(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本丛书是根据 2000 年教育部颁布的新大纲和 2001 年版人民教育出版社教材编写的同步辅导用书,共三册,全部按新教材的章节进行编写,每节有“内容分析”、“疑难解析”、“练习题”及“课外阅读”四部分.

这套丛书是铁路重点中学部分特级、高级教师教学经验的总结,它突出教法建议、学法指导,强调“疑”点及“难”点的处理,着重培养综合分析能力,内容源于课本又高于课本,是初次执教的青年教师及广大高中学生理解、驾驭新教材,迎接高考的好助手.

本书是第一册,适合高一年级教师和学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学同步辅导.第 1 册/赵翼西,陈磐生主编.
北京:中国铁道出版社,2002.9
ISBN 7-113-04773-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①赵… ②.陈… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062918 号

书　　名:高中数学同步辅导·第一册
作　　者:赵翼西　陈磐生
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
编辑部电话:市电(010)63583214　　路电(021)73133
责任编辑:王应玲
封面设计:马　利
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　印张:11.5　字数:287 千
版　　本:2002 年 8 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 7-113-04773-4/G·182
定　　价:15.00 元

目　录

第一章　集合与简易逻辑

第一节　集　　合

一、内容分析

1. 数学思想方法

数形结合的数学思想方法，是本章学习中最重要的数学思想方法. 如研究元素与集合，集合与集合间的关系，集合与集合间的运算(交、并、补集等)、绝对值不等式的解法，一元一次不等式、一元一次不等式组以及一元二次不等式的解法等，都要用到数形结合的数学思想. 在解含参数的不等式时，还用到分类讨论的数学思想与等价转换的数学思想.

2. 教法建议

本节的知识目标是:理解元素、集合、空集、子集、交集、并集、补集等概念，并能正确地运用数学符号语言来表示;会解绝对值不等式、一元一次不等式及一元一次不等式组、一元二次不等式及分式不等式.

本节的重点是:理解集合的有关概念并能正确地用数学符号语言表示;解绝对值不等式、一元一次不等式、一元二次不等式等.

本节的难点是:空集的概念、集合的运算("交"、"并"、"补")和含参数的不等式的解法等.

解决难点的关键是把各个概念讲清楚，多采用图示，把抽象的问题先具体形象化，便于学生接受，待学生接受后再逐步抽象化. 这一部分概念多数学符号也多，不仅要正面讲清每个概念每个符号的意义，还要注意纠正学生中对概念的错误理解与数学符号的错误书写.

在不等式的解法中，首先要强调解题步骤，第一步做什么，下一步做什么，利用图形来解释解法的依据，加深学生对问题的理解，注意数形结合方法的运用. 由于学生刚由初中进入高中，思维层次不高，教师在讲授时要深入浅出，贴近学生实际，注意学生反馈，及时调整教学方案.

3. 学法指导

初中学生一进入高中，首先遇到的问题就是高中数学的内容比初中更抽象，更难理解. 因此一定要把学过的各个数学概念反复推敲、反复琢磨，力求透彻理解. 有时，从课本上从字面上好象是懂了，但一做题做错了，才发现自己原来并没有真正懂，回过头去，再加深对课文的理解，有的东西需要这样反复多次才能真正理解. 所以在学习中要特别反对不求甚解满足于一知半解的学习态度.

其次，要先预习再听讲. 先预习，不仅知道第二天老师要讲的内容，了解哪是重点内容，哪是难点，特别是自己预习时没有看懂的地方，第二天一定要特别注意听老师是怎么讲的、怎么处理的，听课就有针对性了. 另外，预习还有助于自学阅读理解能力的提高，为今后进一步的学习深造打下良好的基础.

再次，要先复习再做作业. 有的学生下课把老师布置的作业做完上交就完事了，其实这并不好. 正确做法是先把老师课堂上讲过的以及书上的内容先复习一下，在头脑中过一下"电影"，真正把当天老师讲的全弄明白了，再去做作业.

在本单元的学习中，一是要理解各个概念如元素、集合、子集、交集、并集、补集等，二是要注意书写的格式要规范，对使用的每个数学符号所代表的意义要理解．如实数集 R 不能写成 {R} 等等．三是要注意数形结合思想的应用，许多不容易理解的东西，画个图说不定一下子就明白了．

二、疑难解析

1．为什么元素、集合没有定义

集合与元素是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念去定义它，所以也把它叫做不加定义的概念或原始概念．点、直线、平面等概念也都是不加定义的概念，对于这些不加定义的概念，我们只能作描述性的说明．

