高中数学学法指津

叶运佳　著

清华大学出版社

(京)新登字158号

内 容 简 介

本书收录的近60篇文章,是作者在长期执教高中数学中,对某些重要的概念、典型的试题、优秀的解法,经过深思熟虑后撰写的学法指导,均在省级以上数学刊物发表。这次成书,作者对部分文章进行了修改、加工。

作者系中学数学特级教师,享受国务院政府特殊津贴的专家,教学经验极其丰富。撰写上述文章时,能考虑中学生心理特点及知识领域,故文章深入浅出,匠心独具,篇幅短小,独立成篇,旨使读者领悟数学思想,掌握数学思维方法,具有很强的针对性、实用性、可读性,是一本难得的学法指导专著。

书　名: 高中数学学法指津
作　者: 叶运佳
出版者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编100084)
　　　　http:// www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者: 　　　　印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开　本: 850×1168 1/32　印张:10.875　字数:273千字
版　次: 2001年11月第1版　2001年11月第1次印刷
书　号: ISBN 7-302-04850-9/G·222
印　数: 00001～00000
定　价: 0.00元

前　　言

如何学习数学？学好数学有何诀窍？这是家长非常重视、学生深为焦虑的问题。问同学，说不清、道不明；问老师，几句抽象概括，难以领会真谛。书市里，书籍满目琳琅，可除了习题集，便是复习丛书。究竟数学该如何学？学法无处问津。

笔者从事高中数学教学近 40 年，深切理解同学们学好数学的愿望及苦衷。教学之余，针对数学中的疑点、难点、重点、精点，著文近 200 篇，均在《数学通报》、《中学生数理化》、《数理天地》等 10 多家全国有影响的刊物上发表。现从中精选出有关学法指导的文章近 60 篇，分成"切实抓好'双基'"、"掌握一般方法"、"开拓解题思路"、"学会引申归纳"4 个版块，汇编成本书《高中数学学法指津》。每篇篇末注明该文在何时、何刊发表，以示对原刊的尊重。

本书有如下四个特点：

一、篇幅短，内容精。文章不长，阐述独到；独立成篇，便于阅读；深入浅出，详尽释疑。对历年高考中许多经典试题都提供精彩解法。

二、讲解法，拓思路。不但讲清如何解答数学题目，而且注重剖析思考问题的方法。设疑、识疑，扫除隐患。引导读者从不同角度理解问题，解答问题。

三、循常规，授技巧。数学学习，既重求同思维，亦重求异思维。本书用适当篇幅，通过例题，介绍数学一般思维方法。注重数形结合，倡导一题多解，传授解题技巧。使读者悟出什么是数学思想，掌握打开数学宝库的钥匙。

四、抓复习，重归纳。本书不是复习提纲，故不提供系统复习

资料，而是通过几个实例，告诉读者如何抓住重点，理清头绪，归纳整理，以简驭繁。

本书各篇文章，是笔者在长年教学实践中探索的结晶，既能给学生以学法指导，也可为教师钻研教材、改进教法提供参考。

作者囿于教坛，见识有限，恐有差误，敬望读者批评指正。

叶运佳于求真学校养心斋

2001 年 3 月

目　　录

切实抓好“双基”

开 篇 寄 语

数学中的“双基”——基础知识和基本技能，犹如组建数学大厦的基石.要学好数学，得切实抓好“双基”.

基础知识包括数学概念、定义、定理、公式、性质、法则以及数学语言、数学方法等等.基本技能包括图形(图像)的绘制、工具(含图表)的使用以及能够按照一定的程序与步骤进行运算和推理.

“双基”内涵如此丰富又极为重要，那么抓好“双基”该如何着手呢？首先，就要认真阅读数学书籍，读数学书一定要沉下去，从中明了数学语言，弄清数学概念，领会数学思想，掌握数学方法.其次，就是要多问，不论是看书还是听课，都要敢于问个“为什么?”不能人云亦云、盲目轻信.第三，就是要独立思考.不但要独立完成作业，而且要善于发现问题(疑点)，深入思索，手脑并用.必要时亲自做一番演算，亲笔绘制图形，直到问题彻底解决为止.以上三点，也就是学好数学务必养成的良好习惯.

收集在这个部分的10多篇文章，就是从不同方面告诉读者如何抓好“双基”.比如，只有《重视乘法公式的学习》、《进行合理运算》，方能《提高运算速度》；只要深入钻研课本，才能知道《近地点在哪里》；从《数学王国怪事多》中，从《值域求错的分析》中，便可以《从研究错题中获得知识》，而要提高技能，就《要学会正确绘图》.

