
图书在版编目(CIP)数据

高中数学知识点与能力训练手册/杜晓彦主编. —4 版. —大连:大连理工大学出版社,2002. 6

(中学基础知识与素质教育)

ISBN 7-5611-1626-8

I. 高 … II. 杜 … III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 05915 号

大连理工大学出版社出版发行

大连市凌水河 邮政编码 116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466

E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn

URL:http://www.dutp.com.cn

大连业发印刷有限公司印刷

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 字数:1244 千字 印张:30 插页:2

印数:126001—161000 册

1999 年 6 月第 1 版

2002 年 6 月第 4 版

2002 年 6 月第 7 次印刷

责任编辑:水舟 刘群

责任校对:郑丽红

封面设计:孙宝福

版式设计:孙宝福

定价:28.00 元

概 念 篇

第一章 集合与简易逻辑.....	1	知识点剖析	13
一、集合	1	知识点应用	15
知识点剖析	1	强化训练	16
知识点应用	3	二、指数函数与对数函数	18
强化训练	4	知识点剖析	18
二、简易逻辑	5	知识点应用	19
(一)逻辑联结词	5	强化训练	20
知识点剖析	5	参考答案与提示	21
知识点应用	5	第三章 数列	22
强化训练	6	一、数列	22
(二)四种命题	7	知识点剖析	22
知识点剖析	7	知识点应用	22
知识点应用	7	强化训练	24
强化训练	8	二、等差数列	24
(三)充分条件和必要条件	8	知识点剖析	24
知识点剖析	8	知识点应用	25
知识点应用	9	强化训练	26
强化训练	9	三、等比数列	27
参考答案与提示	10	知识点剖析	27
第二章 函数	13	知识点应用	27
一、映射与函数	13	强化训练	28

参考答案与提示	29	六、含有绝对值的不等式	85
第四章 三角函数	31	知识点剖析	85
一、任意角的三角函数	31	知识点应用	85
知识点剖析	31	强化训练	86
知识点应用	33	七、利用重要不等式求最值	86
强化训练	35	知识点剖析	86
二、两角和与差的三角函数	37	知识点应用	87
知识点剖析	37	强化训练	87
知识点应用	38	参考答案与提示	88
强化训练	41	第七章 直线和圆的方程	90
三、三角函数的图像和性质	43	一、有向线段、定比分点	90
知识点剖析	43	知识点剖析	90
知识点应用	45	知识点应用	90
强化训练	47	强化训练	91
参考答案与提示	50	二、直线的方程	92
第五章 平面向量	58	知识点剖析	92
一、向量及其运算	58	知识点应用	92
知识点剖析	58	强化训练	93
知识点应用	59	三、两条直线的位置关系	93
强化训练	66	知识点剖析	93
二、解斜三角形	68	知识点应用	94
知识点剖析	68	强化训练	96
知识点应用	69	四、曲线和方程	97
强化训练	70	知识点剖析	97
参考答案与提示	71	知识点应用	97
第六章 不等式	78	强化训练	99
一、不等式的概念和性质	78	五、圆	100
知识点剖析	78	知识点剖析	100
知识点应用	78	知识点应用	100
强化训练	79	强化训练	102
二、有理不等式的解法	79	参考答案与提示	103
知识点剖析	79	第八章 圆锥曲线	106
知识点应用	80	一、椭圆	106
强化训练	80	知识点剖析	106
三、无理不等式的解法	81	知识点应用	106
知识点剖析	81	强化训练	108
知识点应用	81	二、双曲线	108
强化训练	82	知识点剖析	108
四、指数不等式、对数不等式的解法	82	知识点应用	109
知识点剖析	82	强化训练	110
知识点应用	82	三、抛物线	111
强化训练	82	知识点剖析	111
五、不等式的证明	83	知识点应用	111
知识点剖析	83	强化训练	113
知识点应用	83	四、坐标变换	113
强化训练	84		

知识点剖析	113
知识点应用	114
强化训练	115
参考答案与提示	115
第九章 直线、简单几何体	117
一、空间直线和平面	117
(一)平面	117
知识点剖析	117
知识点应用	117
强化训练	118
(二)空间两条直线	118
知识点剖析	118
知识点应用	119
强化训练	120
(三)空间直线和平面	120
知识点剖析	120
知识点应用	121
强化训练	122
(四)空间两个平面	123
知识点剖析	123
知识点应用	124
强化训练	125
二、简单几何体	126
知识点剖析	126
知识点应用	129
强化训练	132
三、多面体和旋转体的体积	133
知识点剖析	133
知识点应用	134
强化训练	135
参考答案与提示	135

第十章 排列、组合、二项式定理	138
一、两个原理、排列、组合的意义	138
知识点剖析	138
知识点应用	138
强化训练	138
二、排列数和组合数的计算	139
知识点剖析	139
知识点应用	139
强化训练	139
三、排列、组合应用问题	140
知识点剖析	140
知识点应用	140
强化训练	140
四、二项式定理	141
知识点剖析	141
知识点应用	142
强化训练	142
参考答案与提示	143
第十一章 复数	144
一、复数的概念	144
知识点剖析	144
知识点应用	145
强化训练	145
二、复数的运算	146
知识点剖析	146
知识点应用	146
强化训练	148
三、复数的三角形式	148
知识点剖析	148
知识点应用	150
强化训练	152
参考答案与提示	153

规 律 篇

第一章 集合与简易逻辑	155
知识点剖析	155
一、集合	155
二、简易逻辑	155
学法指导	155

一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	155
二、消化疑难问题	159
知识点应用	159
1. 命题方向分析	159

2. 典型题例析	159	一、向量运算	212
强化训练	160	二、重要定理、公式	212
参考答案与提示	161	学法指导	212
第二章 函数	163	一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	212
知识点剖析	163	二、消化疑难问题	215
一、映射与函数	163	知识点应用	215
二、幂函数、指数函数、对数函数	164	1. 命题方向分析	215
学法指导	165	2. 典型题例析	215
一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	165	强化训练	218
二、消化疑难问题	171	参考答案与提示	218
知识点应用	172	第六章 不等式	220
1. 命题方向分析	172	知识点剖析	220
2. 典型题例析	172	一、常用的基本不等式	220
强化训练	184	二、证明不等式常用的方法	220
参考答案与提示	185	三、不等式的解法	221
第三章 数列、极限	187	四、不等式的应用	221
知识点剖析	187	学法指导	221
一、数列	187	一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	221
二、极限(数列的极限)	188	二、消化疑难问题	224
学法指导	188	知识点应用	225
一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	188	1. 命题方向分析	225
二、消化疑难问题	192	2. 典型题例析	225
知识点应用	193	强化训练	226
1. 命题方向分析	193	参考答案与提示	227
2. 典型题例析	193	第七章 直线	229
强化训练	196	知识点剖析	229
参考答案与提示	197	一、直线的有关概念和公式	229
第四章 三角函数	199	二、直线方程的几种形式	229
知识点剖析	199	三、两直线的位置关系	229
一、任意角的三角函数	199	学法指导	230
二、和差倍半与和积互化	199	一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	230
三、三角函数的图像和性质	200	二、消化疑难问题	234
学法指导	201	知识点应用	235
知识点应用	206	1. 命题方向分析	235
1. 命题方向分析	206	2. 典型题例析	235
2. 典型题例析	207	强化训练	238
强化训练	210	参考答案与提示	239
参考答案与提示	211	第八章 圆锥曲线	240
第五章 平面向量	212	知识点剖析	240
知识点剖析	212		