2．怎样理解元素与集合的关系

元素与集合之间只有两种关系，即属于（$\in$）和不属于（$\notin$ 或 $\overline{\in}$）的关系．如果 a 是集合 M 中的元素，就说 a 属于 M，记为 $a\in M$ 如果 a 不是集合 M 的元素，就说 a 不属于 M，记为 $a\notin M$（或 $a\overline{\in}M$）．

注意不要犯 $a=\{a\}$ 这样的错误，应为 $a\in\{a\}$．

3．怎样理解集合的“三性”

在用大括号 { } 表示集合及其中的元素时，应具有以下的性质：

（1）确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一个具体对象，有一个明确的判断标准是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，两种情况必有其一且只有其一．

（2）互异性：一个给定集合中的元素，指的是属于这个集合的互不相同的个体（或对象）．因此，同一集合中不应重复出现同一元素，即出现在同一集合中的元素是互异的．以后提到集合中的两个元素时，一定是指两个不同元素．

（3）无序性：出现在集合中的元素是无顺序要求的，如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{2,3,1\}$ 是同一个集合．

4．列举法与描述法有什么不同

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法叫列举法．有时，提供了明显的规律，并以省略的形式写出来，也是列举法，如 $\{1,2,3,\cdots,100\}$，其中的省略号表示的是 $4,5,6,\cdots,98,99$．

描述法是把集合中的元素的公共属性写在大括号内，用来表示集合的方法．它的一般形式是 $\{x\mid x$ 应具有的条件$\}$，其中 x 叫代表元素，这个集合包含了具有上述条件的所有元素．

具体书写时又有两种形式，一是文字语言叙述形式，如{偶数}、{大于 4 且小于 10 的奇数}等；二是数学符号语言叙述形式，如 $\{x\mid x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$、$\{x\mid x=2k+1,k\in \mathbf{Z}$ 且 $2\leqslant k\leqslant 4\}$ 等．

列举法的特点是元素表示的直观性强，使人一目了然，常用于有限集、元素个数不太多的集合．描述法的特点是能够表示集合中所有元素的本质属性．当集合为无限集、或集合中元素个数过多时，常用描述法．

5．集合 $\{x^2+2x-3=0\}$ 与 $\{x\mid x^2+2x-3=0\}$ 有什么不同？集合 $\{x\mid y=x^2-2x-1\}$ 与集合 $\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1\}$ 和 $\{y\mid y=x^2-2x-1\}$ 有什么不同？

集合 $\{x^2+2x-3=0\}$ 是把方程 $x^2+2x-3=0$ 看作一个元素组成的集合，而 $\{x\mid x^2+2x-3=0\}$ 是由方程 $x^2+2x-3=0$ 的所有的解组成的集合，实际上它就是 $\{-3,1\}$，二者是不同的．

集合 $\{(x,y)\mid y=x^2-2x-1\}$ 是平面直角坐标系中抛物线 $y=x^2-2x-1$ 的图象上所有点的集合，它的代表元素 (x,y) 是平面直角坐标系中的点．集合 $\{x\mid y=x^2-2x-1\}$ 是抛物线

$y=x^2-2x-1$ 上所有点的横坐标 x 组成的集合，实际上它就是实数集 R. 而集合 $\{y\mid y=x^2-2x-1\}$ 是抛物线 $y=x^2-2x-1$ 上所有点的纵坐标 y 组成的集合，实际上它就是 $\{y\mid y\geqslant -2\}$，所以三个集合是不同的.

以上两例说明，对集合的描述法表示，要注意代表元素代表的意义是什么.

6. 怎样理解空集

空集是不含任何元素的集合. 注意把空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 区别开来. $\{0\}$ 是含有一个元素的集合，$\varnothing\in\{0\}$. $0\in\varnothing$, $\{0\}=\varnothing$, $\varnothing=0$ 都是错误的.

空集的作用有两个：一是反映两集合间的关系. 如 $A\cap B=\varnothing$, $\{(x,y)\mid x+y=10\}\cap\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}=\varnothing$；另一是反映一些问题的实际意义，如不等式 $x^2<0$ 的解集 $\{x\mid x^2<0, x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$，方程组 $\begin{cases}x+y=1\\x+y=3\end{cases}$ 的解集是空集等，用以表示无解的情况.

7. 单个元素与单元素集是什么关系

单元素集指的是只有一个元素组成的集合，如 $\{a\}$、$\{0\}$ 等. 单个元素仍是元素，而元素与集合的关系只有"属于($\in$)"与"不属于"($\notin$ 或 $\overline{\in}$)这两种关系，没有其他关系. 所以有 $a\in\{a\}$，$0\notin\{a\}$ 等.

