高 考 红 宝 书

高中数学同步辅导

第三册

主编　赵翼西(北京市西城区数学学会秘书长)
王春树

中 国 铁 道 出 版 社
2003年·北京

(京)新登字 063 号

内　容　简　介

本书是供高三学生与数学老师使用的同步辅导用书。全书按照现行高中数学教材的章节结构编写,每节由四部分组成:“内容分析”,对教师提出教法建议,对学生进行学法指导;“疑难解析”,对教材内容作深入剖析与挖掘,作者多年教学所积累的经验尽现于此;“练习题”,在课本练习的基础上作适当补充;“课外阅读”,介绍相关的数学课外知识、数学家或数学史上的轶事。各章后提供了全章“测试题”,供学生检验学习效果。全部习题书后均附有答案及解析。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学同步辅导.第 3 册/ 赵翼西,王春树主编.
北京:中国铁道出版社,2002.9
ISBN 7-113-04756-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①赵…②王…　Ⅲ.数学课 - 高
中 - 教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062920 号

书　　名:高中数学同步辅导(第三册)
作　　者:赵翼西　王春树
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:赵　静
编辑部电话:010—51873133
封面设计:陈东山
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　印张:9.25 字数:226 千
版　　本:2003 年 4 月第 1 版　　2003 年 4 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 7-113-04756-4/ G·181
定　　价:12.00 元

第十一章 概率与统计 …… 1
第一节 随机变量 …… 1
一、内容分析 …… 1
二、疑难解析 …… 2
三、练习题 …… 7
四、阅读材料 …… 8
第二节 统计 …… 10
一、内容分析 …… 10
二、疑难解析 …… 11
三、练习题 …… 13
四、阅读材料 …… 14
第十一章自测题 …… 15
第十二章 极限 …… 17
一、内容分析 …… 17
二、疑难解析 …… 18
三、练习题 …… 29
四、阅读材料 …… 32
第十二章自测题 …… 36
第十三章 导数与微分 …… 38
第一节 导数与微分 …… 38
一、内容分析 …… 38
二、疑难解析 …… 39
三、练习题 …… 49
四、阅读材料 …… 51
第二节 导数的应用 …… 52
一、内容分析 …… 52
二、疑难解析 …… 53
三、练习题 …… 63
四、阅读材料 …… 65
第十三章自测题 …… 67
第十四章 积分 …… 68
一、内容分析 …… 68
二、疑难解析 …… 69

三、练习题 …… 92
四、阅读材料 …… 97
第十四章自测题 …… 100
第十五章　复数 …… 102
第一节　复数及其相关概念和运算 …… 102
一、内容分析 …… 102
二、疑难解析 …… 103
三、练习题 …… 114
四、阅读材料 …… 117
第二节　复数的三角形式 …… 119
一、内容分析 …… 119
二、疑难解析 …… 120
三、练习题 …… 126
四、阅读材料 …… 129
第十五章自测题 …… 130
习题参考答案 …… 132

第十一章　概率与统计

第一节　随机变量

一、内容分析

1. 数学思想方法

随机变量是概率论的一个基本概念,概率论是研究大量随机现象中的数量规律的数学分支,研究随机变量及其分布是它的重要任务,而且概率论所研究的也都大致局限于能用随机变量来描述的随机现象.所谓随机变量,不过是试验结果和实数之间的一个对应关系.对于每一个试验结果都对应着一个实数,这与函数概念的本质是相同的,只不过在函数概念中,函数$f(x)$的自变量是实数x,而在随机变量的概念中,随机变量ζ的自变量是试验结果,若把试验结果记为ω时,则把随机变量记为$\zeta(\omega)$.因此本节主要突出的数学思想是函数的思想.例如掷一枚硬币,可能出现正面向上或反面向上这两种结果,虽然这个随机试验的结果不具有数量性质,但仍可以用数量来表示,我们用变量ζ来表示这个随机实验的结果:

$\zeta=0$,表示正面向上;$\zeta=1$,表示反面向上。这种对应关系就是依照函数的对应的思想人为建立起来的.

例如,某城市出租汽车的起步价为10元,行驶路程不超过5 km时,出租车费为10元;若行驶路程超过5 km,则按每超出1 km收费2元计费(超出不足1 km的部分按1 km计算),从这个城市的民航机场到某宾馆的路程为15 km,某司机常驾车在此机场与宾馆之间接送旅客,由于行车路线的不同以及中途停车时间要转换成行车路程(这个城市规定每停车5 min按1 km路程计费),这个司机一次接送旅客的实际行车路程ζ是一个随机变量,设他所收出租车费为η,则$\eta=2(\zeta-10)+5=2\zeta-15$,显然$\eta$也是随机变量,我们此时也可以把$\eta$看做是$\zeta$的一次函数.

