

全能训练丛书

高中数学知识能力训练

全国铁路重点中学数学教学研究会 编

中国铁道出版社

1999年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

铁路重点中学的师资力量、教学质量、高考升学率在全国许多省市名列前茅,不少特、高级教师在当地省市具有极高的声誉和影响.全国铁路重点中学校长研讨会理事组织各学科教学研究会编写了“全能训练丛书”.丛书具有如下特点:

- 1. 集思广益,博采众长.丛书不仅荟萃了全国各地高考复习的成功经验,而且是教研会十多年教研成果的总结.
- 2. 全面系统.丛书内容覆盖了“教纲”和“考纲”要求的各知识点,突出难点和重点,基本囊括了各种基本技巧.
- 3. 精、新、活、巧.精指选编例题、习题精益求精;新指例题、习题尽可能新颖.活指注重灵活运用;巧指引导学生巧解习题,掌握各种解题技巧.

本书共 14 章,前 12 章与教材内容一致,每章由知识结构、知识要点和学习水平、例题分析、习题和本章测试题组成.其中例题分析是重点,每个例题代表一种类型或技巧,基本涵盖了各种类型、各种技巧的考题.最后 2 章是专题讲座和综合测试题.专题讲座,是根据近年高考综合题的特点编写的,内含数学应用题、分类讨论、数形结合、开放性问题、怎样解综合应用题;综合测试题是为自我检测而精心编写的几套高考模拟试题.书末附有 1999 年高考数学试题及解答、所有训练题的参考答案或提示.

本书是高中会考和高考的辅助教材,也可作为平时教学训练和检测用书.

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学知识能力训练/邓成敏,赵翼西主编.- 北京:中国铁道出版社,1999
(铁路名师指导系列/刘崇俊主编)
ISBN 7-113-03365-2

I .高… II .①邓…②赵… III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 14986 号

书 名: 全能训练丛书
高中数学知识能力训练
著作责任者: 全国铁路重点中学数学教学研究会
出版·发行: 中国铁道出版社 (100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑: 李小军
封面设计: 薛小卉
印刷: 北京市燕山印刷厂
开 本: 78× 1092 1/16 印张: 13.75 字数: 446 千
版 本: 1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷
印 数: 1—5000 册
书 号: ISBN7-113-03365-2/O · 70
定 价: 15.00 元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换.

“全能训练丛书”编委会

顾问 李 森

主任 刘崇俊

副主任 范佛先

编 委 (按姓氏笔划为序)

王加奇 邓成敏 史昌德 邝钜源 包重春 齐向阳

许时升 刘 凯 运永顺 李道熙 邵 元 张桂根

陈庆雯 陈国英 尚成礼 郑发新 赵翼西 程汉杰

序

全能训练丛书的生产，是与全国铁路重点中学校长研讨会及它所领导的语文、数学、外语、物理、化学、生物、历史、地理八个学科教研会的建立和发展密切相关的。

1980年铁道部原教育局在普教处处长魏莲一和周良同志的主持下在福州召开了全国铁路重点中学校长会。此后，从1982年到1984年又连续召开了四次校长会。在同一时期，魏莲一同志还主持了全国铁路重点中学物理、生物和外语三个学科教研会的建立，从而促进了分布于全国各省市的铁路重点中学加强教学经验交流和研讨。

1986年后，原锦州铁一中校长李森同志重新发起组织全国铁路重点中学校长研讨会，从公办转为民办，制定了章程，成立了理事会，李森任理事长。从1986年到1998年的12年间召开了十届年会，深入研讨和交流了贯彻教育方针，推进教育改革、加强教育、教学和学校管理的许多理论和实践问题。

在校长研讨会的领导下，全国铁路重点中学学科教研会从原来的三个学科发展成语文、数学、外语、物理、化学、生物、历史、地理共八个学科。在长达10多年的时间里，各学科理事会充分利用铁路系统交通通讯方便的有利条件，定期召开学科教研会，交流教学经验和评选论文，举办学科通讯竞赛，开展教改专题研讨，出版学科小报，编写和交流学习资料，进行了大量卓有成效的工作，极大地促进了各学校教学质量的提高，同时积累了丰富的教学经验和充实的资料。据此，在各学科教研会理事会的主持下，集中了分布于全国各省市铁路重点中学知名的特级教师和优秀的高级教师，发挥集体智慧，编写了这套独具特色的全能训练丛书。丛书既体现出铁路重点中学教学研究的丰硕成果，也可满足各铁路中学，特别是铁路沿线和边远地区师生教学和复习的需要。

本书编写时以教学大纲和高考说明为依据，内容力求涵盖高中课程的基本知识和基本概念，通过典型例题的解析，以提高联系实际综合分析问题的能力并选用了适量的训练题，训练题难度兼顾会考和高考，不同程度的学生使用它都会有所收获和提高。

希望广大读者提出宝贵的批评建议，尤其希望铁路重点中学广大教师，珍视体现我们教学成果的作品，热情地予以支持，积极地提出补充和完善的意见。

全国铁路重点中学校长研讨会理事长

1999年6月

前言

铁路重点中学历史悠久，师资力量雄厚，在当地都有较高的声望，为了总结和推广各校数学教学的经验，为了给各地铁路中学，特别是铁路沿线边远地区学校的师生提供一本针对性好，实用性强的中学数学复习用书，并与路内外同行交流，探讨高中数学总复习中培养能力、提高素质的有效途径，也为帮助学生主动学习，学会思考，全国铁路重点中学数学教研会组织部分有丰富经验的教师编写了这本《高中数学知识能力训练》。

本书根据现行教学大纲和全国统一高考说明中对数学学科的知识与能力要求而编写，是课本的补充与提高，全书共分13章，每章有“知识结构”，简明勾画了每章的结构图，“能力要求”表明各知识点的能力要求等级，每节有“复习要点”，提出每节的重点、难点、带规律性的问题，“例题分析”是本书的核心部分，着重解决“怎么想？”和“该想什么”，帮助学生学会思考，“习题”是为课后巩固所学知识和技巧而准备的，最后配备五套综合测试题，以便检验复习效果，书后配有参考答案，难题有提示。

使用本书有以下几点建议：

1. 必须结合课本进行复习，课本中的定义、定理、公式、知识内容没有一一列出，我们认为：丢掉课本，只靠复习资料不是好办法，把课本与资料结合使用才更为有效。

2. 教学过程中应当充分发挥学生主体作用，由学生先想，再看，再总结，重在总结规律，重在思维训练，本书力求从这个角度给学生以帮助，教师应避免就题论题、一味追求教师讲解那种灌输式的复习。

3. 由于篇幅所限，多数题有几种不同方法，而本书只选其中一种或两种，这是为了更多地强调“通法”或“一般思路”，但不反对“一题多解”，多角度分析思考，应当说鼓励学生多角度分析思考是有益的。

4. 本书中数学符号，未采用最新的国家标准，而是采用现行课本的符号，如正切余切函数 $\operatorname{tg} x$ 、 $\operatorname{ctg} x$ ，而不是采用 $\tan x$ ， $\cot x$ ，这样有利于学生接受，待课本采用最新国标时，本书将随之修订。