8. 怎样理解集合与集合的关系

集合与集合之间的关系主要指的是"包含"与"被包含"的关系. 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，就说集合 A 包含于集合 B，或集合 A 被集合 B 包含，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 也称集合 A 是集合 B 的子集. 用韦恩图示是图 1-1.

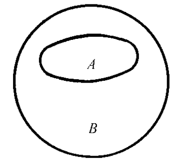


图 1-1

集合的包含关系具有传递性：如果 A 包含于 B，B 包含于 C，则 A 包含于 C，即如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

如果 A 是 B 的子集，同时 B 也是 A 的子集，那么集合 A 等于集合 B，此时集合 A 与集合 B 的元素完全相同.

以下几点是要注意的：

任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$ 是恒成立的. 作为特例，$\varnothing\subseteq\varnothing$ 也是成立的.

空集是任何非空集合的真子集. 即若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneqq A$.

当要讨论任意两个集合 A 与 B 时，一般要分以下五种情况如图 1-2. (a) $A=B$，(b) $A\subseteq B$，(c) $B\subseteq A$，(d) $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\nsubseteq B$，$B\nsubseteq A$，(e) $A\cap B=\varnothing$.

9. 一个含 n 个元素的集合有多少个不同的子集

举例说，如含一个元素的集合 $\{a\}$，它有 2 个子集：$\varnothing$ 与 $\{a\}$.

含两个元素的集合 $\{a,b\}$，它有 4 个子集：$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$. 可写成 $2^2=4$.

含三个元素的集合 $\{a,b,c\}$，它有 $2^3=8$ 个子集：$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$.

一般地，含有 n 个元素的集合的子集有 2^n 个，其中真子集有 2^n-1 个，而它的非空真子集有 2^n-2 个.

10. 交集、并集、补集有哪些性质

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，

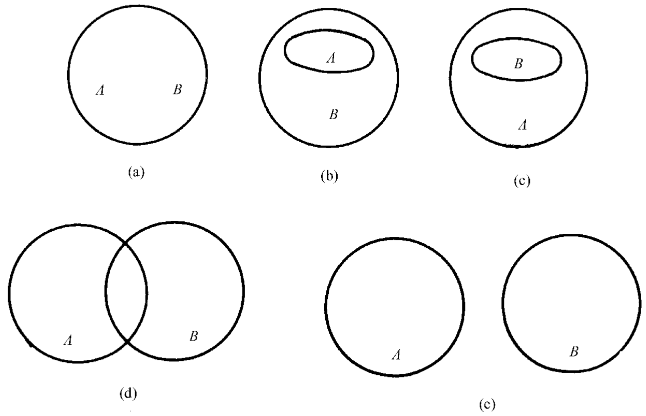


图 1-2

即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$,或 $x\in B\}$.

设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$),由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记做 $\complement_S A$,即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$,且 $x\notin A\}$.

由以上定义知有 $\complement_S A\cap A=\varnothing$,$\complement_S A\cup A=S$,以及 $\complement_S(\complement_S A)=A$.

对任何集合 A、B 有:

$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$;

$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$;

$(A\cap B)\subseteq A$,$(A\cap B)\subseteq B$;$A\subseteq(A\cup B)$,$B\subseteq(A\cup B)$.

即 A 与 B 的交集既是 A 的子集也是 B 的子集,而集合 A 与 B 都是 A 与 B 并集的子集.

对于补集,有如下德·摩根律:

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

11. 怎样从数轴上看绝对值不等式的解集

式子的绝对值有几何意义,如 $|x-a|$ 表示数轴上的点 x 到点 a 的距离.

如一元一次绝对值方程 $|x-5|=2$,解得 $x-5=\pm2$ 即 $x_1=7$ 或 $x_2=3$,在数轴上我们发现所得的解 $x_1=7$ 或 $x_2=3$,都是“到点 5 距离等于 2 的点”.

如一元一次绝对值不等式 $|x-5|>2$,解得 $x>7$ 或 $x<3$,就是“到点 5 的距离大于 2 的点”,而不等式 $|x-5|<2$ 得解 $3<x<7$,就是“到点 5 的距离小于 2 的点”.

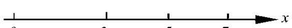


图 1-3

那么式子 $2|x-a|$ 与式子 $\frac{1}{3}|x+b|$ 分别表示“点 x 到点 a 的距离的 2 倍”和“点 x 到点 $(-b)$ 的距离的 $\frac{1}{3}$.

看例题:解方程 $|x+2|+|x-1|=3$.

