设圆柱形桶底面半径为 r , 高为 h , (单位: 米)

$$\text{则 } \pi r^2 h = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } r^2 h = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{桶的用料造价 } y &= 30\pi r^2 + 20 \cdot 2\pi rh \\ &= 30\pi r^2 + 40\pi rh \\ &= 10\pi(3r^2 + 4rh) \quad \textcircled{2} \\ &= 10\pi(3r^2 + 2rh + 2rh) \\ &\geq 10\pi \cdot 3^3 \cdot 3r^2 \cdot 2rh \cdot 2rh \\ &= 30\pi \cdot 12r^4 h^2 \\ &= 30\pi \cdot 12 \times \frac{1}{4} = 30^3 3\pi. \end{aligned}$$

当且仅当 $3r^2 = 2rh$, 即 $r = \frac{2}{3}h$ 时,

也就是 $h = \frac{3}{2}$, $r = \frac{3}{3}$ 时,

桶的用料成本最低, 最低成本为 $30^3 3\pi$ 元.

也可以这样来解: 由 ① 得 $h = \frac{1}{2r^2}$, 代入 ② 得

$$\begin{aligned} y &= 10\pi \cdot 3r^2 + \frac{2}{r} = 10\pi \cdot 3r^2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \\ &\geq 10\pi \cdot 3^3 \cdot 3r^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = 30^3 3\pi, \end{aligned}$$

当 $3r^2 = \frac{1}{r}$, 即 $r = \frac{3}{3}$ 时, 等号成立.

说明 建立函数关系式, 再利用不等式求函数的最大值或最小值, 是多元函数, 或高于二次的函数求最值经常使用的方法, 如上述的例 4、例 5.

【拓展研练】

一、选择题

1. 若 $a \neq b$, 且 a, b 为正实数, 下列各数中最小的是().