一、曲线与方程	240
二、圆	240
三、椭圆	241
四、双曲线	242
五、抛物线	243
六、圆锥曲线的统一定义	243
七、坐标轴平移	243
学法指导	244
一、常用数学思想方法、规律及典型题的技巧解法	244
二、消化疑难问题	256
知识点应用	259
1. 命题方向分析	259
2. 典型题例析	259
强化训练	264
参考答案与提示	265
第九章 直线、简单几何体	266
知识点剖析	266
一、平行与垂直	266
二、空间的角和距离	266
三、多面体和旋转体	266
学法指导	266
一、常用数学思想方法、规律及典型题的技巧解法	266
二、消化疑难问题	267
知识点应用	268
1. 命题方向分析	268
2. 典型题例析	268
强化训练	273
参考答案与提示	274
第十章 排列、组合、二项式定理	276
知识点剖析	276

一、加法原理和乘法原理	276
二、排列与组合	276
三、排列数、组合数	276
四、排列、组合的应用	276
五、二项式定理	276
学法指导	277
一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	277
二、消化疑难问题	279
知识点应用	280
1. 命题方向分析	280
2. 典型题例析	280
强化训练	285
参考答案与提示	285
第十一章 复数	287
知识点剖析	287
一、复数的概念	287
二、共轭复数、模、辐角	287
三、复数的三角形式	287
四、复数的运算	288
五、复数与轨迹	288
六、复数方程	288
学法指导	288
一、常用数学思想方法、规律及典型题技巧解法	288
二、消化疑难问题	292
知识点应用	293
1. 命题方向分析	293
2. 典型题例析	293
强化训练	299
参考答案与提示	300

综合应用篇

第一章 集合与简易逻辑	301
知识点归纳	301
知识点应用	301
1. 高考热点分析	301
2. 综合题型例析	301

强化训练	303
参考答案与提示	306
第二章 函数	309
知识点归纳	309
知识点应用	309

1. 高考热点分析	309	强化训练	400
2. 综合题型例析	309	参考答案与提示	403
强化训练	316	第七章 解析几何	405
参考答案与提示	326	知识点归纳	405
第三章 数列、极限	328	知识点应用	405
知识点归纳	328	1. 高考热点分析	405
知识点应用	328	2. 综合题型例析	405
1. 高考热点分析	328	强化训练	421
2. 综合题型例析	328	参考答案与提示	430
强化训练	335	第八章 立体几何	433
参考答案与提示	340	知识点归纳	433
第四章 三角函数	342	知识点应用	434
知识点归纳	342	1. 高考热点分析	434
知识点应用	342	2. 综合题型例析	434
1. 高考热点分析	342	强化训练	442
2. 综合题型例析	342	参考答案与提示	453
强化训练	351	第九章 排列、组合、二项式定理	454
参考答案与提示	362	知识点归纳	454
第五章 平面向量	364	知识点应用	454
知识点归纳	364	1. 高考热点分析	454
知识点应用	365	2. 综合题型例析	454
1. 高考热点分析	365	强化训练	458
2. 综合题型例析	365	参考答案与提示	460
强化训练	367	第十章 复数	461
参考答案与提示	385	知识点归纳	461
第六章 不等式	396	知识点应用	461
知识点归纳	396	1. 高考热点分析	461
知识点应用	397	2. 综合题型例析	462
1. 高考热点分析	397	强化训练	467
2. 综合题型例析	397	参考答案与提示	470

概念篇

第一章 集合与简易逻辑

一、集合

知识点剖析

1. 集合

集合是一个不定义的概念或原始概念。对集合我们只能作描述性说明：一组对象的全体形成一个集合（有时也简称集）。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

例如小于5的自然数就形成一个集合，其中1,2,3,4都是这个集合的元素。

集合常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示，元素常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。

2. 集合具有以下特征

（1）确定性：对于一个给定的集合，任何一个对象或者是这个集中的元素，或者不是它的元素。这是集合的最基本特征。

（2）互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的（即互不相同的），相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素。

（3）无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说由 a, b 两个元素组成的集合与 b, a 两个元素组成的集合是相同的。

★说明 当集合中的元素可以用省略符号表示时，必须强调顺序，例如：

集合 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

集合 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ 等

3. 空集

不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\emptyset$ 。

4. 属于

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ （或 $a \bar{\in} A$ ），根据空集的定义，对任何事物 a 都有 $a \notin \emptyset$ 。

5. 集合的表示法

集合常用的表示法有列举法、描述法与图形法。

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫列举法，例如 $A = \{\text{指南针, 造纸, 火药, 印刷}\}$ 。

把集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内

表示集合的方法，叫做描述法，它的一般形式为 $\{x|p(x)\}$ ，符号前面的 x 表示集合中元素的一般形式，而后面的 $p(x)$ 表示集合元素 x 的公共属性，例如： $A = \{n|n \in \mathbb{Z}, n < 8\}$ 。在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可省去竖线及左边的部分，例如由所有圆组成的集合，可表示为 $\{\text{圆}\}$ 。

★说明 ①列举法可以看清集合的元素，描述法可以看清集合元素的特征。

②两种表示法里的“ $\{\}$ ”都有“全体”“集合”的含义，因此， $\{\text{全体整数}\}$ 中的“全体”二字是多余的，应改为 $\{\text{整数}\}$ 。

③除了用列举法和描述法来表示集合，还可以利用图形表示集合，也可以通过集合的运算来表示集合，例如 $A = \{1, 2\} \cup \{2, 3\}$ 。

6. 子集

对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ （或 $B \supseteq A$ ）。即任意一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$ ，则 $A \subseteq B$ ，用文氏图表示 $A \subseteq B$ ，如图1-1所示。

通常用 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 表示自然数集，整数集，有理数集，实数集，复数集，则有 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ 。

★说明 ① $\in$ 和 $\subseteq$ 有重要的区别。 $\in$ （属于）是不定义的，体现元素与集合间关系，例如 $a \in A$ ，其中 a 为集合 A 中的元素（尽管 a 本身也可能是一个集合）；而 $\subseteq$ （包含）体现集合与集合间关系，是通过“ $\in$ ”定义的，例如 $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ 。

② $\emptyset$ 是任何集合的子集，设 A 为任一集合，则 $\emptyset \subseteq A$ 。

③任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$

④ $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。

7. 真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么集合 A 叫集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ （或 $B \supsetneq A$ ）。即任意一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$ 且存在 $b \in B$ 且 $b \notin A$ ，则 $A \subsetneq B$ 。例： $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ ；设 A 为非空集合，则 $\emptyset \subsetneq A$ ；若 $A \subsetneq B$ ，且 $B \subsetneq C$ ，则 $A \subsetneq C$ 。

8. 集合相等

对于两个集合 A 与 B ，如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，我们就说这两个集合相等。即如果任意一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$ 且

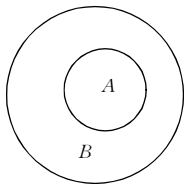


图 1-1

B ; 任意一个 $x \in B \Rightarrow x \in A$, 则 $A = B$ 。例如同解方程与同解不等式, 其实质就是集合相等。

9. 交集

设有 A, B 两个集合, 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。也就是说, A 与 B 的交集是由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合。由交集定义可以推出以下几条性质:

- (1) $A \cap A = A$;
- (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- (3) $A \cap B = B \cap A$ 。

其证明如下:

- (1) $A \cap A = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in A\}$
 $= \{x | x \in A\} = A$
- (2) $\because A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$ (引用 $A \cap B \subseteq B$)
 $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$ (空集为任何集合的子集)
 $\therefore A \cap \emptyset = \emptyset$ (集合相等的定义)

- (3) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\} = \{x | x \in B \text{ 且 } x \in A\} = B \cap A$