解：点 $x=-2$ 与 $x=1$ 把数轴分为三段：$x\geqslant1$，$-2\leqslant x<1$ 与 $x<-2$，故解法如下：

当 $x\geqslant1$ 时，　　原方程化为 $x+2+x-1=3$，　　得 $x=1$；

当 $-2\leqslant x<1$ 时，　　原方程化为 $x+2-(x-1)=3$，　　即 $3=3$，$\therefore$ 解为 $-2\leqslant x<1$；

当 $x<-2$ 时，　　原方程化为 $-x-2-x+1=3$，得 $x=-2$，$\therefore$ 无解.

综上所述，原方程的解为 $-2\leqslant x\leqslant1$.

但要从数轴上看，就不难理解上面的解了. 如图 1-4：

设数轴上 A 点坐标为 -2，B 点坐标为 1，则 AB 两点间的距离就是 3. 原方程 $|x+2|+|x-1|=3$ 就是在数轴上求到点 $A(-2)$ 与到点 $B(1)$ 距离之和恰等于 3 的点 x. 由上面的图可以发现，线段 AB 上的任何一点 x（包括端点 A 和 B），到 AB 两点距离之和都等于 3，因此 $-2\leqslant x\leqslant1$ 就是原方程的解. 而在数轴上线段 AB 之外的其他任何一点 x 到 A、B 两点距离之和都大于 3，所以也就不是方程的解.

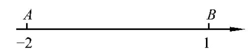


图 1-4

把这个问题再引伸一下就得到如下问题：

(1) 如里方程 $|x+2|+|x-1|=a$ 的解集不是空集，则 a 的取值范围是______.（$a\geqslant3$）

(2) 已知方程 $|x+2|+|x-1|=a$ 的解集是空集，则 a 的取值范围是______.（$a<3$）

把题中的‘方程’改为‘不等式’有：

(3) 如果不等式 $|x+2|+|x-1|\leqslant a$ 的解集不是空集，则 a 的取值范围是______.（$a\geqslant3$）

(4) 如果不等式 $|x+2|+|x-1|\leqslant a$ 的解集是空集，则 a 的取值范围是______.（$a<3$）

12. 怎样用平方法解绝对值不等式

看一个例子：解绝对值不等式 $|3x-1|<|x+2|$.

有一种方法是分区间讨论法，即由点 -2 和 $\frac{1}{3}$ 把数轴分为三段，逐段分别脱去绝对值符号求解.（1）当 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 时，原不等式化为 $3x-1<x+2$，得 $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{3}{2}$；（2）当 $-2\leqslant x<\frac{1}{3}$ 时，原不等式化为 $-3x+1<x+2$，得 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$；（3）当 $x<-2$ 时，原不等式化为 $-3x+1<-x-2$，得 $x\in\varnothing$. 最后得解 $-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{2}$.

另一种方法是平方法，即将原不等式两边同时平方，移项化差，并利用平方差公式分解因式的方法. 但要注意应用此法的条件是不等式两边非负，否则不可应用. 具体解法如下：

平方得 $(3x-1)^2<(x+2)^2$，移项得 $(3x-1)^2-(x+2)^2<0$，分解因式得 $[(3x-1)+(x+2)]\cdot[(3x-1)-(x+2)]<0$，即 $(4x+1)(2x-3)<0$，故得解 $-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{2}$.

对形如 $|x^2-3x-4|>|2x^2-5x+3|$ 这样绝对值符号内是二次三项式的绝对值不等式，用平方法解比分区间讨论法（此题要分 5 个区间）要简捷得多.

像这样利用平方的方法来解的不等式，不一定非绝对值不等式，只要两边非负即可，如：解不等式 $|3x+5|>x^2-x+1$.

13. 什么是‘一元二次方程根的分布’问题，怎样解一元二次方程根的分布问题

先看一道例题：

当 m 为何值时，方程 $x^2-mx+2m-1=0$ 的两个不相等的实根都大于 1？

这道题问的是含参数 m 的关于 x 的一个一元二次方程的两个不等的实根 x_1 和 x_2，当 m

在什么范围内时，x_1 和 x_2 都大于 1. 这里不必求出两根 x_1 和 x_2 的具体的值，只要求在一个范围内就可以了. 象这样的问题，就是一元二次方程根的分布问题，本题解法如下：

设 $f(x)=x^2-mx+2m-1$，则方程 $x^2-mx+2m-1=0(*)$ 的两个根，就是向上开口的抛物线与 x 轴的交点的横坐标. 因此，要求方程$(*)$的两不等实根都大于 1，就是要求 $f(x)$ 与 x 轴的两个不同的交点都在$(1,0)$点的右边如图 1-5，问题等价于

$$\begin{cases}\dfrac{m}{2}>1\\ \Delta=m^2-4(2m-1)>0\\ f(1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>2\\ m^2-8m+4>0\\ 1-m+2m-1>0\end{cases}\Rightarrow m>4+2\sqrt{3}.$$