本书由邓成敏、赵翼西任主编，陈磐生、武学航任副主编。参加本书编写的有：北京铁二中赵翼西，沈阳铁路实验中学张牧、孙志华、倪生利、张传胜，成都铁二局一中付佑举、陈晏祥、张宇平、汪一农，兰州铁一中张跃庭、刘振刚，海南铁中王博成、李道才，哈尔滨铁一中官志海、丁家顺，柳州铁一中伍学航、向辉，吉林铁一中王光林，锦州铁一中王晓辉，广州铁一中李如昌，郑州铁一中陈磐生，戚墅堰机车厂中学董进法、尹云绪，青岛铁一中李跃玉、李思才，昆明铁一中兰晓丽、林兰，齐齐哈尔铁一中刘极光，衡阳铁一中李进杰、胡建石，齐齐哈尔车辆厂一中刘永贵。初稿完成后又专门召开编审会，讨论改稿，反复修改后由赵翼西、陈磐生、伍学航统稿。

尽管我们努力工作，但限于我们的水平和经验，再加上时间比较仓促，错误在所难免，望读者提出宝贵意见，在这里向这些关心和帮助我们完善这本书的读者表示衷心感谢，向支持我们编写这本书的各校领导和老师表示衷心感谢，向为本书作序并给本书很多具体指导的全路重点中学校长研讨会理事长刘崇俊同志表示衷心感谢。

编者

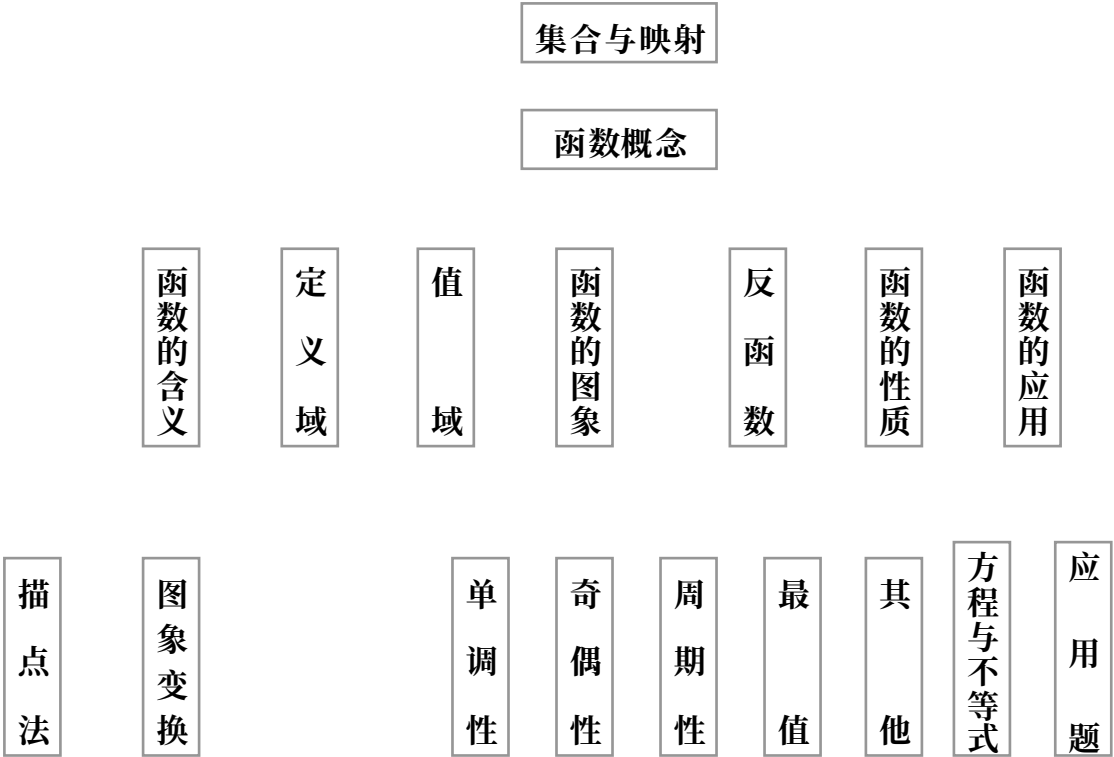
1999年6月

目 录

第一章 函 数.....	1	第八章测试题	99
第一节 集 合.....	2	第九章 多面体和旋转体.....	101
第二节 映射与函数.....	4	第九章测试题.....	111
第三节 函数图象及性质.....	8	第十章 直 线.....	113
第四节 函数的应用	12	第一节 直角坐标系.....	114
第一章测试题	19	第二节 直线的方程.....	118
第二章 不等式	20	第三节 两直线的位置关系.....	123
第一节 不等式的性质和不等式的证明	20	第十章测试题.....	127
第二节 不等式的解法	24	第十一章 圆锥曲线.....	129
第三节 不等式的应用	28	第一节 曲线和方程.....	130
第二章测试题	32	第二节 圆.....	131
第三章 数列 极限 数学归纳法	34	第三节 椭 圆.....	135
第一节 数列的基本概念	34	第四节 双 曲 线.....	138
第二节 等差数列与等比数列	37	第五节 抛 物 线.....	141
第三节 数列极限与数列求和	42	第六节 坐标轴的平移.....	144
第四节 数学归纳法	45	第十一章测试题.....	145
第三章测试题	47	第十二章 参数方程 极坐标.....	147
第四章 复 数	48	第一节 曲线的参数方程.....	147
第一节 复数的概念	48	第二节 直线的参数方程.....	149
第二节 复数的运算	51	第三节 圆锥曲线的参数方程.....	150
第三节 复数的应用	55	第四节 极坐标方程.....	151
第四章测试题	58	第五节 圆锥曲线的极坐标方程.....	153
第五章 排列、组合与二项式定理	60	第十二章测试题.....	154
第一节 排列 组合	60	第十三章 专题讲座.....	156
第二节 二项式定理	63	第一节 数学应用题.....	156
第五章测试题	65	第二节 分类讨论.....	162
第六章 三角恒等变形	67	第三节 数形结合.....	166
第六章测试题	75	第四节 开放性问题.....	171
第七章 三角函数的图象和性质	76	第五节 怎样解综合题.....	174
第一节 三角函数的概念及反三角函数	77	第十四章 综合测试题.....	181
第二节 三角函数图象和性质	81	附录 1999 年高考试题及解答	188
第七章测试题	88	参考答案.....	197
第八章 直线与平面	89		

第一章 函 数

一、知识结构



二、知识要点和能力要求

单 元	节 次	知 识 要 点	能力要求
一、集合	1. 集合	(1)集合与元素(包括空集) (2)集合的表示法 (3)元素与集合间关系表示法 (4)常见数集(包括奇、偶数集)	A B B B
	2. 子集、交集、并集、补集	(1)子集及其表示法(包括真子集、子集) (2)交集及其表示法 (3)并集及其表示法 (4)全集与补集及其表示法	B C C C
二、一元二次不等式	3. $\forall x + b < c$ $\exists x + b < c$ ($c > 0$)型不等式	$\forall x + b < c$, $\exists x + b < c$, ($c > 0$)型不等式	C
	4. 一元二次不等式	(1)一元二次不等式的概念 (2)一元二次不等式的解法	B C
三、映射与函数	5. 映射	(1)映射及其表示法 (2)象与原象	A A
	6. 函数	(1)函数与函数记号 (2)求函数的定义域 (3)函数的值域 (4)区间表示法 (5)函数的图象 (6)确定函数的解析式	C C C C B C C
四、幂函数	7. 分数指数幂与根式	(1)与根式有关的概念 (2)分数指数幂 (3)分数指数幂的运算	B C C
	8. 幂函数	(1)幂函数的概念及性质 (2) $y = x^a$, $a \in \{1, 2, 3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1, -2\}$ 的图象 (3)幂函数的定义域及图象 (4)比较两个函数值的大小	B C C B