读者在阅读下面这些文章的时候，也一定要做到手脑并用，识疑释疑，既要想一想有没有道理，也要做一做看有无差错，这样做到了，学数学的良好习惯也就养成了，“双基”也就渐渐扎实了.

养成良好的学数学的习惯

不少学生学不好数学，常被老师诊断为“概念不清”、“掌握不牢”．其实，这种诊断并不能帮助学生解决问题．要使学生学好数学，关键在于使他们养成良好的学数学的习惯．

一、仔细看书，弄懂数学语言

不爱读数学教科书，恐怕是中学生的“通病”．基础不牢、运用不活皆源于此．数学书由数学语言写就，它包括文字语言、符号语言、图形语言．行文简洁、逻辑性强、内涵丰富、含义深刻，看数学书切不可浮光掠影，一目十行．

许多概念、定义、定理等都用文字语言表述，如“有且仅有”、“当且仅当”，十分精辟．前者强调存在性及惟一性，后者表明充分性与必要性，看书时务必留心．因此，预习数学时要做到“五要”：①要用波浪线画出重点；②要画一个矩形把用公式表示的结论框住；③要在看不懂、有疑问的地方用铅笔画个疑问号；④要将简单习题的答案写在后面；⑤如果定义、定理中的条件不止一个，就要把条件编上号码．例如：直线的倾斜角的定义，就要在“直线向上的方向”、“X 轴的正方向”、“最小正角”以及“$0\leq\alpha<\pi$”这几处，编上(1)、(2)、(3)、(4)，以加深印象．如果看书时都能这样做到，自然就能沉得下去了．

符号语言各有丰富的内涵，要写得出，辨得清、记得牢．例如解析式 $2\log_a x$ 并不会同于 $\log_a x^2$，而 $\sin\arcsin x$ 与 $\arcsin\sin x$ 是截然不同的两个概念．$f(x)$、$f(a)$、$f(3)$ 貌同质异；方程 $x^2+y^2=4$，

$|z|=2$（z为复数），$\rho=2$（ρ为极径），$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$却貌异质同.特别是带有附加条件的一些结论、一些公式，如 $\sin\arcsin x=x$ $(|x|\leq 1)$、$a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$、$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq 1)$等等，决不可忽略后面的"尾巴".读符号语言，要说得出它的涵义，辨得明它的特征.不懂就要问清，切莫囫囵吞枣.

图形语言既能反映几何元素的相对位置，又是数量关系的直观反映.故观看几何图形要读懂隐藏在元素之间的内在联系及数量关系(有时通过作辅助线)；而观看图像，要从其展佈状况、窥视出函数的性态.课前、课后读数学书如能达到上述基本要求，学数学也就入门了；若由此养成看书习惯，则提高自学能力指日可待.

二、认真听课，掌握思维方法

走进课堂慌乱找课本、听课时心不在焉、左盼右顾、做小动作……这些都是极不好的听课习惯.

听课要全神贯注，随着老师的讲解而积极思维.预习时似懂非懂的概念弄明了么？疑团化解了么？特别是老师口授的真知灼见、补充的例题、精彩的解法，要抓紧记录下来.写好听课笔记，不但留下一份宝贵的资料，而且也能促使自己注意力集中.

听课时还要做到不断生疑、质疑，敢于提问、答问.要想想老师的讲解是否完整无误，解法是否严谨无瑕.板书的范例如果懂了，就思谋新的解法；如果还有疑点就应大胆质疑.争着回答问题绝不是"图表现"，而是阐述自己的见解，提高自己的口头表达能力.即便自己错了，将问题暴露后，也便于订正.听课最忌盲从，随波逐流，人云亦云，不懂装懂.

比如老师讲例题："已知 $\arg z=\theta$，求 $\arg z^2=$?"，同学们很容易从棣美弗定理作出反馈，脱口答成 2θ.但这答案正确吗？显然，这

是忽视了辐角主值概念造成的失误.要求得正确解答,必须考虑 $2\theta\in[0,2\pi]$.所以仅当 $\theta\in[0,\pi]$ 时,才有 $\arg z^2=2\theta$,而当 $\theta\in[\pi,2\pi]$ 时,却是 $\arg z^2=2\theta-2\pi$.至此,虽然解答完毕,但我们的思维却不能止步.应当想到,在条件 $\arg z=\theta$ 下,又如何求出 $\arg z^3$、$\arg z^4$……呢?能不能从上面解法找出一般规律呢?又比如老师提出范例:“已知正数 a、b 之和为 1,求 $S=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left(\frac{1}{b^2}-1\right)$ 的最小值”,通常会出现几种结果,而且答案是 8 的往往占多数,推导是这样的:原式 $=\left(\frac{(a+b)^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{(a+b)^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\geq$

$2\sqrt{\frac{2b^3}{a^3}}\cdot 2\sqrt{\frac{2a^3}{b^3}}=8$. 故 $S_{\min}=8$.