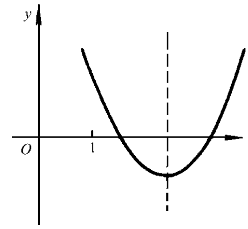


图 1-5

从上面的解法可以看出，解一元二次方程根的分布问题，就是转化为二次函数的图象与 x 轴交点的范围的问题去解决. 下面给出根的分布解法的六种情况.（见图 1-6）

设 $a>0$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个不等的实根为 x_1，x_2，实数 $t_1<t_2$. 方程的二根　(1)均小于 t，(2)均大于 t，(3)一根大于 t 而另一根小于 t，(4)两根均在(t_1,t_2)内，(5)两根中有且只有一根在(t_1,t_2)内，(6)一根小于 t_1，而另一根大于 t_2.

在解题时，主要是考虑以下几点：判别式，对称轴及区间的端点值.

14. 怎样解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$

在课本"小结与复习"里，列表写出了一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集表，对于 $a<0$ 及 $ax^2+bx+c<0$ 没做解答. 实际上我们可以采取下面的方法来解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$；

第一步：令 $y=ax^2+bx+c$，计算 $\Delta=b^2-4ac$. 依据 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 三种情况来确定以后的步骤.

如果 $\Delta>0$，第二步要计算方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，即 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. 第三步由 a 的符号与 $y=ax^2+bx+c>0$ 或 $y=ax^2+bx+c<0$ 确定不等式的解集是"a 与 y 同号、解在二根之外（即 $x<x_1$ 或 $x>x_2$）"；"a 与 y 异号，解在二根之内（即 $x_1<x<x_2$）".

如果 $\Delta=0$，第二步要计算方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个相等的实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. 第三步，如果 a 与 $y=ax^2+bx+c$ 同号，则不等式的解是不等于 $-\dfrac{b}{2a}$ 的一切实数，即 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 如果 a 与 $y=ax^2+bx+c$ 异号，则原不等式无解.

如果 $\Delta<0$，无须其他计算，直接得出不等式的解：若 a 与 y 异号，则原不等式无解；若 a 与 y 同号，则原不等式的解为一切实数，即 $x\in\mathbf{R}$.

对上面一元二次不等式的解法步骤的理解与记忆，应当结合二次函数的图象，"三个二次"即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式之间的联系，用数形结合的方法来理解与记忆.

15. 怎样解含参数的一元一次不等式

对含参数的方程、不等式或函数，要对参数所允许取的一切值分类进行讨论. 首先要求出

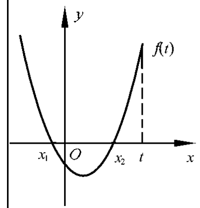
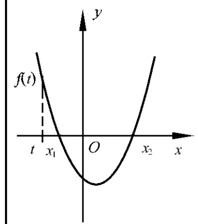
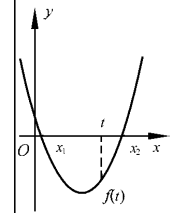
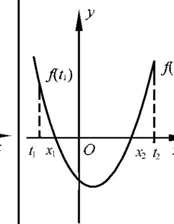
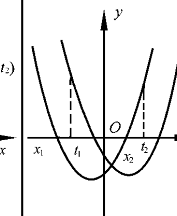
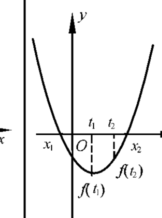
根的分布	$x_1<x_2<t$	$t<x_1<x_2$	$x_1<t<x_2$	$x_1、x_2\in(t_1,t_1)$	$x_1、x_2$有且仅有一个在(t_1,t_1)内	$x_1<t_1<t_2<x_2$
图象						
充要条件	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(t)>0\\ -\dfrac{b}{2a}<t\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(t)>0\\ -\dfrac{b}{2a}>t\end{cases}$	$f(t)<0$	$\begin{cases}\Delta>0\\ f(t_1)>0\\ f(t_2)>0\\ t_1<-\dfrac{b}{2a}<t_2\end{cases}$	$f(t_1)\cdot f(t_2)<0$	$\begin{cases}f(t_1)<0\\ f(t_2)<0\end{cases}$

图 1-6

参数的允许值范围，其次按讨论的需要分类，分类的原则要求“不重不漏”，即所分的若干类之间不重，它们两两的交集均为空集，而它们的并集应为全集，即允许值范围的全体.

如解不等式 $ax+3>0$.

解： a 的允许值范围是 $a\in(-\infty,+\infty)$.