续上表			
单 元	节 次	知 识 要 点	能力要求
四、幂函数	9. 函数的单调性	(1)函数的单调性 (2)简单的函数单调性的证明	B C
	10. 函数的奇偶性	(1)函数的奇偶性 (2)奇、偶函数的图象特征 (3)简单函数奇偶性的判断	C C C
	11. 反函数	(1)反函数 (2)简单函数的反函数求法	B C
	12. 互为反函数的函数图象	(1)互为反函数的函数图象间的关系 (2)互为反函数的函数图象对称性定理的证明	B B
五、指数函数与对数函数	13. 指数函数	(1)指数函数的性质 (2)指数函数的图象 (3)同底的两个函数值大小的比较	C C B
	14. 对数	(1)对数的定义 (2)对数恒等式	C C
	15. 对数的性质和运算法则	(1)对数的两个性质 (2)对数的运算法则	B C
	16. 常用对数表	(1)常用对数 (2)常用对数的首数与尾数	A A
	17. 利用常用对数进行计算	利用常用对数进行计算	A
	18. 对数函数	(1)对数函数及性质 (2)对数函数的图象 (3)同底的两个函数值大小的比较	C C B
	19. 换底公式	(1)对数换底公式 (2)自然对数	C B
	20. 指数方程与对数方程	(1)指数方程、对数方程的概念 (2)简单的指数方程和对数方程的解法 (3)用图象解方程	B B A

第一节 集 合

一、复习要点

掌握集合的表示法,正确理解和表达元素与集合、集合与集合之间的关系;正确理解子集、交集、并集、全集、空集、补集的概念并能熟练运算.

二、例题分析

例 1 (1)已知 $A = \{y|y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbb{R}\}$; $B = \{y|y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$. 求 $A \cap B$.

(2)已知 $A = \{(x, y)|y = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbb{R}\}$; $B = \{(x, y)|y = 1 - x, x \in \mathbb{R}\}$. 求 $A \cap B$.

分析 两题表面看相似,本质区别很大. (1)中集合 A、B 都是数集,是函数值域. 所以, $A = \{y|y \geq -4\}$; $B = \mathbb{R}$; 所以, $A \cap B = \{y|y \geq -4\}$. (2)中集合 A、B 都是点集,是两条曲线. $A \cap B$ 是两曲线交点的坐标,所以, $A \cap B = \{(-1, 0), (2, -3)\}$.

所以认清集合的元素是什么,集合表示什么是首先应当重视的.

例 2 已知 $A = \{x|x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{y|y = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则下列关系式中正确的是 ()

A. $A \subset B$; B. $B \subset A$;
C. $A = B$; D. $A \cap B = \emptyset$.

分析 判断两个集合是否相等或子集,最好的方法是列举法表示两个集合,看两个集合的元素是否相同. $A = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$; $B = \{\cdots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$. 所以, $A = B$. 答案为 C.

例 3 若集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{x^2, 1\}$, 而 $A \cup B = \{1, 3, x\}$. 求实数 x 的值.

分析 由于 $A \cup B = A$, 所以, $B \subset A$.
 $\therefore$ 只有 $x^2 = 3$ 或 $x^2 = x$;
 $\therefore x = \pm \sqrt{3}$ 或 $x = 0$ 或 $x = 1$.

检验: $x = \sqrt{3}$ 时, $A = \{1, 3, \sqrt{3}\}$; $B = \{3, 1\}$.
此时, $A \cup B = \{1, \sqrt{3}, 3\}$ 满足题意.

同样 $x = -\sqrt{3}$ 时也满足题意.
 $x = 0$ 时 $A = \{1, 3, 0\}$; $B = \{0, 1\}$,
此时 $A \cup B = \{1, 0, 3\}$ 满足题意.

$x = 1$ 时, $A = \{1, 3, 1\}$; $B = \{1, 1\}$, 两个集合中都有重复元素,不符合题意,所以,此题答案应是 x

$$= \pm \sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

这类题重在分析,衡量的标准是集合的三个特性:(1)元素的确定性;(2)元素的无顺序性;(3)元素的不重复性.而且考虑问题要全面,本题中注意 $x^2=3$ 和 $x^2=x$.

例 4 求满足 $\{1,2\} \subseteq A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ 关系的集合 A 的个数.

分析 由题意:1,2 必是 A 中的元素,而 3,4,5 中至少一个元素是 A 中的元素,而 $\{1,2,3,4,5\}$ 外的其他元素都不会是 A 中的元素.所以,个数是元素 3,4,5 中任取一个、任取两个元素的个数,即 $C_3^1 + C_3^2 = 6$ 个.

这个问题也可以看成求集合 $\{3,4,5\}$ 的非空真子集的个数.它每一个非空真子集与集合 $\{1,2\}$ 的并集都符合 A 的条件.我们知道,一个集合若有 n 个元素,则它的子集有 2^n 个,真子集 $2^n - 1$ 个,非空真子集 $2^n - 2$ 个.所以本题答案应是 $2^3 - 2 = 6$ 个.

例 5 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - a)(x - 3a) < 0\}$.

- (1) 若 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (3) 若 $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$, 求 a 的取值范围.

分析 这类题结合数轴分析会更好.由于 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$, 如图 1-1.

图 1-1

(1) $a > 0$ 时, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < 3a\}$.

应满足
$$\begin{cases} a \leq 2 \\ 3a \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq a \leq 2.$$

当 $a < 0$ 时, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3a < x < a\}$,

应满足
$$\begin{cases} 3a \leq 2 \\ a \geq 4 \end{cases};$$

$\therefore \frac{4}{3} \leq a \leq 2$ 时, $A \subseteq B$.

(2) 要满足 $A \cap B = \emptyset$,

当 $a > 0$ 时, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < 3a\}$, $a \geq 4$ 或 $3a \leq 2$.

$\therefore 0 < a \leq \frac{2}{3}$ 或 $a \geq 4$.

当 $a < 0$ 时, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3a < x < a\}$, $a \leq 2$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$.

$\therefore a < 0$ 时成立.

当 $a = 0$ 时也成立.

综上所述, $a \leq \frac{2}{3}$ 或 $a \geq 4$ 时, $A \cap B = \emptyset$.

(3) 要满足 $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$, 显然 $a > 0$ 且 $a = 3$ 时成立, $\therefore$ 此时 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$, 而 $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

注意: (1) 题中两条件之间求交集; (2) 题中两条件之间求并集. 都要分类讨论才能把 B 集合说清楚.

例 6 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (p + 2)x + 1 = 0, p, x \in \mathbb{R}\}$; 且 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$. 求实数 p 的取值范围.

分析 A 表示二次方程 $x^2 + (p + 2)x + 1 = 0$ 的两根构成的集合. $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ 有两种可能: (1) $A = \emptyset$; (2) $A \neq \emptyset$; 但方程无正根.

(1) $A = \emptyset$, 即 $\Delta = (p + 2)^2 + 4 < 0$ 得 $p \in (-4, 0)$.

(2) A 无正根, 即

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 & \quad p \leq -4 \text{ 或 } p \geq 0 \\ -(p + 2) < 0 & \quad p > -2 \\ \therefore p \geq 0 & \quad \text{即 } p \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

二者取并集, 结果是 $(-4, +\infty)$.