概括起来说,随机变量是一个单位函数,这样我们就可以用数学分析的方法全面地研究随机试验的所有结果,以揭示其客观存在的统计规律性.

2. 教法建议

本节的教学目的是使学生了解随机变量、离散型随机变量、连续型随机变量的意义,并应用以前所学的排列、组合、概率的知识,会求某些简单的离散型随机变量的分布列、期望与方差.鉴于此,教师应充分注意学生已学的知识、学习生活中的经验,多从实例出发,采用一些比较浅显的语言,来描述一些概念,无须给出严格的定义,比如解释离散随机变量就可以用"按一定次序一一列出"并配备一些简单的离散型随机变量的例子.教学中对教材中的例题加以解析,给学生解题示范,不要随意扩大范围、加大难度,如果不顾学生接受程度求全求深,势必会加重学生负担,降低学习质量.本节内容常常用到前面学过的排列、组合、二项式定理、概率等方面的知识,在教学中一定要以新带旧,经常不断地复习需要的已学知识,达到温故而知新.在讲解中也可采用讨论的方法,引导学生一步一步地搞清怎样求分布列,怎样求期望和方差,务求落实,切莫潦草行事.

3. 学法指导

为了学好这部分内容,首先要明确学习目的,端正学习态度,可举一些简单的实例,理解这部分知识的重要性和应用性,比如如何评价两个学生学习成绩的好坏,如何选派射击运动员参加世界大学生运动会等等,从而提高学习的兴趣 .

由于在初中阶段已经学习过平均数、方差的概念,因此一定要提前把初中学过的知识复习一下,在学习新知识过程中,不断地加以对比、归纳,形成新的相关的知识网络,以便加强记忆理解 .

在学习过程中,一定要重视对课本例题的阅读和分析,因为书中例题都是精选出来的,切实掌握例题中所学的知识、方法,才能做到举一反三、触类旁通,才能创新 .要提倡做一些典型的综合题,这样可以加深各部分知识的联系,理清解题思路,提高分析问题和解决问题的能力 .具体地说,在理解了随机变量意义的情况下,一定要熟练掌握求解离散型随机变量的分布列的方法,因为它是学习本节内容的基础方法 .求离散型随机变量的期望与方差,都是建立在随机变量的分布列基础之上的,例如某商场要根据天气预报来决定节日期间是在商场内,还是商场外开展促销活动 统计资料表明,每年国庆节,商场内的促销活动可获得经济效益 2 万元;商场外的促销活动如果不遇到雨天可获得经济效益 10 万元,如果促销活动中遇到雨天则会带来经济损失 4 万元 9 月 30 日,气象台预报国庆节当地有雨的概率是 40%,商场应该选择哪种促销方式?这就是一个非常典型的应用题,它的解题思路是:

(1)设该商场国庆节在商场外的促销活动获得的经济效益为 ζ 万元,则根据天气预报,列出分布列:

ζ	10	-4
P	0.6	0.4

(2)根据分布列求出期望 $E\zeta=10\times0.6+(-4)\times0.4=4.4$(万) .

由(1)、(2)可知在商场外促销获得的经济效益比在商场内促销获得的经济效益大,因此,决定在商场外开展促销活动 .

随着改革开放的不断深入,人们的应用意识和创新意识不断增强,所以在学习这部分内容时,也应该增强应用和创新意识,把生活中的实际问题转化为数学问题加以解决 .

二、疑难解析

1. 引入随机变量的目的和意义

随机变量 ζ 是概率论的一个基本概念,在教材中是这样论述的:如果随机试验的结果可以用一个变量来表示,那么这样的变量叫做随机变量 .这首先明确了随机变量是伴随着随机试验而产生的,那么为什么要引入随机变量这一基本概念呢?这就需要从概率论的任务说起 .概率论是研究大量随机现象中的数量规律的数学分支,研究随机变量及其分布是它的重要任务;另外,随机变量具有数值化,即它可以取数值,这样概率论所研究的许多随机现象就可以数值化,对随机变量进行各种数学运算 .正因为随机变量可以作为数值进行运算,研究起来很方便,所以数学家们就利用随机变量的性质,采用数学分析的方法全面地研究随机试验的所有结果,以揭示其客观存在着的统计规律 .