当 $a=0$ 时，原不等式为 $3>0$，是绝对不等式，它的解是 $x\in\mathbf{R}$；

当 $a>0$ 时，不等式的解为 $x>-\dfrac{3}{a}$；

当 $a<0$ 时，不等式的解为 $x<-\dfrac{3}{a}$.

综上所述，当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\mathbf{R}$；当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\mid x>-\dfrac{3}{a}\right\}$；当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\mid x<-\dfrac{3}{a}\right\}$.

16. 怎样解分式不等式

分式不等式是指分母中含有未知数的不等式. 在解分式不等式时学生容易犯的错误是在没有限定分母为正还是为负的前提下盲目去分母，造成错解. 因此，在一般情况下不要去分母，而应当先通分，将不等式的一边化为 0，另一边进行分解因式，再求解.

如 解不等式 $x+6<\dfrac{40-20x}{x^2-5x+6}$.

解：移项得 $x+6-\dfrac{40-20x}{x^2-5x+6}<0$.

通分 $\dfrac{(x+6)(x^2-5x+6)-(40-20x)}{x^2-5x+6}<0$，

$\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-5x+6}<0$，

即 $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}<0$.

当 $x\neq2$ 时，上面的不等式化为

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x-3}<0.$$

$\therefore$ 原不等式的解集是

$\{x\mid x<-2$ 或 $-1<x<2$ 或 $2<x<3\}$.

要注意两个问题：

一个是当分式的分子分母同时约去因式 $(x-2)$ 时，一定不要忘记 $x\neq2$ 这个条件，否则在最后的结果中很容易得出解集为

$\{x\mid x<-2$ 或 $-1<x<3\}$ 这样的错误结果；

另一个是不等式 $\dfrac{(x-b)(x-c)}{x-a}<0$ 与不等式 $(x-a)(x-b)(x-c)<0$ 同解. 而不等式 $\dfrac{(x-b)(x-c)}{x-a}\leqslant0$ 与不等式 $(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant0$ 及 $x\neq a$ 同解.

17. 怎样解含字母的一元二次不等式

解含字母的一元二次不等式，要结合二次函数的图象. 首先判定二次项系数是否为零，如果二次项系数为零，则原不等式化为一元一次不等式. 如果二次项系数不为零，要分二次项系

数大于零，化为向上开口的抛物线或二次项系数小于零，化为向下开口的抛物线．然后再看判别式是大于零、等于零、还是小于零．当判别式大于零时，二次函数的两个根的大小判断也与字母有关，是要注意的．

18．什么是根轴法解不等式

举一个例子：解不等式$(5x+2)(4-3x)>0$．

首先将左边的两个x的一次式中x的系数化为1，原不等式化为$\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)<0$（两个括号分别提取系数5与$(-3)$），记$f(x)=\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$，令$f(x)=0$，得到两个根$x_1=-\frac{2}{5}$，$x_2=\frac{4}{3}$，把这两个根在数轴上标出来，再由右向左，自上而下穿过点$x_2=\frac{4}{3}$，再自下而上穿过点$x_1=-\frac{2}{5}$，画一条曲线，如图1-7：在数轴下方的部分$-\frac{2}{5}<x<\frac{4}{3}$，就是$f(x)<0$，即$\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)<0$的解；在数轴上方的部分，$x<-\frac{2}{5}$或$x>\frac{4}{3}$，就是$f(x)>0$，即$\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)>0$的解．这种方法，就叫做"根轴法"．

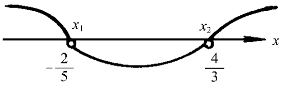


图 1-7

一般地，设$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$且$x_1<x_2<\cdots<x_n$将$x_1,x_2,\cdots,x_n$这些$f(x)=0$的根标在数轴上，再从右向左，从上至下穿过点$x_n$．再自下而上穿过点$x_{n-1}$，再自上而下穿过点$x_{n-2}$，……直到穿过最后一点$x_1$，这时在数轴上方的部分对应的$x$值就是不等式$f(x)>0$的解，在数轴下方的部分对应的$x$值就是$f(x)<0$的解，如图1-8．

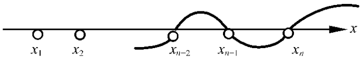


图 1-8

要强调的是$f(x)$的各个分解式，必须是x的一次因式，且每个因式中x的系数必须是1．

三、练习题

（一）选择题

1．已知全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是（　　）

(A) $A\cup B$　　(B) $A\cap B$　　(C) $\complement_I A\cup\complement_I B$　　(D) $\complement_I A\cap\complement_I B$

2．设集合$A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{N}\}$，则$A\cap B=$（　　）