10. 并集

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。对于并集, 要注意其中“或”的意义, 用它连接的并列成分间不一定是互相排斥的, “ $x \in A$ 或 $x \in B$ ”这一条件, 包括下列三种情况: $x \in A$ 但 $x \notin B$; $x \in B$ 但 $x \notin A$; $x \in A$ 且 $x \in B$ (很明显, 适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A \cap B$, 它不一定是空集)。还要注意, A 与 B 的公共元素在 $A \cup B$ 中只出现一次, 因此, $A \cup B$ 是由所有至少属于 A, B 两者之一的元素组成的集合。

联系交集、子集和并集的定义有

$$A \cap B \subseteq A \text{ (或 } B) \subseteq A \cup B$$

由并集定义可以推出以下性质:

- (1) $A \cup A = A$
- (2) $A \cup \emptyset = A$
- (3) $A \cup B = B \cup A$

11. 补集

补集是相对于全集而言的。全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念, 它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素, 因此全集因研究问题而异, 记作 U 。例如研究数集时, 常常把实数集 R 作为全集。在立体几何中, 三维空间是全集, 这时, 平面是全集的一个子集。而在平面几何中, 整个平面是全集。

补集: 已知全集 U , 集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫作集合 A 在集合 U 中的补集, 记作 $C_U A$, 即

$C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ 如图 1-2 所示。

补集可以这样解释, 如果从全集 U 中取出集合 A 的全部元素, 则所有剩余下来的元素组成的集合就是 $C_U A$, 由此, 我们很容易想起“差”的概念, 事实上, 补集 $C_U A$ 就是全集 U 与集合 A 的

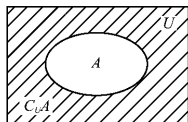


图 1-2

差集 (如图 1-2)。

由补集定义可推出以下简单性质:

- (i) $A \cup C_U A = U$
- (ii) $A \cap C_U A = \emptyset$
- (iii) $C_U (C_U A) = A$

12. 不等式的几个基本性质

- (1) 如果 $a > b$, 那么 $a + c > b + c$
- (2) 如果 $a > b, c > 0$, 那么 $ac > bc$
- (3) 如果 $a > b, c < 0$, 那么 $ac < bc$

以上不等式的基本性质是解不等式的基础。

13. $|x| < a, |x| > a$ 型的不等式 (其中 $a \in R$)

(1) $|x| < a$ 型 ($a \in R$)

① 当 $a > 0$ 时, 由绝对值意义可知它等价于一个一元一次不等式组, 即 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

② 当 $a \leq 0$ 时, $|x| < a$ 无解, 而此时, 不等式 $-a < x < a$ ($a \leq 0$) 也无解 ($\because a > -a$, 而 $a < 0, \therefore$ 无解)。

由 ①② 可知: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ 恒成立, 其中 $a \in R$ 。

(2) $|x| > a$ 型 ($a \in R$)

同理, $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$, 其中 $a \in R$ 。其证明如下:

① 当 $a > 0$ 时, $|x| > a$, 由绝对值意义可知 $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$ 。

② 当 $a < 0$ 时, $|x| > a$ 的解集为 R , 而此时, $x > a$ 或 $x < -a$ 的并集也为 R , 如图 1-3。

③ 当 $a = 0$ 时, $|x| > a$,

即 $|x| > 0, \therefore x \neq 0$ 。

而此时, $x > a$ 或 $x < -a$

即 $x > 0$ 或 $x < 0$ 即 $x \neq 0$ 。

综上所述, $|x| > a \Leftrightarrow$

$x > a$ 或 $x < -a$, 其中 $a \in R$ 。

图 1-3

一般地, 不等式 $|x| < a$ 的解集是 $\{x | -a < x < a\}$; 不等式 $|x| > a$ 的解集是 $\{x | x > a \text{ 或 } x < -a\}$, 其中 $a \in R$ 。

14. $|ax + b| < c, |ax + b| > c$ 型不等式 ($c \in R$)

把 $ax + b$ 看成一个整体时, 可化为 $|x| < c, |x| > c$ 型不等式来解。

一般地, 不等式 $|ax + b| < c$ 的解集是 $\{x | -c < ax + b < c\}$, 据此, 再求原不等式的解集; 不等式 $|ax + b| > c$ 的解集是 $\{x | ax + b > c \text{ 或 } ax + b < -c\}$, 据此再求原不等式的解集 (其中 $c \in R$)。

15. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式, 它的一般形式是 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$), 其中 $ax^2 + bx + c$ 是实数域上的二次三项式。

16. 一元二次不等式的解法

(1) 当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 有两个实根 x_1, x_2 , 那么 $ax^2 + bx + c$ 总可以分解为: $a(x - x_1)(x - x_2)$ 。这样, 解一元二次不等式就可归结为解两个一元一次不等式组。一元二次不等式的解集就是这两个一元一次不等式组解集的并集。

(2) 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, $ax^2 + bx + c$ 总可以写成 $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$, 而 $[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$

永远为正值, 所以二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的值的正负号取决于二次项系数 a , 如果 $a > 0$, 那么不等式 $ax^2 + bx$

$+c>0$ 的解集是实数集 R , 如果 $a<0$, 那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 无解, 它的解集是空集。

利用二次函数的图像, 也可以求得一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ (或 $ax^2+bx+c<0$) 的解集 (其中 $a>0$), 其解集情况讨论如下:

① 如果 $\Delta>0$, 此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点 (如图 1-4), 即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相异实根 $x_1, x_2 (x_1<x_2)$ 。那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$; 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$ 。

② 如果 $\Delta=0$, 此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点 (图 1-5), 即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$, 那么, 不等式 ax^2+bx

$+c>0$ 的解集是 $\{x|x<-\frac{b}{2a} \text{ 或 } x>-\frac{b}{2a}\}$, 也即 $\{x|x\in R \text{ 且 } x\neq-\frac{b}{2a}\}$; 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集 $\emptyset$ 。

③ 如果 $\Delta<0$ 时, 此时抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点 (如图 1-6) 即方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根, 那么不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 R , 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集 $\emptyset$ 。

二次项系数为负的不等式可先化为二次项系数为正的不等式, 再求它的解集。

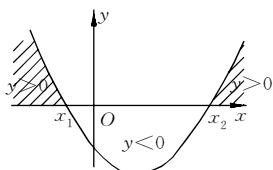


图 1-4

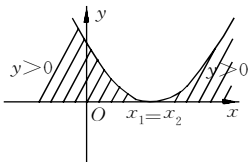


图 1-5

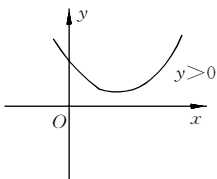


图 1-6

知识点应用

1. 考纲要求

考试内容: 集合、子集、交集、并集、补集。| $ax+b|<c$, | $ax+b|>c$ ($c>0$) 型不等式; 一元二次不等式。

考试要求: 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念, 了解空集和全集的意义, 了解属于、包含、相等关系的意义, 能掌握有关的术语和符号, 能正确地表示一些较简单的集合。理解 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ ($c>0$) 型不等式的概念, 并掌握它们的解法; 了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系, 掌握一元二次不等式的解法。

2. 典型题例析

【例 1】下列备选项中可以组成集合的是 ()。

- A. 与 2 非常接近的全体实数
- B. 很著名的科学家的全体
- C. 某教室内的全体桌子

D. 与无理数 π 相差很小的数

解 由集合的确定性可知答案为 C。

【例 2】以下说法中正确的个数有 ()。

- ① $M = \{(1, 2)\}$ 与 $N = \{(2, 1)\}$ 表示同一个集合;
- ② $M = \{1, 2\}$ 与 $N = \{2, 1\}$ 表示同一个集合;
- ③ 空集是惟一的;
- ④ $M = \{y|y = x^2 + 1, x \in R\}$ 与 $N = \{x|x = t^2 + 1, t \in R\}$, 则集合 $M = N$ 。