例 7 设 $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$; $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3m, m \in \mathbb{N}\}$; $I = \mathbb{N}$. 求 $\overline{P \cup Q}$.

分析 P 是自然数中偶数构成的集合, Q 是自然数中 3 的倍数构成的集合, $\overline{P \cup Q}$ 是由既不是 2 的倍数又不是 3 的倍数的自然数构成的集合. 可以表示为 $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 1 \text{ 或 } x = 6n \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$, 也可以表示为 $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 6n - 5 \text{ 或 } x = 6n - 1, n \in \mathbb{N}\}$.

例 8 设全集 $I = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$, 则 $\overline{A \cap B}$ 等于. ()

- A. $\emptyset$; B. $\{(2, 3)\}$;
- C. $(2, 3)$; D. $\{2, 3\}$.

分析 $\overline{A}$ 是直角坐标平面上 $y = x + 1$ 直线外所有点与点 (2, 3) 构成的集合, B 是直线 $y = x + 1$ 上所有点. 所以, $\overline{A \cap B}$ 是它们的公共点, 即 (2, 3) 点构成的集合. 所以答案为 B.

例 9 如图 1-2
2. 设 $I = A \cup B \cup C$, 用集合 A、B、C 表示图中的阴影部分应是_____.

图 1-2

分析 这类题的最基本方法是图 1-3 中阴影部分的表示方法: 在集合 A 中去掉同时为集合 B 的元素后形成的集合是 $\overline{A \cap B}$.

图 1-3

所以, 本题答案是 $(\overline{A \cap B}) \cup (B \cap (\overline{A \cup C})) \cup (\overline{C \cap B})$. 也可以表示为 $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C})$.

习题 1.1

1. 两个非空集合 A、B 不相等, 则必有 ()

- A. $(A \cap B)^c$; B. $A \cap B$;
C. $(A \cap B)^c$; D. $\complement(A \cap B)$.

2. 设全集 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2) \leq 0\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{3-x} \geq 0\}$, 那么 $\overline{M} \cup \overline{N}$ 等于 ()

- A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$; B. $\{2, 3\}$;
C. $\{2\}$; D. $\{3\}$.

3. 设全集 $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的关系是 ()

- A. $\overline{A} = \overline{B}$; B. $\overline{B} = \overline{A}$;
C. $\overline{A} = \overline{B}$; D. $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

4. 已知全集 $I = \{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\overline{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$. 求 A、B.

5. 设 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - ax + b = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (a$

$+ 2)x + 5 + b = 0\}$ 且 $A \cap B = \frac{1}{2}$, 则 $A \cup B =$ _____.

6. 已知 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, \lg y\}$, 且 $M = N$. 求 x, y.

7. 设集合 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 若 $A \cap B = \{2, 5\}$, 则实数 a 的值为_____.

8. 如图 1-4, 用集合 A、B、C 表示图中阴影部分是_____.

9. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x - 8 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 3a) < 0\}$. 求 $A \cap B$.

图 1-4

第二节 映射与函数

一、复习要点

了解映射概念, 深入理解函数的概念, 理解函数三要素; 掌握求定义域、值域的基本方法; 会求反函数并了解反函数的图象及性质.

二、例题分析

例 1 下列各组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一个函数?

$$(1) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = x \quad (x \neq 0), \quad g(x) = \frac{x^2}{x};$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{当 } x \in (-1, 0) \\ x-1 & \text{当 } x \in (0, 1), \end{cases}$$

$$g(x) = f^{-1}(x).$$

分析 判断两个函数是否同一个函数, 应由函数三要素是否相同来判断, 即定义域、值域、对应法则. 若三者完全相同则为同一函数.

(1) $f(x)$ 定义域 $x \neq 0$, $g(x)$ 定义域 $x > 0$, 定义域不相同, 所以不是同一函数.

(2) $f(x)$ 值域为 $\mathbb{R}$, $g(x)$ 值域为 $y \in [0, +\infty)$, 值域不相同, 实际也可以看成 $(-\infty, 0)$ 上对应法则不同, 所以不是同一函数.

(3) 二者定义域、对应法则、值域都相同, 所以是同一函数.

$$(4) g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{当 } x \in (-1, 0) \\ x-1 & \text{当 } x \in (0, 1) \end{cases} = f(x).$$

定义域、对应法则、值域都相同, 所以是同一函数. 另外看 $f(x)$ 的图象, 本身关于 $y = x$ 直线对称, 也可知与 $f^{-1}(x)$ 是同一函数.

例 2 求下列各函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\lg(x-1)};$$

$$(2) y = \frac{\sin x}{\sqrt{16-x^2}};$$

$$(3) y = \frac{(\sqrt{x^2-1})^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)};$$

$$(4) y = f(x+a) + f(x-a).$$

其中 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$.

分析 (1) 应满足不等式组:

$$16-x^2 \geq 0 \quad -4 \leq x \leq 4$$

$$\lg(x-1) \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$x-1 > 0 \quad x > 1$$

$\therefore$ 定义域是 $(2, 3) \cup (3, 4]$.

$$(2) \text{由 } \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

在数轴上分别表示两个集合(如图 1-5)

图 1-5

∴定义域是 $[-4, -\pi] \cup [0, \pi]$.

三角不等式与代数式不等式构成的不等式组, 应从数轴上找交集. 由于三角函数中角用弧度制, 所以可以找到它们的交集.

(3) 应满足:

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 \neq 0 \\ & 2x + 1 > 0 \\ & 2x + 1 \neq 1 \\ & 32 - 4^x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x \neq \pm 1 \\ & x > -\frac{1}{2} \\ & x \neq 0 \\ & x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ 且 $x \neq 0, x \neq 1$.

∴定义域是 $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \frac{5}{2}]$.

(4) 由 $f(x)$ 的定义域是 $(0, 1)$, ∴ $f(x+a)$ 的定义域是由 $0 < x+a < 1$ 决定的, $f(x-a)$ 的定义域是由 $0 < x-a < 1$ 决定的, $y = f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域是不等式组 $\begin{cases} -a < x < -a+1 \\ a < x < a+1 \end{cases}$ 的解集. 要得到这不等式组解集先应比较 a 与 $-a$ 的大小, 分界值为 0; 比较 $-a+1$ 与 $a+1$ 大小, 分界值为 0; 比较 a 与 $-a+1$ 大小, 分界值为 $\frac{1}{2}$; 比较 $-a$ 与 $a+1$ 大小, 分界值为 $-\frac{1}{2}$. 这样对 a 的讨论就应分成 $-\infty, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\infty$ 和 $a = -\frac{1}{2}, a = 0, a = \frac{1}{2}$ 等情况.

$$\begin{aligned} & a \leq -\frac{1}{2} \text{ 时, } a \\ & < a+1 \leq -a < - \\ & a+1 \end{aligned}$$

(图 1-6)

图 1-6

∴ $x \in \quad$, 即不构成函数.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} < a < 0 \\ & \text{时, } a < -a < a+1 \\ & < -a+1 \end{aligned}$$

(如图 1-7)

图 1-7

$$\begin{aligned} & \therefore x \in (-a, a+1) \\ & a = 0 \text{ 时, } -a = a < -a+1 = a+1 \\ & \therefore x \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ & -a < a < -a+1 \\ & < a+1 \end{aligned}$$

(如图 1-8)

图 1-8

∴ $x \in (a, -a+1)$

$a \geq \frac{1}{2}$ 时, $-a$

$< -a+1 \leq a < a$

图 1-9

+ 1(如图 1-9)

∴ $x \in \quad$, 即不构成函数.