为了把引入随机变量的目的和意义说得再清楚一些,还得重复一下随机变量到底是什么 .在教科书中所举的众多例子中,每一个试验结果自然地对应着一个实数 .诚然,有些对应关系

是人为地建立起来的,但是无论哪一种情形,所谓随机变量,不过是试验结果(即样本点)和实数之间的一个对应关系,这与函数的本质是相同的,这样就为利用函数这个有力的工具来研究随机现象提供了强有力的保证.但是,应该注意到,在函数概念中,函数 $f(x)$的自变量是实数 x,而在随机变量的概念中,随机变量的自变量是试验结果.进一步地讲,随机变量与讨论一般函数有本质区别:第一,随机变量 ζ 是定义在样本空间上的,而不一定在实轴上(由一试验所有的基本事件组成的集合称为这个试验的样本空间,基本事件是这个集合的元素,称为样本空间中的样本点,例如:掷一个均匀的骰子观察出现点数的实验,这个实验的样本空间设为 Ω,则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,事件 ω_1="点数1",ω_2="点数2",…,ω_6="点数6"是这个事件的6个基本事件,也称为样本空间 Ω 的样本点);第二,随机变量取值是随机的,它取每一个可能值都是有一定的概率的;第三,随机变量是随机事件的数量化.

例:考虑试验 E:袋中有1个红球、2个白球、3个黑球,现从中任取一球观察其颜色.

E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$,其中 ω_1="取到的球为红色球",ω_2="取到的球为白色球",ω_3="取到的球为黑色球".

如果定义 $\zeta=\zeta(\omega)=i\ (i=1,2,3)$,即当 $\omega=\omega_i$ 时,$\zeta(\omega_i)=i$.那么 $\zeta(\omega)$就是一个随机变量,它的自变量 ω 取值不是实数,而是样本空间中的样本点 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$,而随机变量 ζ 本身取值为1,2,3三个实数,至于 ζ 要取这三个数中的哪一个,得由试验结果确定,即 ζ 是随机地取这三个数,容易算出 ζ 取这三个数的概率分别为 $P(\zeta=1)=\frac{1}{6}$,$P(\zeta=2)=\frac{1}{3}$,$P(\zeta=3)=\frac{1}{2}$,所以说随机变量取值是有一定概率的,这是普通函数 $y=f(x)$不具有的特点.

2. 怎样理解离散型随机变量的分布列的性质?

对于随机变量的研究,需要了解随机变量取哪些值以及取这些值或取某一个集合内的值的概率.对于离散型随机变量,它的分布列正是指出了随机变量 ζ 的取值范围以及取这些值的概率.为了便于研究,教材中给出了离散型随机变量的分布列的两个性质:

(1) $p_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots$

(2) $p_1+p_2+\cdots=1$

那么如何理解这两个性质呢?要想很好地理解这两个性质,必须掌握概率的性质,因此离散型随机变量的分布列是与概率有直接联系的,下面我们给出事件的概率的两种定义方法:

(1)概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次.当 n 逐渐增大时,比值$\frac{m}{n}$稳定地在某一常数 p 附近摆动,且 n 越大,摆动幅度越小,则称此常数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.这种定义方法被教材所采用,比较直观、具体,容易理解,但不够严谨,而且必须建立在大量的重复试验的基础上.

(2)概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω,对于 E 的每一个事件 A 赋予一实数,记作 $P(A)$,如果它满足下列条件:

①对于每一事件 A,有 $P(A)\geq 0$　　(非负性)

② $P(\Omega)=1$　　(完备性)

③对于两两互不相容的事件 $A_i\ (i=1,2\cdots)$有 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$　　(可列可加性)

则称实数 $P(A)$为事件 A 的概率 .

(互不相容的事件是表示两个事件不能同时发生)

尽管概率的公理化定义比较抽象,但是它定义严格,指出了事件概率的本质,任意事件的概率都是一个不大于 1 的非负数,而且 $P(\Omega)=1$, $P(\quad)=0$.

当明确概率的性质时,就不难明白,离散型随机变量的分布列既然是反映一些数值的概率,当然也满足概率的性质 .

3. 怎样求离散型随机变量的分布列与分布函数 ?

让我们先从例题开始说起 .

例 1 5 个乒乓球中有 2 个新的,3 个旧的,如果从中任取 3 个,其中新的乒乓球的个数是一个随机变量,求这个随机变量的分布列和分布函数,并画出分布函数的图形 .