A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

解 ① 集合 M 表示由点 $(1, 2)$ 组成的单点集, 集合 N 表示点 $(2, 1)$ 组成的单点集。

② 由集合元素无序性可知 M, N 表示同一个集合。

③ 由 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ (其中 $\emptyset_1, \emptyset_2$ 均为空集), 由集合相等定义可知 $\emptyset_1 = \emptyset_2$, 即证明空集惟一性。

④ 要认识一个集合, 应从以下方面入手 (i) 判断集合元素是什么; (ii) 元素有何属性 (如表示数集, 点集等), 表示集合时与代表元素采用的字母无关。而 ④ 中的集合都表示大于等于 1 的实数组成的集合, 故相等, 选 A。

【例 3】设 $A = \{a, b\}$, 且 $B = \{x|x \subseteq A\}$, 则 ()。

- A. $A \in B$ B. $A \subseteq B$
- C. $A \subseteq B$ D. $A \notin B$

解 由 B 的表示可知, x 代表 A 的子集, $B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 所以 $A \subseteq B$ 。

【例 4】若集合 $M = \{x|x = m + \frac{1}{6}, m \in Z\}$, $N = \{x|x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in Z\}$, $P = \{x|x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in Z\}$, 则 M, N, P 的关系是 ()。

- A. $M = N \subsetneq P$ B. $M \subsetneq N = P$
- C. $M \subsetneq N \subsetneq P$ D. $N \subsetneq P \subsetneq M$

解 对集合 $M, x = \frac{6m+1}{6}, m \in Z$

对集合 $N, x = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in Z$

对于 $P, x = \frac{3p+1}{6}, p \in Z$

$\therefore M \subsetneq N = P$, 故选 B。

【例 5】已知 $\{a, b\} \subseteq A \subsetneq \{a, b, c, d, e\}$, 则满足条件的集合 A 的个数为 ()。

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

解 据题意 A 中至少含有 a, b 两元素, 即求 $\{a, b, c, d, e\}$ 中含有 a, b 两元素的非空子集的个数, 应为 $2^3 - 1 = 7$ 。

【例 6】下列命题: ① 空集没有子集; ② 空集是任何集合的真子集; ③ 任何集合必有两个或两个以上的子集; ④ 用列举法表示集合时, 只能表示有限集, 不能表示无限集, 其中正确的有 ()。

- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

解 $\because \emptyset \subseteq \emptyset \therefore$ ① 错; $\emptyset$ 为任何非空集合的真子集, 为任何集合的子集, 故 ② 错; $\emptyset$ 只有一个子集, ③ 错, 用列举法可以表示无限集, 例如 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, 表示正偶数组成的集合, ④ 错。故选 D。

【例 7】1999 年全国高考题 如图 1-7 所示, U 是

全集, M, P, S 是 U 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $(M \cap P) \cap S$
 B. $(M \cap P) \cup S$
 C. $(M \cap P) \cap C_U S$
 D. $(M \cap P) \cup C_U S$

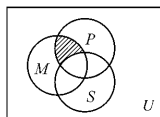


图 1-7

解 此阴影部分是属于 M 且属于 P , 即 $M \cap P$. 但又不属于 S 集, 所以为 $(M \cap P) \cap C_U S$, 故选 C.

【例 8】方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

的解集可以表示为 ① $(1, 2)$; ② $\{(1, 2)\}$; ③ $\{x, y | x = 1, y = 2\}$; ④ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$; ⑤ $\{(x, y) | \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}\}$, 以上正确表示的个数有 ().

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

解 其中 ②⑤ 正确故选 D.

【例 9】已知 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + 4x + p < 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 p 的范围.

解 $A \cup B = A$ 则 $B \subseteq A$, (但不要忽略 $\emptyset$ 是任何集合子集)

$\therefore A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, 所以当 $p \geq 4$ 时 $B = \emptyset$

当 $p < 4$ 时

$$B = (-2 - \sqrt{4 - p}, -2 + \sqrt{4 - p})$$

故 $p \geq 4$ 时, 显然有 $B \subseteq A$; $p < 4$ 时, 若满足 $B \subseteq A$, 必须 $-2 + \sqrt{4 - p} \leq -1$, 即 $\sqrt{4 - p} \leq 1$, $3 \leq p < 4$. 综上所述, $p \in [3, +\infty)$.

【例 10】不等式 $1 \leq |x - 2| \leq 7$ 的解集是 ().

- A. $3 \leq x \leq 9$ B. $-5 \leq x \leq 1$
 C. $-5 \leq x \leq 9$ D. $-5 \leq x \leq 1$ 或 $3 \leq x \leq 9$

解 原不等式等价于

$$\begin{cases} |x - 2| \leq 7 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x - 2 \leq 7 \\ x - 2 \geq 1 \text{ 或 } x - 2 \leq -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 9$$

故选 D.

【例 11】若不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 则 $a - b$ 的值为 ().

- A. -10 B. -14 C. 10 D. 14

解 由题意 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集为 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$ 知: $a < 0$, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 2$ 图像过 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(\frac{1}{3}, 0)$ 两点, 即 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ 为方程 $ax^2 + bx + 2 = 0$ 两根.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{2}{a} \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -12 \\ b = -2 \end{cases} \\ \therefore a - b = -12 - (-2) = -10$$

故选 A.

【例 12】若 $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$, 使 y 有实数值的所有实数 x 的值的集合为 ().

- A. $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ B. $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
 C. $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 2\}$ D. $\{x | -3 \leq x \leq 2\}$

解 归结为关于 y 的二次方程有实根的条件

$$\Delta = (4x)^2 - 4 \times 4(x + 6) \geq 0$$

$$\text{即 } 16(x - 3)(x + 2) \geq 0$$

$\therefore x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3$, 故选 A.



强化训练

(一) 选择题

1. 2001 年北京春招试题 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集个数是 ().

- A. 32 B. 31 C. 16 D. 15

2. 已知集合 A, B, C , 且 $A \subseteq B, A \subseteq C$, 若 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 2, 4, 8\}$, 则集合 A 的子集最多是 ().

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

3. $A = \{x | |x| < 2\}$, $B = \{x | x > a\}$, 全集 $U = \mathbf{R}$, 若 $A \subseteq C_U B$ 则有 ().

- A. $a = 2$ B. $a \leq 2$ C. $a \geq 2$ D. $a < 2$

4. 设 $M = \{x | x^2 + px - 3 = 0\}$, $N = \{x | x^3 - qx^2 + rx = 0\}$, $S = \{p, q, r\}$ 且 $M \cap N = \{-3\}$, $M \cup N = \{-2, -3, 0, 1\}$, 则 S 为 ().

- A. $\{-2, 5, -6\}$ B. $\{2, 5, 6\}$
 C. $\{5, -2, 6\}$ D. $\{2, -5, 6\}$

5. 全集为 $U = \{2, 3, 5\}$, $A = \{2, |a - 5|\}$, $C_U A = 5$, 则 a 的值是 ().

- A. 2 B. 8 C. 2 或 8 D. -2 或 8

6. 设全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y - 3}{x - 2} = 1\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 那么 $C_U M \cap C_U N$ 等于 ().