(A) $\{x\mid x=5k,k\in\mathbf{N}\}$　　(B) $\{x\mid x=6k,k\in\mathbf{N}\}$

(C) $\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$　　(D) $\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{N}\}$

3．全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,5\}$，则成立的是（　　）

(A) $I=A\cup B$　　(B) $I=\complement_I A\cup B$

(C) $I=A\cup\complement_I B$　　(D) $I=\complement_I A\cup\complement_I B$

4．设全集$U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合$M=\left\{(x,y)\mid\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$等于（　　）

(A)$\varnothing$　(B)$\{(2,3)\}$　(C)$(2,3)$　(D)$\{(x,y)\mid y=x+1\}$

5．设集合 $A=\{x\mid x^2=x,x\in\mathbf{R}\}$，那么满足 $A\cup B=A$ 的集合 B 共有(　　)

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

6．已知集合 $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $P=\{y\mid y=5-x^2,x\in\mathbf{R}\}$，那么 $M\cup P$ 等于(　　)

(A)$\mathbf{R}$　(B)$\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 5\}$

(C)$\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1\}$　(D)$\{(-\sqrt{2},3),(\sqrt{2},3)\}$

7．下面的四个命题中，不正确的是(　　)

(A)若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\complement_U A\cup\complement_U B=U$

(B)若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$

(C)若 $A\cup B=U$，则 $\complement_U A\cap\complement_U B=\varnothing$

(D)若 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$

8．不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是(　　)

(A)$\{x\mid -3<x<2\}$　(B)$\{x\mid -1<x<2\}$

(C)$\{x\mid -2<x<1\}$　(D)$\left\{x\mid -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\right\}$

9．已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\{x\mid |x-1|\geqslant 3\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围是(　　)

(A)$[0,2]$　(B)$(-2,2)$　(C)$(0,2]$　(D)$(0,2)$

10．已知集合 $A=\{x\mid |x+1|<1\}$，集合 $B=\{x\mid |x|<2\}$，则 $A\cap B$ 是(　　)

(A)$\{x\mid -2<x<2\}$　(B)$\{x\mid -2<x<0\}$

(C)$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$　(D)$\{x\mid -2\leqslant x<0\}$

11．不等式 $-2x^2+3x+2<0$ 的解集为(　　)

(A)$\left\{x\mid x<-\frac{1}{2}\text{或 }x>2\right\}$　(B)$\left\{x\mid -\frac{1}{2}<x<2\right\}$

(C)$\left\{x\mid x<-\frac{1}{2}\right\}$　(D)$\{x\mid x>2\}$

12．已知集合 $P=\{x\mid (x-1)(2x-5)<0\}$，集合 $Q=\{x\mid 0<x<10\}$，则(　　)

(A)$P\cap Q=\varnothing$　(B)$P\subsetneqq Q$　(C)$P\supsetneqq Q$　(D)$P\cup Q=\mathbf{R}$

13．对任何实数 x，不等式 $x^2+bx+b>0$ 恒成立，则 b 的取值范围是(　　)

(A)$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$　(B)$[0,4]$　(C)$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$　(D)$(0,4)$

14．已知 $0<a<1$，则不等式 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-a)<0$ 的解是(　　)

(A)$a<x<\frac{1}{a}$　(B)$\frac{1}{a}<x<a$

(C)$x>\frac{1}{a}$ 或 $x<a$　(D)$x<\frac{1}{a}$ 或 $x>a$

15．已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\mid -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right\}$，则 a、b 的值分别为(　　)

(A)$a=12,b=-2$　(B)$a=-12,b=2$

(C)$a=-12,b=-2$　(D)$a=12,b=2$

16．下面4个不等式中，解集为全体实数集合的不等式是（　　）

(A) $4x^2-12x+9>0$　　(B) $4x^2-12x+9<0$

(C) $3x^2-2x+4>0$　　(D) $2x^2+x+1<0$

17．不等式 $\left|\frac{x}{x+2}\right|>\frac{x}{x+2}$ 的解是（　　）

(A) $-2<x\leqslant 0$　　(B) $x<-2$ 或 $x>0$

(C) $-2<x<0$　　(D) 全体实数

18．已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid |x|<P\}$，若 $B\subsetneqq A$，则实数 P 的取值范围是（　　）

(A) $0<P\leqslant 1$　　(B) $P\leqslant 1$　　(C) $-1<P\leqslant 3$　　(D) $P<1$

19．不等式 $\frac{ax}{x-1}<1$ 的解集是 $\{x\mid x<1$，或 $x>2\}$，那么 a 的值是（　　）

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{2}$

20．关于 x 的一元二次方程 $2(k+1)x^2+4kx+3k-2=0$ 的两实根同号，则 k 的取值范围是（　　）

(A) $k<-1$ 或 $k\geqslant\frac{2}{3}$　　(B) $-2<k<-1$ 或 $\frac{2}{3}\leqslant k\leqslant 1$

(C) $-2\leqslant k<-1$ 或 $\frac{2}{3}<k\leqslant 1$　　(D) $-2<k<1$

（二）填空题

21．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,\}$．$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x=|y|,y\in A\}$，那么集合 $B=$____.