这看上去“步步合理”,然而却是错误的!所以听课时就得屏住呼吸,仔细推敲,发现隐蔽错误,找出正确答案.只有这样,才能逐步掌握数学思想,获取准确知识.(正确答案是 9).

三、独立钻研,学会归纳总结

要学好数学,除了养成细心看书的习惯、认真听课的习惯外,养成独立钻研的习惯更为重要.

1.按时完成作业,巩固所学知识

对于中学生来说,按时完成作业是一个很好的学习习惯.惟有按时完成,才得以巩固知识,尽量减少遗忘.而在完成作业过程中,将增大知识复现率,促进自己的思考力,发挥解决问题的创造力.当然,这只有在独立思考前提下得以实现.

善于学习的同学还注重作业本的保洁与收藏,因为这既是珍视自己的劳动成果,也是很好的复习资料.

2.适时复习功课,形成知识网络

章节复习、单元复习、迎考复习……是数学学习不可或缺的一

环,它有着承前启后的作用.复习不只是从头到尾看一遍书,做做题目,而是要按照一定的系统归纳知识,总结方法.化书本为提纲,以题目串知识.例如立体几何第一章,按直线与直线、直线与平面、平面与平面编写,逐步深化,条理分明.但是在复习时,却可以这样归类、整理:

① 判断两条直线互相垂直(平行)的定理有哪些?② 判断直线与平面互相垂直(平行)的定理有哪些?③ 判断平面与平面互相垂直(平行)的定理有哪些?④ 三类重要的角的定义及计算方法等等.这样既复习遍了原有定义、定理,又为解题、证题提供了系统依据.

不但概念要条理化、系统化,而且方法要归类,题目要"串通".方能纲举目张,印象深刻.比如,求函数的值域散见于各处,复习时,可归纳为若干条.又如,在知识扩充之后,对某些典型题目,既可用代数方法解,还可用三角方法解.这样,就沟通了知识间的内在联系.

3.运用所学知识,不断开拓创新

数学有着很强的联贯性,新旧知识之间并没有不可逾越的鸿沟.因此借助书本知识,进行类比,深入联想,不但可以增强钻研兴趣,而且培养了自己创造性思维能力.例如:对不等式$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\geq\frac{3^2}{a_1+a_2+a_3}$ ($a_i>0$, $i\in N$,下同),既可以"纵向"类比,得到$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\geq\frac{4^2}{a_1+a_2+a_3+a_4}$…一般地,$\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\geq\frac{n^2}{S}$ (这里 $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$,下同) 稍作变形后,又可"横向"类比为$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1}\geq\frac{3^2}{2(a_1+a_2+a_3)}$,…一般地$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S-a_i}\geq\frac{n^2}{(n-1)S}$.还

可以类比得到$\frac{a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_1}\geq\frac{3}{2}$,… 一般地,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geq\frac{n}{n-1}.$$

又如根据教本上的“$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$化积”想到“$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\sin4\alpha$”的化积,观察它们的结果,继后联想到$\sin\alpha+\sin2\alpha+\cdots+\sin n\alpha$的化积.然后将所得结果,用数学归纳法予以证明.

以上这种做法,不但巩固了原有知识,而且扩拓了自己的知识领域,沟通了数学知识之间的内在联系.有了这种钻研习惯,又何愁学不好数学.

(载《湖南数学通讯》1985年第6期,这次作了较大修改.)

进行合理运算　切忌轻易动笔

常听不少同学走出试场后感叹:唉!题目都晓得做,就是时间不够,做不赢.

果真是时间少了吗?其实并不见得,多数原因是由于运算不合理,造成算式冗长、计算繁琐,无端耗费时间.因此,要想提高运算速度,在平时练习中就得养成仔细审题的习惯,讲究合理运算,切忌轻易动笔.

一、注意数字特征

例 1　直角三角形两直角边分别为 72cm,54cm,求其外接圆半径.