解:设 ζ 表示任取的 3 个乒乓球中新的乒乓球的个数,由题目条件可知, ζ 的所有可能取值为 0,1,2 .

$$\because\quad P(\zeta=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10},\ P(\zeta=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10},\ P(\zeta=2)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}.$$

∴ 随机变量 ζ 的分布列如下表所示:

ζ	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

求出 ζ 的分布列之后,可由 $F(x)=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$ 来求 $F(x)$,在计算 $F(x)$时应注意, ζ 的分布函数 $F(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内的函数,由于 $P(\zeta\neq k)=0\ (k=0,1,2)$,即 $P(0<\zeta<1)=P(1<x<2)=P(\zeta<0)=P(\zeta>2)=0$,所以 $F(x)$必须分段计算,我们将区间$(-\infty,+\infty)$分为$(-\infty,0)$、$[0,1)$、$[1,2)$、$[2,+\infty)$分别计算 $F(x)$,有

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ P(\zeta=0) & 0\le x<1\\ P(\zeta=0)+P(\zeta=1) & 1\le x<2\\ P(\zeta=0)+P(\zeta=1)+P(\zeta=2) & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.1 & 0\le x<1\\ 0.7 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$F(x)$的图形如图 11-1 所示。

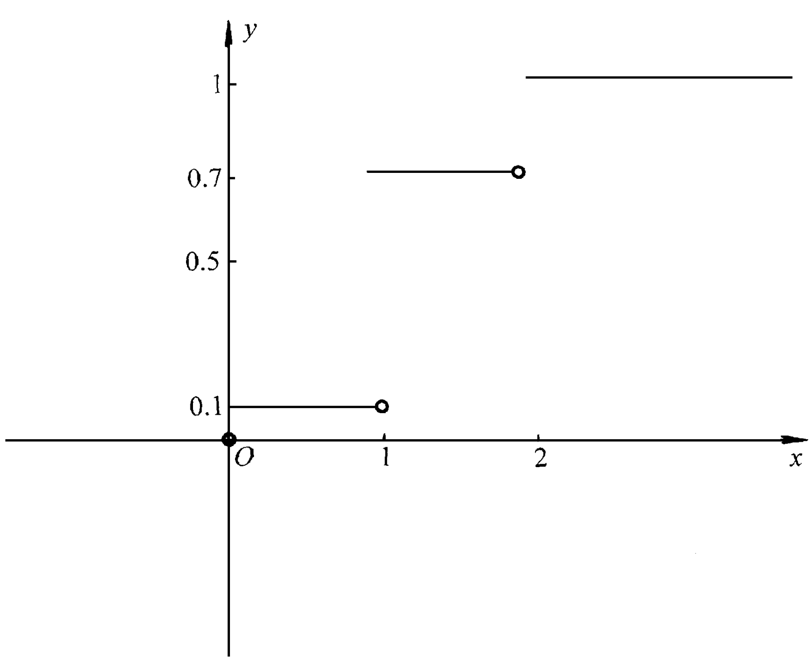

图 11-1

例 2　设 ζ 为一离散型随机变量,其分布列如下表所示,试求:

(1) q 值;　　(2) ζ 的分布函数 .

ζ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2q$	q^2

解:(1) ∵ 离散型随机变量的概率函数 $P(\zeta = x_k) = p_k$,满足 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 且 $0 \le p_k \le 1$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} + 1 - 2q + q^2 = 1 \\ 0 \le 1 - 2q \le 1 \\ q^2 \le 1 \end{cases}$$

,解得 $q = 1 - \frac{2}{2}$,从而 ζ 的分布列为

ζ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$2-1$	$\frac{3}{2} - 2$

(2)由 $F(x) = P(\zeta \le x)$,计算 ζ 的分布函数 .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \le x < 0 \\ 2 - \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

由上面的两个例题,我们可以归纳出求离散型随机变量的分布列与分布函数的一般方法:

(1)求分布列就是计算试验的所有基本事件各自的概率,要注意各事件的概率必须是非负数且不大于 1,而且所有事件的概率之和必须等于 1;

(2)求得分布列 $P(\zeta = x_k) = p_k (k = 1,2,\cdots, n)$后,就可由 $F(x) = P(\zeta \le x)$求得分布函数 .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & x_k \le x < x_{k+1} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

4. 为什么说二项分布是离散型随机变量的最重要的分布之一 ?