- A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$
 C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y = x + 1\}$

7. 已知集合 $M = \{x | x \geq 3\sqrt{3}, x \in \mathbf{R}\}$, $a = 2\sqrt{7}$, 则下列各式中正确的一个是 ().

- A. $a \in M$ B. $\{a\} \in M$
 C. $a \subseteq M$ D. $a \in M$

8. 与命题“若 $a \in M$, 则 $b \in M$ ”等价的命题是 ().

- A. $a \in M$ 或 $b \in M$ B. 若 $b \in M$ 则 $a \in M$
 C. 若 $a \in M$ 则 $b \in M$ D. 若 $b \in M$ 则 $a \in M$

9. 下列不等式中, 与不等式 $\frac{x - 3}{2 - x} \geq 0$ 同解的是 ().

- A. $(x - 3)(2 - x) \geq 0$ B. $(x - 3)(2 - x) > 0$
 C. $\frac{2 - x}{x - 3} \geq 0$ D. $\lg(x - 2) \leq 0$

10. 设集合 $M = \{x | x \geq 3\}$, 集合 $N =$

- $\{x| |x| < 4\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$ 。
- A. $\{x| 3 < x < 4\}$ B. $\{x| 3 \leq x \leq 4\}$
 C. $\{x| 3 < x \leq 4\}$ D. $\{x| 3 \leq x < 4\}$
11. 不等式 $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 8) < 0$ 的解集是 $(\quad)$ 。
- A. $\{x| -1 < x < 5\}$ B. $\{x| x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$
 C. $\{x| 0 < x < 5\}$ D. $\{x| -1 < x < 0\}$
12. 在下列各不等式中, 与 $x^2 > 2$ 同解的不等式为 $(\quad)$ 。
- A. $x^2 + \frac{1}{x-5} > 2 + \frac{1}{x-5}$
 B. $x^2 + \sqrt{x-5} > 2 + \sqrt{x-3}$
 C. $x^2 - (x-3) > 2 - (x-3)$
 D. $x^2(x-3) > 2(x-3)$

(二) 填空题

13. $A = \{1, 3, 0\}$, $B = \{1, a^2 - a + 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 若 $A = \{x|x = a^2 + 2a + 1, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x|x = b^2 - 2b, b \in \mathbf{R}\}$, 则集合 A, B 之间的关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. $A \subseteq B, A \subseteq C, B = \{0, 1, 2, 3\}, C = \{0, 2, 4, 8\}$ 则满足上述条件的集合 A 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
16. 设 $A = \{x|x^2 + (a+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 且 $\mathbf{R}^- \cap A = \emptyset$, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
17. 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 120$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
18. 不等式 $x^2 - 2x - a > 0 (a \in \mathbf{R})$ 解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
19. 不等式组 $\begin{cases} 3x - 2 + \frac{1}{x-8} > \frac{1}{x-8} + x + 3 \\ x^2 - 2x - 2 > 0 \end{cases}$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(三) 解答题

20. 已知集合 $A = \{y|y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$, $B = \{x|x = \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{5}{2}, 0 \leq y \leq 3\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围。
21. 设 M 是满足下述条件的函数 $f(x)$ 的集合:
 (1) $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$;
 (2) 若 $x_1 \in [-1, 1], x_2 \in [-1, 1]$, 则 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$, 问定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $g(x) = x^2 + 2x - 1$ 是否是 M 的元素, 并说明理由。
22. 解关于 x 的不等式 $(m+3)x^2 + 2mx + m - 2 > 0 (m \in \mathbf{R})$ 。
23. 若不等式 $\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} > 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 求实数 m 的取值范围。

二、简易逻辑

(一) 逻辑联结词

知识点剖析

1. 命题

初中数学中命题的概念为“判断一件事情的句子”, 高中教材中定义为: “可以判断真假的语句”。其实质是

一样的。语句是不是命题的关键在于能不能判断其真假, 不能判断真假的语句就不是命题。

2. 开语句

有些语句无法确定其真假, 如 $x < 2$, 这种含有变量的语句叫开语句(或条件命题)。

3. 逻辑联结词

“或”、“且”、“非”这些词叫逻辑联结词。记做: “ $\vee$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\neg$ ”。

4. 简单命题

不含逻辑联结词的命题叫做简单命题, 记作: $p, q, r, s, \dots$ (小写拉丁字母)。

5. 复合命题

由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题。

- ★ 说明 (1) 构成: “ $p \vee q$ ”, “ $p \wedge q$ ”, “ $\neg p$ ”。
- (2) 真值表

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

知识点应用

1. 考纲要求

考试内容: 命题, 逻辑联结词, 简单命题, 复合命题及复合命题的真值表。

考试要求: 了解含有“或”、“且”、“非”的复合命题的构成; 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义; 熟练判断复合命题的真假。

2. 典型题例析

【例 1】 下列语句是不是命题? 如果是命题, 指出它的真假。

- (1) 请起立!;
 (2) $a^2 + 1 > 0$;
 (3) 明天天晴;
 (4) 91 是质数;
 (5) 中国是世界上人口最多的国家;
 (6) 这道数学题有趣吗?;
 (7) 若 $|x - y| = |a - b|$, 则 $x - y = a - b$;
 (8) 任何无限小数都是无理数。

解 “可以判断真假的语句叫做真命题”。因此语句: (1), (6) 不是命题, 其余都是命题, (2), (5) 是真命题, (8), (4), (7) 是假命题。

$\because 91 = 13 \times 7, \therefore$ (4) 是假命题

由 $|x - y| = |a - b|$, 则 $x - y = \pm (a - b), \therefore$ (7) 是假命题

无限(循环)小数 $0.3 = \frac{1}{3}$ 是有理数, $\therefore$ (8) 是假命题

题。

至于(3)的真假,可由明天的天气事实作出判断。

【例2】 分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题:

- (1) 小李是老师,小赵也是老师;
- (2) 1是合数或质数;
- (3) 他是运动员兼教练员;
- (4) 这些文学作品不仅艺术上有缺点,而且政治上有错误。

解 (1) 这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p : 小李是老师, q : 小赵是老师。

(2) 这个命题是 p 或 q 的形式,其中 p : 1是合数, q : 1是质数。

(3) 这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p : 他是运动员, q : 他是教练员。

(4) 这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p : 这些文学作品艺术上有缺点, q : 这些文学作品政治上有错误。

【例3】 已知下列各组命题,分别指出各组的“ p 或 q ”,“ p 且 q ”形式的复合命题的真假:

- (1) p : 111是奇数; q : 111是质数。
- (2) p : 若 $a < 1$, 则 $\frac{1}{a} > 1$; q : $a^2 + b^4 + c^6 > 0$
- (3) p : 无理数与有理数的积必为无理数;
 q : 无理数与有理数的和必为无理数。
- (4) p : 若 α, β 都是锐角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\sin \alpha > \sin \beta$;
 q : 若 α, β 都是锐角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\cos \alpha < \cos \beta$ 。

解 (1) $\because 111 = 3 \times 37, \therefore p$ 为 T, q 为 F。
 $\therefore “p \vee q”$ 为 T, “ $p \wedge q$ ”为 F, “ $\neg p$ ”为 F;
 (2) $\because p$ 中的 a 可取负数, q 中的 a, b, c 可同时取 0
 $\therefore p$ 为 F, q 为 F, $\therefore “p \vee q”$ 为 F, “ $p \wedge q$ ”为 F,
 “ $\neg p$ ”为 T;
 (3) $\because p$ 中的有理数可为 0, $\therefore p$ 为 F, q 为 T
 $\therefore “p \vee q”$ 为 T, “ $p \wedge q$ ”为 F, “ $\neg p$ ”为 T;
 (4) $\because p$ 为 T, q 为 T, $\therefore “p \vee q”$ 为 T, “ $p \wedge q$ ”为 T,
 “ $\neg p$ ”为 F。