综上所述: $a \leq -\frac{1}{2}$ 或 $a \geq \frac{1}{2}$ 时不构成函数;

$-\frac{1}{2} < a < 0$ 时 定义域为 $(-a, a+1)$;

$0 \leq a < \frac{1}{2}$ 时 定义域为 $(a, -a+1)$.

例 3 求下列各函数的值域:

- (1) $y = \frac{2-3x}{2x-1}$;
- (2) $y = 2x^2 - 4x - 3 \quad x \in [-1, 2]$;
- (3) $y = -x^2 + 4x - 5 \quad x \in [-1, 1]$;
- (4) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$;
- (5) $y = \frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(x-4)}$;
- (6) $y = 2x - 5 + \frac{2}{x}$;
- (7) $y = \lg x + 2 \lg(2\lg x - 1)$;
- (8) $y = x^2(1-x) \quad x \in (0, 1)$;
- (9) $y = \sin x \cdot \cos^2 x \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
- (10) $y = \frac{1}{2}^{x^2+x-\frac{1}{4}}$.

分析 (1) $y = \frac{cx+d}{ax+b} \quad (ad-bc \neq 0)$ 类型函数

均可化成 $y = \frac{\frac{c}{a}(ax+b) - \frac{bc}{a} + d}{ax+b}$

$$= \frac{c}{a} + \frac{ad-bc}{a(ax+b)}$$

可见值域为 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq \frac{c}{a}\}$, 规律是恰好是分子分母中 x 的系数比.

∴ 本题答案是 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -\frac{3}{2}\}$

(2) $y = 2x^2 - 4x - 3 = 2(x-1)^2 - 5 \quad x \in [-1, 2]$,

∴ $x = -1$ 时, $y_{\max} = 3$;

$x = 1$ 时, $y_{\min} = -5$.

∴ 值域是 $[-5, 3]$.

对称轴 $x = 1$ 在 $[-1, 2]$ 内, 应求出顶点值、端点值比较大小.

(3) $y = -x^2 + 4x - 5 \quad x \in [-1, 1]$

$$= -(x-2)^2 - 1.$$

对称轴 $x = 2$ 不在 $[-1, 1]$ 内, 则端点值分别为最大值或最小值.

$x = -1$ 时, $y_{\min} = -11$

$x = 1$ 时, $y_{\max} = -2$

∴ 值域是 $[-11, -2]$.

(4) 分式函数, 分子分母中含二次式又没有公因式的函数, 一般利用判别式法求值域.

由原式化为 $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$

整理为 $(y-1)x^2 + (y+1)x + (y-1) = 0$

当 $y \neq 1$ 时 $\Delta \geq 0$ 即 $(y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

得 $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$

$y = 1$ 时 $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1$ 解得 $x = 0$

可知 $x = 0$ 时 $y = 1$ 成立.

$\therefore$ 值域是 $[\frac{1}{3}, 3]$.

这里对 $y = 1$ 与 $y \neq 1$ 的讨论是不可少的. 因为只有 $y \neq 1$ 才有判别式, 但对原来的函数是否能满足 $y = 1$, 需单独检验.

(5) 虽然也是分式, 分子分母含二次式, 但有公因式 $x+1$, 这时利用判别式法会遇到一些不好处理的问题, 因此不要用判别式法.

注意到函数 $y = \frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)(x-4)}$ 与函数 $y = \frac{2x+3}{x-4}$ ($x \neq -1$) 是同一个函数, 但与 $y = \frac{2x+3}{x-4}$ 不是同一个函数. 所以原来函数的值域应是 $y = \frac{2x+3}{x-4}$ 的值域 $y \neq 2$, 并加上 $x \neq -1$ 的限制, 由于 $x = -1$ 时 $y = -\frac{1}{5}$, 所以, 原来的函数的值域是 $y \neq 2$ 且 $y \neq -\frac{1}{5}$, $y \in \mathbb{R}$.

(6) 这类根号下二次式与一次式的和差构成的函数, 一般用换元法转化成二次函数的值域问题.

设 $\sqrt{2-x} = u$ ($u \geq 0$), 则 $x = 2 - u^2$;

$\therefore y = 2(2 - u^2) - 5 + u = -2u^2 - \frac{1}{4}u - \frac{7}{8}$;

$\therefore$ 当 $u = \frac{1}{4}$ 时即 $x = \frac{31}{16}$ 时 $y_{\max} = -\frac{7}{8}$;

$\therefore$ 值域是 $[-\infty, -\frac{7}{8}]$.

(7) $x < -2$ 时 $y = -x - 2 - 2x + 2 = -3x$;

$-2 \leq x < 1$ 时 $y = x + 2 - 2x + 2$
 $= -x + 4$;

$x \geq 1$ 时 $y = x + 2 + 2x - 2$
 $= 3x$;

作出函数的函数图象, 从图象看函数的值域是 $[3, +\infty)$.

(8) $\because x \in (0, 1), \therefore 1-x > 0$

$y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x(2-2x)$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x+x+(2-2x)}{3}^3$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}^3 = \frac{4}{27}$.

当且仅当 $x = 2-2x$ 即 $x = \frac{2}{3}$ 时等号成立. 用

均值定理求值域一应注意条件, 不都是正数时不能用; 二应注意等号成立的条件, 即求积的最大值应有和为常数, 求和的最小值应有积为常数.

(9) $\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$

$y = \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$

$y^2 = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)^2$

$= \frac{1}{2} \times 2\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha}{3}^3$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}^3 = \frac{4}{27}$. $\therefore y \leq \frac{2}{9}$.

当且仅当 $2\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ 时即 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

时等号成立.

说明: 有的学生解法为 $y = \sin x (1 - \sin^2 x) =$

$\sin x (1 + \sin x) (1 - \sin x) = \frac{1}{2} \times \sin x (1 + \sin x) (2 - 2\sin x)$

$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x + 1 + \sin x + 2 - 2\sin x}{3}^3 = \frac{1}{2}$.

这是错误的. 因为等号成立的条件是 $\sin x = 1 + \sin x = 2 - 2\sin x$, 这是不可能的. 即此式不可能取到 $\frac{1}{2}$.

(10) $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + x - \frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}}$

$\because x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$. 而 $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{u}$ 是减

函数, $\therefore 0 < y \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 值域是 $(0, \frac{1}{2}]$.

复合函数值域问题, 应求 $y = f(u)$ 的定义域和 $u = \phi(x)$ 的值域, 得到 u 的取值范围, 这个范围可能使原定义域范围缩小, 按缩小后范围再求函数 y 的值域.

$x-3$ 当 $x > 0$

例 4 已知 $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{当 } x > 0 \\ 2 & \text{当 } x = 0 \\ 2x+9 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$ 求:

$2x+9$ 当 $x < 0$.

(1) $f(-7)$;

(2) $f(f(-2))$; (3) $f(f(f(f(-3))))$ 的值.

分析 分段函数要根据不同区间值域不同法则.

计算 $f(-7) = 2 \times (-7) + 9 = -5$;

$f(f(-2)) = f(5) = 2$;

$f(f(f(f(-3)))) = f(f(f(6)))$

$= f(f(3)) = f(0) = 2$.

例 5 已知 $f(x) = 3x-2, g(x) = x^2+1$.

解方程 $f(g(x)) = g(f(x))$.