教科书中特意提出二项分布是一种常见的离散型随机变量的分布,这是有道理的 .因为我们在日常生活和生产实践中常常遇到服从二项分布的随机变量,如 n 次独立射击命中的次数, n 部性能相同的机床中正常工作的机床台数,从 N 个产品中有放回地每次取一个,若取 n 次,取到的次品个数,或从次品率为已知的一大批产品中任取 n 个产品中的次品个数,这些都认为是服从二项分布的随机变量 .这是从它的应用比较广泛这一方面说明它的重要 .另一方面,学生在前一章刚学过 n 次独立重复试验的概率,这就为讲离散型随机变量的二项分布奠定了基础,同时也得到充实 .最后,从它在概率论中的地位来讲,二项分布是概率论中最重要的

几种分布之一,在实际应用和理论分析中都有重要的地位.鉴于它的重要性,我们想从下面几点对二项分布加以解释:

(1)二项分布的表示方法

如果随机变量 ζ 的概率函数为 $P(\zeta=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$(其中 $q=1-p$, $k=0,1,2,\cdots,n$),则称 ζ 服从参数为 n 和 p 的二项分布,用 $\zeta\sim B(n,p)$ 表示.

(2)二项分布的期望与方差

若 $\zeta\sim B(n,p)$,则 ζ 的均值与方差分别为 $E\zeta=np$, $D\zeta=npq$ $(q=1-p)$。

(3)二项分布的最可能值

使服从二项分布的随机变量 ζ 的概率 $P(\zeta=k)$ 取得最大值的 k 称为二项分布的最可能值,记作 k_0.

$$k_0=\begin{cases} np+p-1 \text{ 和 } np+p & \text{若 } np+p \text{ 是整数} \\ [np+p] & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $[np+p]$ 表示不超过 $np+p$ 的最大整数.

例 3 将一颗骰子分别掷 25 次与 35 次,求点数 2 最有可能出现的次数 k_0.

解:设 ζ 表示在 n 次抛掷中点数 2 出现的次数,则 $\zeta\sim B(n,p)$,其中 n 分别为 25 与 35, $p=\frac{1}{6}$.

如果掷 25 次,即 $n=25$.由于 $np+p=\frac{26}{6}$,所以 $k_0=\left[\frac{26}{6}\right]=4$.

如果掷 35 次,即 $n=35$.由于 $np+p=6$,所以 $k_0=6$ 或 $k_0=5$.

即如果将一颗骰子掷 25 次,则点数 2 最有可能出现 4 次,如果将一颗骰子掷 35 次,则点数 2 最有可能出现 5 次或 6 次.

(4) $n=1$ 的二项分布

若随机变量 $\zeta\sim B(1,p)$,则又称 ζ 服从 0-1 分布或两点分布,这时 ζ 的分布列如表所示,其中 $p+q=1$,即 ζ 表示在一次试验中某一事件 A 发生的次数.

ζ	0	1
p	q	p

有时将服从 (n,p) 的二项分布的随机变量看作是 n 个独立的 0-1 分布的随机变量之和来处理问题会带来一定的方便.

5. 数学期望与方差的性质

一般地,若离散型随机变量的概率分布为

ζ	x_1	x_2	…	x_n	…
p	p_1	p_2	…	p_n	…

则称 $E\zeta=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为 ζ 的数学期望或平均数、均值、数学期望,又简称为期望.它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

(1)数学期望的性质

设 ζ、η 为随机变量, $E\zeta$、$E\eta$ 存在, C 为常数,则有

① $EC=C$

② $E(C\zeta)=C\cdot E\zeta$

③ $E(\zeta+\eta)=E\zeta+E\eta$

④如果 ζ, η 相互独立,则 $E(\zeta\eta)=(E\zeta)(E\eta)$

设 ζ 是一个随机变量,若$(\zeta - E\zeta)^2$ 的期望存在,则称 $E(\zeta - E\zeta)^2$ 为 ζ 的方差,记作 $D\zeta$.

(2)方差的性质

设 ζ、η 为随机变量,C 为常数,$D\zeta$、$D\eta$ 存在,则有:

① $D(C)=0$

② $D(\zeta+C)=D\zeta$

③ $D(C\zeta)=C^2D\zeta$

④ $D\zeta=E\zeta^2-(E\zeta)^2$

⑤如果 ζ、η 相互独立,则 $D(\zeta\pm\eta)=D\zeta\pm D\eta$

例 4 (选择题)设随机变量 ζ 的期望 $E\zeta$ 存在,且 $E\zeta=a$, $E\zeta^2=b$, c 为一常数,则 $D(c\zeta)=$( )

(A) $c(a-b^2)$ (B) $c(b-a^2)$ (C) $c^2(b-a^2)$ (D) $c^2(a-b^2)$

解:$\because D(c\zeta)=c^2\cdot D\zeta=c^2[E\zeta^2-(E\zeta)^2]=c^2(b-a^2)$,$\therefore$本题应选(C).