强化训练

一、选择题

1. 如果命题“ p 或 q ”与命题“非 p ”都是真命题,那么()。
 - A. 命题 p 不一定是假命题
 - B. 命题 q 一定是真命题
 - C. 命题 q 不一定是真命题
 - D. 命题 p 与命题 q 的真值相同
2. 命题 p 与命题“非 p ”()。
 - A. 可能都是真命题
 - B. 可能都是假命题
 - C. 一个是真命题,另一个是假命题
 - D. 只有 p 是真命题

3. 由下列各组命题构成“ p 或 q ”,“非 p ”形式的复合命题中, p 或 q 为真, p 且 q 为假, 非 p 为真的是()。

- A. p : 3是偶数; q : 4是奇数
- B. p : $3 + 2 = 6$; q : $5 > 3$
- C. p : $q \in \{a, b\}$; q : $\{a\} \subsetneq \{a, b\}$
- D. p : $Q \subsetneq R$; q : $N = N^*$

4. 如果命题“ p 且 q ”与命题“ p 或 q ”都是假命题,那么()。

- A. 命题“非 p ”与命题“非 q ”的真值不同
- B. 命题“非 p ”与命题“非 q ”至少有一个是假命题
- C. 命题 q 与命题“非 p ”的真值相同
- D. 命题“非 p 且非 q ”是真命题

5. 下列句子或式子是命题的有()个。

- ① 祝你健康 ② 你会说英语吗?
- ③ 你快离开这里 ④ $x - 1 = 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 复合命题: 平行线不相交的形式是()。

- A. p 或 q B. p 且 q
- C. 非 p D. 都不是

7. 对于命题: $p: \emptyset \subsetneq \{0\}$, $q: \emptyset = \{0\}$, 下述正确的是()。

- A. p 假 q 真 B. “ p 或 q ”为真
- C. “ p 且 q ”为真 D. 非 p 为真

二、填空题

8. 分别用“ p 或 q ”, “ p 且 q ”, “非 p ”填空:

(1) 命题“非空集 $A \cap B$ 中的元素既是 A 中的元素, 也是 B 中的元素”是_____的形式。

(2) 命题“非空集 $A \cup B$ 中的元素是 A 中的元素或 B 中的元素”是_____形式。

(3) 命题“非空集 $C \cup A$ 中的元素是 C 中的元素但不是 A 中的元素”是_____的形式。

9. p : 菱形的对角线互相垂直, q : 菱形的对角线互相平分。

(1) p 或 q 形式的复合命题是_____。

(2) p 且 q 形式的复合命题是_____。

(3) 非 p 形式的复合命题是_____。

10. 有下列四个命题

(1) 空集是任何集合的真子集;

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $|x| \geq x$;

(3) 单元素集不是空集;

(4) 整数集既是有理数集的子集, 也是实数集的子集。

其中真命题是_____ (填命题序号)。

11. 有下列四个命题

(1) 22221 能被 3 或 7 整除;

(2) 不等式 $|x| < -(m^2 + 1) (m \in \mathbf{R})$ 的解集是 $\emptyset$;

(3) $5 \geq 5$;

(4) 方程 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ 的解是 $x = 2$ 或 $y = 4$ 。

其中假命题是_____。

三、解答题

12. 列出“ p 且 q ”、“ p 或 q ”、“非 p ”形式复合命题的真值表。

13. 分别写出由下列各组命题构成的“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”形式的复合命题,并判断其真假:

(1) p : $\sqrt{3}$ 是无理数; q : $\sqrt{3}$ 是实数;

(2) p : 集合中的元素是确定的; q : 集合中的元素是互异的;

(3) p : 矩形的对角线相等; q : 矩形的对角线互相垂直。

14. 分别写出由下列命题构成“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”形式的复合命题,并判断其真假:

(1) p : 5 是偶数; q : 5 是奇数;

(2) p : 相似三角形的对应边相等; q : 相似三角形的对应角相等;

(3) p : $N \subseteq Z$; q : $\{0\} \in N$

(4) p : $\{\text{矩形}\} \supseteq \{\text{正方形}\}$; q : $\{\text{圆内接四边形}\} \supseteq \{\text{矩形}\}$;

(5) p : 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的两根符号不同; q : 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的两根绝对值相等。

15. 分别写出由下列各组命题构成“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”形式的复合命题,并判断真假:

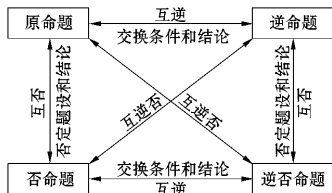
(1) p : 集合的元素是无序的; q : 集合的元素是互异的;

(2) p : 0 的倒数还是 0; q : 0 的相反数还是 0。

(二) 四种命题

知识点剖析

1. 四种命题及关系:



★ 说明 (1) 互逆否的两个命题是等价命题。

原命题 $\xLeftrightarrow{\text{等价于}}$ 逆否命题

逆命题 $\xLeftrightarrow{\text{等价于}}$ 否命题

(2) 当判断一个否定性命题的真假性发生困难时,通常转化为判断它的逆否命题的真假。

2. 反证法

用反证法证明命题的一般步骤如下:

(1) 假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立。

(2) 从这个假设出发,经过推理论证得出矛盾。

(3) 由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确。

★ 说明 三种矛盾:

(1) 与原命题条件矛盾;

(2) 与假设结论矛盾;

(3) 与某定理、公理、定义或公式等矛盾。

知识点应用

1. 纲要要求

考试内容: 四种命题及关系、反证法。

考试要求: 理解四种命题及四种命题之间的关系,利用四种命题的关系判断命题的真假;掌握反证法。

2. 典型题例析

【例 1】 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假。

(1) 若 $q < 1$, 则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根;

(2) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$;

(3) 正数 a 的平方根不等于 0。

解 (1) 逆命题: 若方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根, 则 $q < 1$, 逆命题为假。

否命题: 若 $q \geq 1$, 则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 无实根, 否命题为假。

逆否命题: 若方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 无实根, 则 $q \geq 1$, 逆否命题为真。

(2) 逆命题: 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 $ab = 0$, 逆命题为真。

否命题: 若 $ab \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 否命题为真。

逆否命题: 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$, 逆否命题为真。

(3) 逆命题: 若一个数 a 的平方根不等于 0, 则这个数 a 是正数, 逆命题为假。

否命题: 若一个数 a 不是正数, 则它的平方根等于 0。否命题为假。

逆否命题: 若一个数 a 的平方根等于 0, 则这个数 a 不是正数, 逆否命题为真。

注 条件“ $a = 0$ 或 $b = 0$ ”的否定为“ $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ ”, 请读者务必重视逻辑联结词的变化。

【例 2】 如果否命题为: 若 $x + y \leq 0$, 则 $x \leq 0$ 或 $y \leq 0$, 写出相应的原命题、逆命题与逆否命题, 并分别指明四种命题的真假。

分析 “ $x \leq 0$ 或 $y \leq 0$ ”的反面是“ $x > 0$ 且 $y > 0$ ”。

解 原命题: 若 $x + y > 0$, 则 $x > 0$ 且 $y > 0$;

逆命题: 若 $x > 0$ 且 $y > 0$, 则 $x + y > 0$;

逆否命题: 若 $x \leq 0$ 或 $y \leq 0$, 则 $x + y \leq 0$

这里, 原命题与逆否命题为假命题, 否命题与逆命题为真命题。

【例 3】 证明“若 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2 \neq 0$, 则 $a + b \neq 1$ ”为真命题。