解 $3(x^2+1)-2 = (3x-2)^2+1$,

$$3x^2 + 3 - 2 = 9x^2 - 12x + 4 + 1,$$

$$6x^2 - 12x + 4 = 0, 3x^2 - 6x + 2 = 0.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 6 已知 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-2x}{x}$, 求 $f(x)$.

解 $\because 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-2x}{x},$

$$\therefore 2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{3-2 \times \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 3x - 2;$$

$$\therefore 3f(x) = \frac{2(3-2x)}{x} - (3x-2)$$

$$= \frac{6}{x} - 3x + 2;$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{x} - x + \frac{2}{3}.$$

说明: 应深刻理解 f 的含意. 已知 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-2x}{x}$ 中的 x 可以是任意使式子有意义的数, 也可以是某个式子对应法则是一致的.

例 7 求下列各函数的反函数:

(1) $y = \sqrt{x-1};$

(2) $y = 2x^2 - 4x - 3 \quad (x > 2);$

(3) $y = \log_a(a^x - 1) \quad (a > 0, a \neq 1);$

(4) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{当 } x > 0 \\ 2x - 3 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$

分析 存在反函数的函数应是一一映射确定的函数. 基本步骤是: ①求出原来函数的定义域、值域; ②从原式中解出 $x = f^{-1}(y)$; ③交换 x, y 得 $y = f^{-1}(x)$; ④注明反函数的定义域.

(1) 定义域 $[1, +\infty)$, 值域 $[0, +\infty)$. 解出 $x = y^2 + 1$. $\therefore$ 反函数是 $y = x^2 + 1 (x \geq 0)$.

(2) $y = 2(x-1)^2 - 5$, 定义域 $(2, +\infty)$, 值域 $(-3, +\infty)$,

$$\text{解出 } x = \frac{y+5}{2} + 1.$$

$\therefore$ 反函数是 $y = \frac{x+5}{2} + 1 (x > -3).$

(3) 定义域: $a > 1$ 时, $x > 0$; 值域 $y \in \mathbb{R}$;
 $0 < a < 1$ 时, $x < 0$; 值域 $y \in \mathbb{R}$.

$$a^y = a^x - 1, \quad a^x = a^y + 1.$$

$$\therefore x = \log_a(a^y + 1);$$

$\therefore$ 反函数是 $y = \log_a(a^x + 1) \quad x \in \mathbb{R}.$

(4) 分段函数应分段求反函数. $x > 0$ 时, $y = (x+1)^2 - 2$, 值域 $y \in (-1, +\infty)$,

$$\text{解出得 } x = \sqrt{y+2} - 1.$$

$\therefore$ 反函数 $y = \sqrt{x+2} - 1 \quad (x > -1).$

$x < 0$ 时, $y = 2x - 3$, 值域 $y \in (-\infty, -3).$

$$\text{解出得 } x = \frac{y+3}{2}.$$

反函数 $y = \frac{x+3}{2} \quad (x < -3).$

$\therefore$ 反函数是

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2-1 & \text{当 } x > -1 \\ \frac{x+3}{2} & \text{当 } x < -3. \end{cases}$$

例 8 给定实数 $a (a \neq 0, a \neq 1)$, 设函数 $y = \frac{x-1}{ax-1}$ 其中 $x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq \frac{1}{a}$. 求证: (1) 经过这个函数图象上任意两个不同几点的直线不平行于 x 轴; (2) 这个函数图象关于直线 $y = x$ 或 y 轴对称图形.

分析 (1) 题本质是证明 $y = \frac{x-1}{ax-1} (a \neq 0, a \neq 1)$ 是一一对应的. 可有几种不同解题思路.

思路一: 反证法. 假设函数图象上存在两点 A, B 满足 AB 直线平行 x 轴, 即 A, B 纵坐标相等.

设 $A(x_1, y_0), B(x_2, y_0)$ 都满足函数解析式.

$$\therefore \frac{x_1-1}{ax_1-1} = \frac{x_2-1}{ax_2-1} \quad (x_1 \neq x_2);$$

$$\therefore (ax_2-1)(x_1-1) = (ax_1-1)(x_2-1).$$

$$ax_2x_1 - ax_2 - x_1 + 1 = ax_1x_2 - ax_1 - x_2 + 1;$$

$$\therefore a(x_1 - x_2) = x_1 - x_2.$$

$\because x_1 \neq x_2, \therefore a = 1$. 与已知矛盾;

$\therefore$ 不存在这样两点 A, B 使 AB 平行 x 轴.

思路二: 任取一条平行 x 轴的直线 $y = C (C$ 为

常数), 只需证方程组 $\begin{cases} y = \frac{x-1}{ax-1} \\ y = C \end{cases}$ 最多一组解即可.

$$\frac{x-1}{ax-1} = C. \because x \neq \frac{1}{a}, \therefore x-1 = aCx-1;$$

$$(aC-1)x = C-1.$$

$aC-1=0$ 而 $C \neq 1$ 时无解.

若 $C=1, aC-1=0$ 时, $a=1$ 与已知矛盾, 不成立.

$\therefore aC-1 \neq 0$ 时, 方程一解, 不可能出现二解.

思路三: 证明存在反函数.

$$y = \frac{x-1}{ax-1}, ayx - y = x - 1, (ay-1)x = y-1.$$

$$\text{解得 } x = \frac{y-1}{ay-1}.$$

$\therefore$ 反函数 $y = \frac{x-1}{ax-1}, a \neq 0, a \neq 1$ 时定义域 $x \neq \frac{1}{a}$, 可知函数与反函数相同.

$\therefore$ 函数图象上不存在两点连线平行 x 轴, 也证明它的图象与反函数图象关于 $y = x$ 直线或轴对称图形.

例 9 若 $f(x) = 10^{x-1} - 2$. 求 $f^{-1}(8)$ 的值.

分析 可以求反函数, 再代入 8, 求反函数值.

由于反函数是原来函数的逆映射,所以也可以
 $10^{x-1} - 2 = 8$. 解得 x 即可, 即得 $x = 2$. 所以
 $f^{-1}(8) = 2$

习题 1.2

1. 映射 $f: A \rightarrow B$ 是定义域 A 到值域 B 上的函数, 则下列结论正确的是 ()

A. A 中每个元素必有象而 B 中的元素不一定有原象;

B. A 中每个元素必有象而 B 中的每个元素都有原象;

C. A 中元素可能在 B 中找到两个对应元素;

D. B 中元素只能有一个原象.

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, $f: A \rightarrow B$ 是从 A 到 B 的映射, $f: (a, b) \rightarrow (a+b, ab)$, 则 B 中的元素 $(5, 6)$ 在 A 中的原象是_____.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 3]$, 则 $f(x^2 + 1)$ 的定义域是_____.

4. 求下列各函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x - x^2}{\lg(2x - 1)} + \sqrt[3]{3x + 1};$$

$$(2) y = \frac{\lg(1 - \frac{x-2}{5-2x})}{5-2x};$$

$$(3) y = \log_{2x-2}(3x-2-x).$$

5. 求下列各函数的值域:

$$(1) y = \frac{x+4}{3x-2};$$

$$(2) y = 3x^2 - 6x - 1, x \in [-3, 0];$$

$$(3) y = \frac{x}{x^2 - x + 1};$$

$$(4) y = 1 - x - \sqrt{x-2};$$

$$(5) y = x^2 + \frac{2}{x} (x > 0);$$

$$(6) y = x(4 - x^2) (0 < x < 2);$$

$$(7) y = \lg x - 3 \lg \frac{x}{2};$$

$$(8) y = 3^{-\lg x};$$

$$(9) y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x + \frac{1}{2});$$

$$(10) y = \sqrt{4 - 4x - x^2}.$$

6. 已知 $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, 求 $f(-1)$, $f(x-1)$, $f(f(x))$.

7. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{当 } x \geq 0 \\ x-1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$ 求 $f(3)$, $f(f(-3))$, $f(f(x))$.

8. 由以下条件, 求 $f(x)$.

$$(1) 3f(x) - 2f(-x) = 4x - 1;$$

$$(2) 2f(x) + f(-\frac{1}{x}) = \frac{3x}{x-1}.$$

9. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = -x^2 + 2x - 3 \quad (x < -1)$$

$$(2) y = \begin{cases} 2x+1 & \text{当 } x \geq 0 \\ -x^2-1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

10. 已知 $y = ax + 3$ 的反函数是 $y = 2x + b$, 求 a, b .

11. 已知 $f(x) = 3x - 2$, 求 $f^{-1}(f(x))$.

12. 求下列各函数的反函数:

$$(1) y = x^2 - 8, x \in [-3, -1];$$

$$(2) y = \frac{6x+5}{x-1}, x \in [-1, 1) \cup (1, +\infty);$$

$$(3) y = \sqrt{-2x-3};$$

$$(4) y = 2^{x^2-2x} \quad (x \leq 0);$$

$$(5) y = \begin{cases} 3x+2 & \text{当 } x \geq 1; \\ 2x-3 & \text{当 } x < 1. \end{cases}$$

13. 设 $f(2x-1) = x+1$, 则 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

第三节 函数图象及性质

一、复习要点

$$(8) y = \lg \frac{x}{2};$$

掌握描点法画图象和图象变换的基本方法, 掌握函数单调性、奇偶性、周期性、最值等基本性质的判定及简单应用. 学会研究一般函数的方法, 去研究具体函数的性质.

二、例题分析

例 1 试画下列各函数的图象:

$$(1) y = \frac{3-x}{x-2}; \quad (2) y = 2^{\lg x - 2};$$

$$(3) y = \log_2 \frac{x-1}{x}; \quad (4) y = \log_2(\lg \frac{x}{2} + 1);$$

$$(5) y = \frac{1}{\lg \frac{x}{2} + 1}; \quad (6) y = \lg_2 \frac{x}{\lg x};$$

$$(7) y = x^2 - 2 \lg \frac{x}{2} + 3;$$

分析 函数图象的基本方法是描点法: 列表、描点、连线. 而图象变换也是常用的方法, 很多函数都是利用图象变换与描点法结合起来完成的. 这里重点研究平移变换、对称变换(含“翻折”变换)的规律.

$$\text{解 } (1) y = \frac{3-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = -1 + \frac{1}{x-2}$$

所以, 是 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 2 个单位, 向下平移 1 个单位(如图 1-10).

一般地, $y = f(x+h) + k$ 的图象是 $y = f(x)$ 的

图象水平方向平
移- h 个单位, 竖
直方向平移 k 个
单位.

(2) $y = 2^{x-2}$
2 图象可以看成
函数 $y = 2^x$ 图象
向下平移 2 个平
位得 $y = 2^{x-2}$ 的
图象, 再将 y 轴左
方部分去掉, 右方
不变, 并将右方部分以
y 轴为对称轴“翻”到
左方(如图 1-11). 也可
以看成把 $y = 2^{x-2}$ 的图
象再向下平移 2 个单
位.

图 1-10

一般地, $y = f(x)$
的图象与 $y = f(|x|)$
图象的关系是: 由于 x
 ≥ 0 时 $f(|x|) = f(x)$

图 1-11

即 y 轴右方部分是原
来函数图象(我们不妨称“右方不变”). $x < 0$ 时 $f(|x|) = f(-x)$, 即左方图形是 y 轴右方图形的对称
图形(我们不妨称“右往左翻”). 而 $y = f(x)$ 原来 y
轴左方部分由于 $y = f(|x|)$ 中 $|x|$ 不可能取负数,
所以原图象 y 轴左方部分不存在了(我们不妨称
“左方去掉”). 这样 $y = f(|x|)$ 的图象就可以把函
数 $y = f(x)$ 图象“左方去掉、右方不变、右往左翻”.

(3) $y = \log_2 x$
的图象按“左方去
掉、右方不变、右
往左翻”的方法得
到 $y = \log_2 |x|$ 的
图象, 再向右平移
一个单位得到 y
 $= \log_2 |x-1|$ 的图
象(图 1-12).

图 1-12

这 里 先
“翻”后移才是
所求的图象, 不
能先移后“翻”.

(4) 先向右
平移一个单位,
再将左方去掉、
右方不变、右往
左“翻”, 即是 y

$= \log_2(|x-1|)$ 的图象(图 1-13).

(5) $y = \frac{1}{x-1}$ 图象左方去掉、右方不变、右往左
“翻”, 即是 $y = \frac{1}{|x-1|}$ 的图象(图 1-14).

(6) $y = \log_2 |x|$ 是将 $y = \log_2 x$ 图象不动, 右往
左“翻”得到的, 然后再将 x 轴下方部分“翻”到 x 轴
上方(图 1-15).

一般地, $y = |f(x)|$ 的图象是 $y = f(x)$ 图象 x
轴上方部分不动, x 轴下方部分以 x 轴为对称轴的
轴对称图形. 图为 $f(x) \geq 0$ 时 $|f(x)| = f(x)$ 即本
身, 而 $f(x) < 0$ 时 $|f(x)| = -f(x)$, 即 $y = f(x)$ 关
于 x 轴为对称轴的轴对称图形.

图 1-13

图 1-14

图 1-15

(7) $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象是 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象将左方去掉、右方不变、右往左“翻”得到(图 1-16).

(8) $y = x^2 - 2x - 3$ 可以从 $y = x^2 - 2x - 3$ 开始,再左方去掉、右方不变、右往左“翻”,得到 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象;再将图

图 1-16

图 1-17

例 2 用定义证明 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[0, + \infty)$ 上为增函数.

证明 在 $[0, + \infty)$ 上任意取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$;
$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2};$$

 $\because \frac{1}{x_1} \geq 0, \frac{1}{x_2} > 0;$
 $\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0.$
又 $\because x_2 - x_1 < 0;$
 $\therefore \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < 0$, 即 $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2};$

$\therefore y = \frac{1}{x}$ 在 $[0, + \infty)$ 上为增函数.
说明:很多同学在证明中用: $\because x_1 < x_2, \therefore \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$, 这种证法是错误的,用自己证明自己等于没证.

例 3 试判断下列各函数的单调递增区间.

- (1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 5);$
- (2) $y = \log_2(5 + 4x - x^2);$
- (3) $y = 2(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5;$
- (4) $y = (x^2 - 1)^2 - 4.$

分析 复合函数的单调性规律是: $y = f(u), u = \phi(x)$, 二者增减性相同, 则为增函数; 二者增减性不同, 则为减函数. 单调区间的确定是: $y = f(u)$ 的单调区间 $u \in A$, 再由 $u = \phi(x)$ 的区间 $x \in B$ 并由 $\phi(x) \in A$ 解出 $x \in C$, 则单调区间是 $B \cap C$.