例 5 设 ζ 为一随机变量,已知 $E\zeta=1$, $D\dfrac{\zeta}{2}=1$,求 $E(\zeta-1)^2$.

解:$\because$ $E\zeta=1$, $\therefore$ $E(\zeta-1)^2=E(\zeta-E\zeta)^2=D\zeta$.

又$\because$ $D(\dfrac{\zeta}{2})=\dfrac{1}{4}D\zeta=1$, $\therefore D\zeta=4$.

$\therefore$ $E(\zeta-1)^2=4$.

三、练习题

(一)选择题

1. 掷均匀硬币一次,随机变量为( )

(A)出现正面的次数 (B)出现正面或反面的次数

(C)掷硬币的次数 (D)出现正反面次数之和

2. 将一颗骰子掷一次,随机变量为( )

(A)出现偶数点的点数 (B)出现奇数点的点数

(C)出现的点数 (D)掷骰子的次数

3. 10件产品中有 2 件次品,从中任取一件,随机变量为( )

(A)取到次品的个数 (B)取到产品的个数

(C)取到正品的概率 (D)取到次品的概率

4. 将一颗骰子掷两次,随机变量为( )

(A)第一次出现的点数 (B)第二次出现的点数

(C)两次出现的点数之和 (D)两次出现相同点的种数

5. 已知 ζ 的分布列为

ζ	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

期望值为( )

(A) 0 (B) -1 (C) $-\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 已知 ζ 的分布列如上题,ζ 最可能出现的值是( )

(A)$\frac{1}{2}$　　(B) -1　　(C)1　　(D) $-\frac{1}{3}$

7. 对于第 5 题中的 ζ 来说, 设 $\eta=2\zeta+3$, 则 η 的期望值是(　　)

(A)$\frac{7}{3}$　　(B)4　　(C) -1　　(D)1

8. 对第 7 题中的 η 来说, 其最可能出现的值应是(　　)

(A)1　　(B)3　　(C)5　　(D)4

9. 已知 ζ 的分布列为

ζ	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

则 $D\zeta$ 等于(　　)

(A)$\frac{29}{12}$　　(B)$\frac{131}{144}$　　(C)$\frac{179}{144}$　　(D)$\frac{17}{12}$

10. 已知 $\eta=2\zeta+3$, 其中 ζ 为第 9 题的 ζ, 则 $D\eta=$(　　)

(A)$4\frac{35}{36}$　　(B)$3\frac{11}{36}$　　(C)$\frac{11}{72}$　　(D)$3\frac{11}{72}$

11. 设 ζ 的概率分布如下:

ζ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

则正确的是(　　)

(A) $p_i\geq 0$　　(B) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$

(C) $p_i\geq 0$ 且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$　　(D) $0\leq p_i\leq 1$

12. 设 ζ 是一个随机变量, 则正确的是(　　)

(A) ζ 的定义域是一切实数　　(B) ζ 的定义域是样本空间

(C) ζ 没有确定的定义域　　(D) ζ 的定义域是一个点列或区间

(二) 解答题

13. 袋中有 3 个白球, 3 个红球和 5 个黑球. 从袋中随机地取 3 个球, 假定取得一个白球得 1 分, 取得一个红球扣 1 分, 取得一个黑球不得分也不扣分, 求得分的概率分布.

14. 某射手有 5 发子弹, 射击一次, 命中率是 0.9, 如果命中了就停止射击, 否则一直射到子弹用尽, 求耗用子弹数 ζ 的分布, $E\zeta$, $D\zeta$.

四、阅读材料

常见的离散型随机变量的分布

1. 二项分布(在前面已经讨论过, 在此不必多说)

2. 超几何分布

(1) 定义: 如果随机变量 ζ 的概率函数为 $P(\zeta=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ 〔$(k=0,1,2,\cdots,m;\ m=\min(M,n))$〕.

则称 ζ 服从超几何分布.