22．设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，集合 $A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 a 的值是______.

23．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$，用列举法表示集合 $A=$________.

24．已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$，且 A 中至多只有一个奇数，写出所有满足条件的集合 A 是________.

25．若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x\in A\mid x^2-1\}$，则集合 B 用列举法可以表示为 $B=$______.

26．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，若 A 中的元素至多只有一个，则 a 的取值范围是________.

27．集合 $A=\{x\mid x^2+px+6=0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-x+q=0\}$，已知 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$______，$p=$____，$q=$____.

28．不等式 $|x|<|x+1|$ 的解集是______.

29．不等式 $|x-5|-|2x+3|<1$ 的解集是________.

30．对任意的实数 x，不等式 $|x+1|+|x-2|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围是______.

31．设方程 $|x+1|-|x-2|=a$ 的解集为 A，若 $A\neq\varnothing$，则 a 的取值范围是______.

32．不等式 $-4<x^2-5x+2<26$ 的整数解是________.

33．不等式 $56x^2-ax-a^2<0$ 的解是____（$a\in\mathbf{R}$）.

34．一元二次不等式，$mx^2+mx+n>0$ 的解集是 $\{x\mid -2<x<1\}$，则 $\frac{n}{m}$ 的值是______.

35. 不等式$\dfrac{x^2-x-8}{x^2-2x-3}<1$的解集是____________.

36. 设集合$A=\{x\mid -2<x<-1$,或$x>1\}$,集合$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,已知$A\cup B=\{x\mid x>-2\}$,$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$,则$a$、$b$的值是______.

37. 已知方程$x^2+mx+m-1=0$有一正根和一负根,且负根的绝对值大,则实数m的取值范围是________.

38. 若方程$2x^2-x+a-1=0$在$-1\leqslant x\leqslant 1$上有实数解,则a的取值范围是______.

39. 关于x的一元二次方程$x^2+(k-2)x+5-k=0$的两根都大于2,则k的取值范围是____.

40. 已知集合$A=\{x\mid x^3-x^2-6x>0\}$,集合$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,集合$C=\{x\mid x>-2\}$,又$A\cup B=C$,$A\cap B=\varnothing$,则$a$、$b$的值是____________.

(三)解答题

41. 已知集合$A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$,集合$B=\{x\mid x^2+4x+p<0\}$,若$B\subseteq A$,求实数p的取值范围.

42. 已知集合$A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$,

①若A中只有一个元素,求a的值并求这个元素;

②若A中至多只有一个元素,求a的取值范围.

43. 已知关于x的不等式$kx^2-2x+6k<0(k\neq 0)$.

①若不等式的解集是$\{x\mid x<-3$,或$x>-2\}$,求实数k的值.

②若不等式的解集是$\left\{x\mid x\neq\dfrac{1}{k}\right\}$,求实数$k$的值.

③若不等式的解集是实数集$\mathbf{R}$,求实数k的值.

44. 已知集合$A=\left\{x\mid \left|x-\dfrac{5}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$,$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$,且$A\supseteq B$,求实数$a$的取值范围.

四、阅读材料

罗 素 悖 论

1902年罗素指出:所有的集合可以分为两类,一类是集合A是它本身的一个元素,即满足$A\in A$这样的集合A,称为本身分子集.如"一切概念的集合A",由于它本身也是一个概念,所以它也属于这个集合,即满足$A\in A$.又如"一切集合的集合M",由于M也是一个集合,所以M也属于这个集合,即$M\in M$,它也是一个本身分子集.另一类集合是非本身分子集,这就是我们平常所见到的集合,即集合A不是它本身的一个元素.如$P=\{0,1\}$,显然$P\notin P$,它就是非本身分子集.

那么,由一切非本身分子集的全体构成的集合$M=\{x\mid x\notin x\}$是哪一类集合呢?

如果M是非本身分子集,即$M\notin M$,但从M的元素构成看,$M\in M$.如果M是一个本身分子集,即$M\in M$,但从M的元素构成看$M\notin M$.这样就得出一个悖论,称为罗素悖论.原因是"一切"两字不能漫无边际地泛泛使用,应有一定的条件约束.

1919年,罗素又把上述的悖论改写为更通俗的理发师悖论:某村只有一个理发师,且该村