(1) $y = \log_{\frac{1}{2}} u, u \in (0, + \infty)$ 减函数;
 $u = x^2 - 4x - 5 > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > 5$ (即集合 C);
 $u = x^2 - 4x - 5$ 单调区间 $(-\infty, 2]$ 为减函数 (集合 B);

$\therefore B \cap C = \{x | x < -1\}$ 时为增函数.
 $[2, + \infty)$ 时 $u = x^2 - 4x - 5$ 为增函数,
 $\therefore B \cap C = \{x | x > 5\}$ 时为减函数.

(2) $y = \log_2 u$ 在 $(0, + \infty)$ 增函数,
 $u = 5 + 4x - x^2 > 0$, 得 $-1 < x < 5;$
 $u = -x^2 + 4x + 5$ 单调区间 $(-\infty, 2]$ 为增函数, 此时 $(-1, 2]$ 时增函数.

$u = -x^2 + 4x + 5$ 在 $[2, + \infty)$ 上为减函数,
 $\therefore [2, 5)$ 上为减函数.

(3) $y = 2u^2 - 4u - 5$ 在 $(-\infty, 1]$ 上为减函数, $[1, + \infty)$ 上为增函数.

$u = \log_2 x$ 在 $(0, + \infty)$ 为增函数,
 $\log_2 x \leq 1 \quad (0 < x \leq 2)$
 $\therefore$ 在 $(0, 2]$ 上减函数.
 $\log_2 x \geq 1 \quad \therefore x \geq 2$, 与 $(0, + \infty)$ 求交集,
 $\therefore [2, + \infty)$ 上为增函数.

(4) $y = (u - 1)^2 - 4$ 在 $(-\infty, 1]$ 上增函数, 在 $(1, + \infty)$ 上为增函数,

$u = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, $[0, + \infty)$ 上为增函数.

$x^2 \leq 1, x \in [-1, 1]$ 与 $(-\infty, 0)$ 求交集,
 $\therefore [-1, 0]$ 上为增函数.
 $x \in [-1, 1]$ 与 $[0, + \infty)$ 求交集.
所以, $[0, 1]$ 上为减函数.
 $x^2 \geq 1 \quad \therefore x \in (-\infty, -1] \cup [1, + \infty).$
与 $(-\infty, 0]$ 求交集, $(-\infty, -1]$ 上为减函数;
与 $[0, + \infty)$ 求交集, $[1, + \infty)$ 上为增函数.
综上所述: $(-\infty, -1]$ 上为减函数. $[-1, 0]$ 上

为增函数, $[0, 1]$ 上为减函数, $[1, +\infty)$ 上为增函数.

例 4 试判断下列各函数的奇偶性:

$$(1) y = x + \sin x;$$

$$(2) y = x^2 \cdot \cos x;$$

$$(3) y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(4) y = (x-1) \frac{x+1}{x-1};$$

$$(5) y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(6) y = \frac{1 + x^2 + x - 1}{1 + x^2 + x + 1};$$

$$(7) y = \begin{cases} x + \lg x & x > 0 \\ x - \lg(-x) & x < 0 \end{cases}.$$

分析 奇函数偶函数是函数整体的性质. 首先应满足定义域关于原点对称; 同时对定义域内任何值都有 $f(-x) = f(x)$, 则 $y = f(x)$ 是奇函数; $f(-x) = f(x)$, 则 $y = f(x)$ 是偶函数, 并且有以下规律:

奇 + 奇 = 奇 奇 + 偶 = 非 偶 + 偶 = 偶

奇 × 奇 = 偶 奇 × 偶 = 奇 偶 × 偶 = 偶

这里“奇”表示奇函数且非偶函数, “偶”表示偶函数且非奇函数, 其中“+”是指“+”与“-”; 其中“×”包括“×”与“÷”, 而数字当作偶函数.

$$(1) \text{定义域 } x \in \mathbb{R} \quad \text{奇} + \text{奇} = \text{奇}$$

$\therefore y = x + \sin x$ 是奇函数.

$$(2) \text{定义域 } x \in \mathbb{R} \quad \text{偶} \times \text{偶} = \text{偶}$$

$\therefore y = x^2 \cdot \cos x$ 是偶函数.

$$(3) f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} \quad \text{定义域 } x \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -f(x)$$

$\therefore$ 是奇函数.

$$(4) \text{定义域 } x \leq -1 \text{ 或 } x > 1, \text{ 不关于原点对称,}$$

$\therefore$ 非奇非偶函数.

$$(5) \text{定义域 } x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \log_a \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x). \end{aligned}$$

$\therefore y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(6) \text{若满足 } f(x) + f(-x) = 0, \text{ 等价于 } f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore \frac{x^2 + 1 + x - 1}{x^2 + 1 + x + 1} + \frac{x^2 + 1 - x - 1}{x^2 + 1 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1)(\sqrt{x^2 + 1} - x + 1)} \\ &= \frac{1}{\{[\sqrt{x^2 + 1} + (x - 1)][\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1)] + [\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)][\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1)]\}} \\ &= \frac{x^2 + 1 - (x - 1)^2 + x^2 + 1 - (x + 1)^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1)(\sqrt{x^2 + 1} - x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x + 1)(\sqrt{x^2 + 1} - x + 1)} \\ &\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 定义域 } x \in \mathbb{R} \\ &\therefore \text{ 是奇函数.} \end{aligned}$$

(7) 分段函数奇偶性的判断, 可以借助图象. 但本题函数图象不熟悉, 无法应用, 可以假设奇函数且已知 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \lg x$, 求 $x < 0$ 时解析式方法: $-x > 0$, 所以 $f(-x) = -x + \lg(-x)$. 因为若 $f(x)$ 是奇函数, 应有 $f(-x) = -f(x)$. 所以, $-f(x) = -x + \lg(-x)$. 所以, $x < 0$ 时解析式是 $f(x) = x - \lg(-x)$; 而题目为 $x < 0$ 时解析式恰是 $x - \lg(-x)$. 所以

$$y = \begin{cases} x + \lg x & \text{当 } x > 0 \\ x - \lg(-x) & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

是奇函数.

例 5 若奇函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上是增函数. 求证在 $(-b, -a)$ 上也是增函数 (其中 $0 < a < b$).

证明 在 $(-b, -a)$ 上任取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (a, b)$, 且 $-x_1 > -x_2$.

$\because f(x)$ 在 (a, b) 上是增函数, $\therefore -x_1 > -x_2$ 时应有 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

$\because y = f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x_1) = -f(x_1)$, $f(-x_2) = -f(x_2)$.

$$\text{即 } -f(x_1) > -f(x_2)$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

$\therefore y = f(x)$ 在 (a, b) 上也是增函数.

说明: ①类似地可知奇函数在对称区间上增减性相同, 而偶函数在对称区间上增减性相反. ②本题中有两个区间证明时应按求证的区间开始, 即证 $(-b, -a)$ 区间上, 就在所证区间上任取二值.

例 6 已知 $f(x) = ax^3 + bx + 3$, 且 $f(5) = 7$. 求 $f(-5)$ 值.

$$\text{解 } \because f(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot 5 + 3 = 7,$$

$$\therefore a \cdot 5^3 + b \cdot 5 = 4;$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-5) &= a(-5)^3 + b(-5) + 3 \\ &= -(a \cdot 5^3 + b \cdot 5) + 3 \\ &= -4 + 3 = -1. \end{aligned}$$

分析 $f(x)$ 本身不是奇函数, 而是奇函数与常数的和(或差), 这样把数字另处理时, 可以使用奇函数的性质.

例 7 已知函数 $y = f(x)$ 对定义域内任意自变