分析 由原命题与逆否命题同真或同假, 在原命题不易证明时, 可改证它的逆否命题。

证明 改证与原命题等价的逆否命题:

“若 $a + b = 1$, 则 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2 = 0$ ”

由 $a + b = 1$, 得 $a + b - 1 = 0$

故 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2$

$= (a + b)^2 + (a + b) - 2$

$= (a + b - 1)(a + b + 2) = 0$

【例4】若 $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$, 证明: 关于 x 的方程 $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ 与 $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ 中, 至少有一个方程有实数根。

分析 “至少有一个方程有实数根”的反面情况比较简单, 即是“两个方程都没有实数根”。

证明 假设两个方程都没有实数根, 则 $\Delta_1 < 0$ 且 $\Delta_2 < 0$

从而 $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$ ①

又 $\Delta_1 + \Delta_2 = (p_1^2 - 4q_1) + (p_2^2 - 4q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2)$

由已知: $2(q_1 + q_2) = p_1 p_2$

故 $\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0$ 与 ① 矛盾, 所给两方程中至少有一个有实数根。

【例5】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, 求证: $\angle B$ 必为锐角。

分析 “正准则反”, 可考虑用反证法。

“ $\angle B$ 必为锐角”的反面是“ $\angle B$ 为直角或钝角”。

证明 假设 $\angle B$ 为直角或钝角, 则 $\angle A, \angle C$ 必都为锐角, 那么

$$\begin{cases} \angle B > \angle A \\ \angle B > \angle C \end{cases} \text{故} \begin{cases} b > a \\ b > c \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \text{这与已知条件矛盾。}$$

故 $\angle B$ 必为锐角。

强化训练

一、选择题

1. 如果一个命题的逆命题是真命题, 则它的否命题 ()。

- A. 一定是真命题 B. 一定是假命题
C. 不一定是真命题 D. 不一定是假命题

2. 命题“ a, b 都是奇数, 则 $a + b$ 是偶数”的逆否命题是 ()。

- A. a, b 都不是奇数, 则 $a + b$ 是偶数
B. $a + b$ 是偶数, 则 a, b 都是奇数
C. $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 都不是奇数
D. $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是奇数

3. 命题“若 $A \cup B = A$, 则 $A \cap B = B$ ”的否命题是 ()。

- A. 若 $A \cup B \neq A$, 则 $A \cap B \neq B$
B. 若 $A \cap B = B$, 则 $A \cup B = A$
C. $A \cap B \neq A$, 则 $A \cup B \neq B$
D. 若 $A \cup B = B$, 则 $A \cap B = A$

4. 下列命题: ①“全等三角形的面积相等”的逆命题; ②“正三角形的三个角均为 60° ”的否命题; ③“若 $k < 0$, 则方程 $x^2 + (2k + 1)x + k = 0$ 必有两相异实根”的逆否命题, 其中真命题的个数是 ()。

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

5. 下列命题: ①“若 $xy = 1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题; ②“四边相等的四边形是正方形”的否命题; ③“梯形不是平行四边形”的逆否命题; ④“若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$ ”的逆命题, 其中真命题是 ()。

- A. ①② B. ②③ C. ①②③ D. ②③④

6. 用反证法证明命题: “ $a, b \in \mathbf{N}, ab$ 可被 5 整除, 那么 a, b 中至少有一个能被 5 整除”时, 假设的内容是 ()。

- A. a, b 都能被 5 整除 B. a, b 都不能被 5 整除
C. a, b 不都能被 5 整除 D. a 不能被 5 整除

二、填空题

7. 若命题 p 的逆命题是 q , 命题 p 的否命题是 r , 则 q 是 r 的 _____ 命题。

8. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并在题后的括号内填上“真”或“假”:

(1) 若 $|x| + |y| = 0$, 则 x, y 全为零,

逆命题 _____ (), 否命题 _____ (), 逆否命题 _____ ()。

(2) 若 $|x| \leq 1$, 则 $x^2 \leq 1$ 。

逆命题 _____ (), 否命题 _____ (), 逆否命题 _____ ()。

9. 命题“若 $a > b$, 则 $ac > bc$ ”与它的逆命题、否命题、逆否命题中, 有 _____ 个真命题。

10. “已知 a, b, c 是实数且 $a > 0$, 如果不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集非空, 那么 $b^2 - 4ac < 0$ ”这个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题中, 有 _____ 个假命题。

三、解答题

11. 把下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式, 并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题。

- (1) 由 $x + 3 = 8$, 得 $x = 5$;
(2) 正三角形的三个内角相等;
(3) 正偶数不是质数;
(4) 全等三角形相似。

12. 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 且 a, b, c 都是奇数, 求证方程没有整数根。

13. 求证: 两条相交直线有且只有一个交点。

14. 用反证法证明: 若 $\triangle ABC$ 不是正三角形, 则内角 A, B, C 中必有一个大于 60° 。

15. 已知下列三个方程: $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$, $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 至少有一个方程有实根, 求实数 a 的取值范围 (提示: 用反证法的思想求解)。

(三) 充分条件和必要条件

知识点剖析

1. 充要条件:

条件 A 与条件 B 的充分性与必要性关系, 由定义判断方法简述如下:

(1) $A \Rightarrow B$, 且 $B \Rightarrow A$, 则 A 是 B 的充分非必要条件。

(2) $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$, 则 A 是 B 的必要非充分条件。

(3) $A \Leftrightarrow B$, 则 A 是 B 的充分且必要条件。

(4) $A \Rightarrow B$ 且 $B \not\Rightarrow A$, 则 A 是 B 的既非充分也非必要条件。

2. 对于否定形式的命题, 常根据原命题与其逆否命题的等价性(即 $A \Rightarrow B$ 等价于 $\neg B \Rightarrow \neg A$) 进行判断。例如, 命题: “ $x \neq 1$ 则 $x^2 \neq 1$ ”。问: $x \neq 1$ 是 $x^2 \neq 1$ 的什么条件?

此命题等价于: “若 $x^2 = 1$ 则 $x = 1$ ” 即 “ $x^2 = 1$ 是 $x = 1$ 的什么条件?” 易知答案为必要非充分条件。



知识点应用

1. 考纲要求

考试内容: 充分条件, 必要条件, 充要条件。

考试要求: 掌握充要条件的意义, 判断给定的两个命题之间的充要关系。

2. 典型题例析

【例 1】指出下列各组命题中, p 是 q 的什么条件, q 是 p 的什么条件(在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选出一种)?