服从超几何分布的随机变量所有可能取值是有限个, 它们是 $0,1,2,\cdots,m$, m 是 M 和 n

中较小的一个.服从超几何分布的随机变量常见于小批量无放回抽取的试验,其数学模型为:N 个元素(产品、球等)分为两大类,第一大类有 M 个,第二大类有 $N-M$ 个,从中任取 n 个,则这 n 个元素中所含的第一类(或第二类)元素的个数是一个服从超几何分布的随机变量.

(2)超几何分布的期望与方差:若 ζ 服从超几何分布,则 ζ 的期望与方差分别为

$$E\zeta=\frac{nM}{N},\ D\zeta=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

(3)超几何分布与二项分布的关系:$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$,

即超几何分布以二项分布为极限,式中 $p=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{M}{N}$.若以产品为例,$p$ 可以理解为一批产品的次品(或废品、一等品等)率,因此大批量无放回抽取试验中的随机变量被认为是服从二项分布的.

3.泊松分布

(1)定义:如果随机变量 ζ 的概率函数为 $P(\zeta=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots,\lambda$ 为正常数),则称 ζ 服从参数为 λ 的泊松分布,用 $\zeta\sim P(\lambda)$ 表示.

服从泊松分布的随机变量的所有可能取值为无限多个,它们是 0,1,2,…,服从泊松分布的随机变量常见于稠密性问题中,如在一定时间内,某交换台收到的呼唤次数,某车站上的等车人数,容器内的细菌个数,牧草种子中的杂草种子数,某块布匹上的疵点数,某页书上的印刷错误数等都认为是服从泊松分布的随机变量.

(2)泊松分布的期望与方差:若 $\zeta\sim P(\lambda)$,则 ζ 的期望与方差分别为 $E\zeta=\lambda$, $D\zeta=\lambda$.

(3)泊松分布与二项分布的关系:泊松定理在贝努里试验中,以 p_n 代表事件 A 在试验中出现的概率,它与试验总数 n 有关,如果 $np_n\to\lambda$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n^k\cdot p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots)$.

这个定理表明,二项分布的极限是泊松分布,因为当 n 很大,p 很小,而 $np\leq 5$ 时,可用 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (\lambda=np)$ 作为 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 的近似值,而 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 的值可通过查泊松分布表得到.

例 1　某种布每平方米上的疵点个数服从泊松分布,并已知这种布平均每平方米有 0.8 个疵点,若规定每平方米上的疵点数不超过一个为一等品,多于一个但不超过四个为二等品,多于四个为次品,求这种布的一等品率、二等品率及次品率.

解:设 ζ 表示这种布每平方米上的疵点个数,由已知 $\zeta\sim P(\lambda)$ 且 $\lambda=E\zeta=0.8$,则

$P(\zeta\leq 1)=P(\zeta=0)+P(\zeta=1)=0.449\ 329+0.359\ 463\approx 0.809$.

$P(1<\zeta\leq 4)=P(\zeta=2)+P(\zeta=3)+P(\zeta=4)=0.143\ 785+0.038\ 343+0.007\ 669\approx 0.190$.

$P(\zeta>4)=1-P(\zeta\leq 4)=1-0.998\ 589\approx 0.001$.

所以这种布的一等品率为 0.809,二等品率为 0.190,次品率为 0.001.

例 2　(填空题)一袋中有 3 个红球、5 个白球,从中有放回地取 4 次,每次取一球,若 ζ 表示取到的红球次数,则 ζ 服从____分布,ζ 的概率函数为______,平均有__次取到红球,最多可能取到__次红球,如果无放回地取 4 次,每次取一球,则 ζ 服从____分布,ζ 的概率函数为______,平均有__次取到红球.

解:第一种情形:有放回地取 4 次,每次取一球,此试验为 4 重贝努里试验,因为每次试验中取到红球的概率均为 $p=\frac{3}{8}$,取不到红球的概率为$\frac{5}{8}$,所以 ζ 服从参数为 $4,\frac{3}{8}$ 的二项分布,ζ 的概率为 $P(\zeta=k)=C_4^k\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{5}{8}\right)^{4-k}\ (k=0,1,2,3,4)$,$E\zeta=4\times\frac{3}{8}=1.5$.

ζ 的最可能取值为$[np+p]=\left[\frac{15}{8}\right]=1$.

第二种情形:无放回地取 4 次,每次取一球,也就是从 8 个球中一次任取 4 球,所以

$$P(\zeta=k)=\frac{C_3^k C_5^{4-k}}{C_8^4}\quad(k=0,1,2,3,4)$$

因此 ζ 服从超几何分布 $E\zeta=\frac{4\times3}{8}=1.5$.