分析　求外接圆半径得先求斜边长,如果直接算 72、54 的平方和再开平方: 72^2+54^2,十分麻烦,而下面方法就简捷得多.

解　所求斜边 $c=\ 72^2+54^2=\ 9^2(8^2+6^2)=\ 9^2\cdot10^2=$ $90(\mathrm{cm})$,故外接圆半径 $R=\frac{c}{2}=\frac{90}{2}=45(\mathrm{cm})$

例 2　计算: 1) $\quad \frac{84}{9}^{\ 2}+\frac{35}{9}^{\ 2}$;

$$(2)\ (\ 6-\ 2)^4(\ 3+1)^3.$$

有些同学对(1)题,惯于先算平方,相加后再开平方.对(2)也是呆算.他们认为$(\ 6-\ 2)^4=[(\ 6-\ 2)^2]^2$,是可以算出来的,$(\ 3+1)^3$ 更可以利用公式算出来,于是(2)题便可以算出来了.这些同学只想到可以算出来,但没有估计到运算量有多么大.事实上

上述运算都走了弯路！只要对照一下下面的正确算法，便可找到上述算法在哪些地方走了弯路．

解　(1) 原式 $=\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^2(12^2+5^2)}=\frac{7}{9}\times 13=\frac{91}{9}$．

(2) 原式 $=(\sqrt{2})^4(\sqrt{3}-1)^4(\sqrt{3}+1)^3$

$=4(\sqrt{3}-1)[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)]^3$

$=4(\sqrt{3}-1)\cdot 2^3=32(\sqrt{3}-1)$．

例 1、例 2 说明分解质因数、提取公因式，对简化运算何等重要．

例 3　已知 $\lg 2.512=0.4000$，　求 $\sqrt[6]{0.0002512}$．

分析　注意到本题中，已知和结论里面数字的排列顺序完全相等，故应该用对数计算．

解　$\because$　$\lg\sqrt[6]{0.0002512}=\frac{1}{6}(\lg 10^{-4}+\lg 2.512)$

$=\frac{1}{6}(-4+0.4)$

$=\frac{1}{6}(-3.6)=-0.6=\bar{1}.4$

$\therefore$　$\sqrt[6]{0.0002512}=0.2512$

二、灵活选用公式

例 4　若 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$，求 x^3+3x+2 的值．

解　根据乘法公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，可知 $x^3=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$

$=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$

$= 4 + 3\ ^{3}\ - 1 \cdot x = 4 - 3x$

即 $x^3 + 3x = 4$, ∴ $x^3 + 3x + 2 = 6$

例 5 设 α、β 是方程 $x^2 - 8x + 2 = 0$ 的二根,求

$$\log_{2\ 7}(\ \alpha^2\beta + 1 + \ \alpha\beta^2 + 1)^3$$ 之值 .

解 根据韦达定理,$\alpha + \beta = 8$, $\alpha\beta = 2$

∴ $\log_{2\ 7}(\ \alpha^2\beta + 1 + \ \alpha\beta^2 + 1)^3$

$= \frac{3}{2}\log_{2\ 7}(\ 2\alpha + 1 + \ 2\beta + 1)^2$

$= \frac{3}{2}\log_{28}[2(\alpha + \beta) + 2 + 2\ (2\alpha + 1)(2\beta + 1)]$

$= \frac{3}{2}\log_{28}(2 \cdot 8 + 2 + 2\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 1) = 3\log_{28}\ 28$

$= 3$

如果先计算$(\ \alpha^2\beta + 1 + \ \alpha\beta^2 + 1)^3$,则不胜其繁

例 6 已知三角形三边为 15,36,39,求这三角形的最大角 .

解 本题中,三边之比为 15∶36∶39 = 5∶12∶13,而 $5^2 + 12^2 = 13^2$,故知这个三角形是直角三角形,所以最大角为 90°.

若用余弦定理,则麻烦得多 .

三、正确运用概念

例 7 已知 $a^2 + 3a - 1 = 0$, $b^2 + 3b - 1 = 0$,求 $a^2 + b^2 - 3(a + b)$ 之值 .

解 根据方程的根的概念可知:a, b 是方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 之二根,

∴ $a + b = -3$, $ab = -1$

∴ $a^2 + b^2 - 3(a + b) = (a + b)^2 - 2ab - 3(a + b)$

$= (a + b)[(a + b) - 3] - 2ab$

$= (-3)[-3 - 3] - 2(-1)$