(1) $p: (x-1)(x-3) = 0; q: x = 3$

(2) $p: x \neq 1$ 且 $y \neq 2; q: x + y \neq 3$

(3) $p: (1 - |x|)(1 + x) > 0;$

$q: x < -1$ 或 $-1 < x < 1$

(4) $p: P \cap Q = P; q: P \subseteq Q$

(5) $p: \angle C = 90^\circ; q: \triangle ABC$ 是直角三角形

(6) $p: \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形}; q: \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形}$

解 (1) $(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$ 不一定成立, $x = 3 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$, 所以 p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件。

(2) $x \neq 1$ 且 $y \neq 2 \Rightarrow x + y \neq 3$, $x + y \neq 3 \Rightarrow x \neq 1$ 且 $y \neq 2$ 不一定成立。所以 p 是 q 的充分而不必要条件, q 是 p 的必要而不充分条件。

(3) $(1 - |x|)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow$

$x < -1$ 或 $-1 < x < 1$

所以 p 是 q 的充要条件, q 是 p 的必要条件。

(4) $P \cap Q = P \Rightarrow P \subseteq Q$ 不一定成立, $P \subseteq Q \Rightarrow P \cap Q = P$, 所以 p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件。

(5) $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ 是直角三角形。

$\triangle ABC$ 是直角三角形 $\Rightarrow \angle C = 90^\circ$ 不一定成立

所以 p 是 q 的充分而不必要条件, q 是 p 的必要而不充分条件。

(6) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 $\Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是矩形不一定成立, 四边形 $ABCD$ 是矩形 $\Rightarrow$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

所以 p 是 q 的必要而不充分条件, q 是 p 的充分而不必要条件。

【例 2】求证: 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个异号实数根的充要条件是 a 与 c 异号。

分析 这里的条件是“ a 与 c 异号”(记为 p), 结论是“ $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个异号实根”(记为 q), 于是欲证充分性, 即证 $p \Rightarrow q$ (或 $\neg p \Rightarrow \neg q$)。

证明 (1) 证充分性:

若 a 与 c 异号, 即 $ac < 0$, 于是 $-4ac > 0, b^2 - 4ac > 0$, 故方程有两个相异实数根。

又根据根与系数关系及 $ac < 0$, 知 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$ 故原方程有两个异号实数根。

(2) 证必要性

若方程的两个实数根异号, 则 $x_1 \cdot x_2 < 0$, 即 $\frac{c}{a} < 0$, 故 a 与 c 异号。

综合(1)(2), 原题得证。



强化训练

(一) 选择题

1. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则不等式 $a > b$ 与 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 都成立的充要条件是()。

- A. $ab > 0$ B. $a > 0$ 且 $b < 0$
C. $ab < 0$ D. $ab \neq 0$

2. 设有非空集合 A, B, C , 若“ $a \in A$ ”的充要条件是“ $a \in B$ 且 $a \in C$ ”, 则“ $a \in B$ ”是“ $a \in A$ ”的()。

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. $p: x_1, x_2$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两实数根; $q: x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, 则()。

- A. p 是 q 的充分而不必要条件
B. p 是 q 的必要而不充分条件
C. p 是 q 的充要条件
D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

4. 设甲、乙、丙三个命题, 如果甲是乙的必要条件, 丙是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件, 那么()。

- A. 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件
B. 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件
C. 丙是甲的充要条件

D. 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

5. “内错角相等”是“两条直线平行的”() 条件。

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

6. a, b, c 三条线段, 则 $a + b > c$ 是 a, b, c 能组成三角形的() 条件。

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

二、填空题

7. $x^2 > 4$ 是 $x^3 < -8$ 的_____条件。

8. 设 A, B 是非空集合, 则 $A \cap B = A$ 是 $A = B$ 的条件。

9. 在平面直角坐标系中, 点 $(x^2 + 5x, 1 - x^2)$ 在第一象限的充要条件是_____。

10. 已知 A, B 是两个命题, 如果 A 是 B 的充分条件, 则 B 是 A 的_____, 非 A 是非 B 的_____条件。

三、解答题

11. 指出下组命题中 p 是 q 的什么条件, q 是 p 的什么条件?

(1) $p: (x-2)(x-3) = 0; q: x-2 = 0$

(2) $p: x = 3; q: x^2 = 9$

(3) p : 线段 AB 是 $\odot O$ 直径; q : 线段 AB 是 $\odot O$ 的弦

(4) $p: \triangle ABC$ 是锐角 $\triangle$; $q: \triangle ABC$ 是等腰三角形

12. $\begin{cases} \alpha + \beta > 4 \\ \alpha\beta > 4 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} \alpha > 2 \\ \beta > 2 \end{cases}$ 的什么条件? 说明理由。

13. 关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个异号实根的充要条件是什么? 为什么?

14. 求证: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a + b + c = 0$ 。

15. 已知方程 $x^2 - mx + 3m - 2 = 0$ 的两根均大于 1, 求 m 的取值范围。

【参考答案与提示】

一、集合

(一) 选择题

1. A 2. D 3. C 4. D 5. C 6. B 7. D

8. D 9. D 10. D 11. A 12. C

(二) 填空题

13. $a = 2$ 或 -1 14. $A \subsetneq B$

15. $\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}$

16. $a < 0$ [提示: 分两种情况: ① $\Delta < 0$ 时和

② $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

17. $\{x | x \geq 6 \text{ 或 } x \leq -1\}$

18. [提示: 直接利用求根公式] 当 $a \geq -1, \{x | x >$

$1 + \sqrt{1+a}$ 或 $x < 1 - \sqrt{1+a}$, 当 $a < -1$, 为 R 。

19. $\{x | x > \sqrt{3} + 1, \text{ 且 } x \neq 8\}$

(三) 解答题

20. 解: $\because a^2 - a + 1 > 0, \therefore a^2 + 1 > a,$

$\therefore A = \{y | y > a^2 + 1 \text{ 或 } y < a\}$

又由 $x = f(y) = \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{5}{2}$
 $= \frac{1}{2}(y-1)^2 + 2$

知: $x_{\min} = 2, x_{\max} = f(3) = 4$

$\therefore B = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则

$\begin{cases} a \leq 2 \\ a^2 + 1 \geq 4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a \leq 2 \\ a \geq \sqrt{3} \text{ 或 } a \leq -\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore a \leq -\sqrt{3} \text{ 或 } \sqrt{3} \leq a \leq 2$

21. 解: $\because \begin{cases} |g(x_1) - g(x_2)| \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= |(x_1^2 + 2x_1 - 1) - (x_2^2 + 2x_2 - 1)| \\ &= |(x_1^2 - x_2^2) + 2(x_1 - x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 + 2| \\ &\leq |x_1 - x_2| \cdot (1 + 1 + 2) \\ &= 4|x_1 - x_2| \quad \therefore g(x) \in M \end{aligned}$$

22. 解: (1) $m = -3$ 时, 原不等式为 $-6x - 5 > 0$,

$\therefore$ 原不等式解集 $\{x | x < -\frac{5}{6}\}$

(2) 当 $m \neq -3$ 时, 原不等式为一元二次不等式
 $\Delta = 4m^2 - 4(m+3)(m-2) = 4(6-m)$

① 当 $m = 6$ 时, 原不等式为 $(3x+2)^2 > 0$, 故

$$\{x | x \neq -\frac{2}{3}, x \in \mathbf{R}\}$$

② 当 $m > 6$ 时, $\Delta < 0$ 且 $m+3 > 0$, $\therefore$ 原不等式解集为 R

③ 当 $-3 < m < 6$ 时, $\Delta > 0$ 且 $m+3 > 0$

$\therefore$ 原不等式解集为

$$\left\{x | x > \frac{-m + \sqrt{6-m}}{m+3} \text{ 或 } x < \frac{-m - \sqrt{6-m}}{m+3}\right\}$$

④ 当 $m < -3, \Delta > 0$, 且 $m+3 < 0$ 开口向下, 原不等式解集为

$$\{x | \frac{-m + \sqrt{6-m}}{m+3} < x < \frac{-m - \sqrt{6-m}}{m+3}\}$$

23. 解: $\begin{cases} m > 0 \\ 4(m+1)^2 - 4m(9m+4) < 0 \end{cases}$

二、简易逻辑

(一) 逻辑联结词

(一) 选择题

1. B 2. C 3. B 4. D 5. C 6. C 7. B

(二) 填空题

8. (1) p 且 q (2) p 或 q (3) 非 p

9. 菱形的对角线垂直或平分

菱形的对角线垂直且平分

菱形的对角线不互相垂直

10. (2)(3)(4) 11. (4)

(三) 解答题

12. 解:

p	非 p
真	假
假	真

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假