例 3 某汽车站每天出事故的次数 ζ 服从泊松分布,且已知一天内发生一次事故与发生两次事故的可能性相同,求每天发生事故不超过一次的概率 .

解:$\because \zeta\sim P(\lambda)$,$\therefore P(\zeta=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad(k=0,1,2,\cdots)(\lambda>0$,常数) .

又$\because P(\zeta=1)=P(\zeta=2)$,$\therefore \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$.

由此解得 $\lambda=2$,

于是所求 $P(\xi\leq1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=0.135\ 335+0.270\ 671\approx0.41$.

第二节　统　　计

一、内容分析

1. 数学思想方法

本章“统计”部分是在初中学习的基础上加以深入和扩展,研究的主要问题是两个:其一是如何从总体中抽取样本,其二是如何通过对所抽取的样本进行计算和分析,对总体的相应情况作出推断 .

基于本章内容分析,简单随机抽样和用样本的某种特征去估计总体的相应特征是本章突出的数学方法,即数理统计的方法,因为当我们讲这部分时还没有学习微积分,知识内容极其初步,因此,我们不追求理论上多么清楚,而在于对一些重要概念的实际意义的理解,突出统计中处理问题的基本思想方法,突出统计知识的实际应用 .

2. 教学建议

(1)突出一个核心 .“统计”的核心是如何根据样本的情况对总体的情况作出推断 .这个核心中的核心是抽样方法,在教学中必须突出这一点 .

(2)在简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种抽样方法中,突出简单随机抽样的方法 .因为它是一种非常重要的抽样方法,也是其他两种抽样方法的基础 .

(3)要轻理论重操作 .因为教材本身介绍的知识是初步的,不可能使学生在理论上搞清楚,因此,应使学生在遇到统计问题时会抽样、会整理数据、会计算,从中体会统计的思想和方法,这样就达到了教学目的 .

(4)要重视作业 .这是一个突出的问题,因为这一部分课时比较紧,高考又是非重要考点,

人们往往忽视作业.过去人们常说“百闻不如一见,百见不如一练”,还是让学生自己动手,去尝试一下,这样才能真正体会统计的思想方法.

3. 学法指导

本章内容与前一章概率知识有密切联系,同时与在初中学习过的统计初步的联系也非常紧密,因此在学习本章内容前,应首先把前面学过的知识复习一下,为后面的学习打好基础.

另外,在学习过程中,多从实际例子出发,领会统计的方法和原理,在理解基本概念的基础上,记住一些常用的结论和解题套路,这样才能提高学习效果.

二、疑难解析

1. 简单随机抽样有何特点?

回答这个问题首先看教材中的定义:一般地,设一个总体的个数为 N,如果通过逐个抽取的方法从中抽取一个样本,且每次抽取时各个个体被抽到的概率相等,就称这样的抽样为简单随机抽样.

我们根据上述定义,分析它有如下特点:

(1)它要求被抽取样本的总体的个数有限,这样就便于对其中各个个体被抽取的概率进行分析.

(2)它是从总体中逐个地进行抽取,这样就便于在抽样实践中进行操作.

(3)它是一种不放回抽样.抽样实践中多采用不放回抽样,使其具有较广泛的实用性,而且由于所抽取的样本中没有被重复抽取的个体,因而便于进行有关的分析和计算.

(4)它是一种等概率抽样.不仅每次从总体中抽取一个个体时,各个个体被抽取的概率相等,而且在整个抽样过程中,各个个体被抽取的概率也都相等,从而保证了这种抽样方法的公平性.

2. 如何理解逐个抽取时,各个个体被抽取的概率相等与整个抽样过程中各个个体被抽取的概率相等?

对于在逐个抽取时各个个体被抽取的概率相等的理解是比较容易的,因为我们现在讲的简单随机抽样的定义就告诉我们,它是等概率的抽样,而对后一句话“整个抽样过程中各个个体被抽取的概率相等”的理解就不那么容易了.假设当用简单随机抽样从含有 N 个个体的总体中抽取一个容量为 n 的样本时,求整个抽样过程中每个个体被抽取的概率.

我们知道当从含有 N 个个体的总体中一次性地抽取容量为 n 的样本时,在假定每个个体被抽到的概率相等的前提下,其中任一个体 a 被抽到的概率为 $p=\frac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n}=\frac{C_{N-1}^{n-1}}{\frac{N}{n}C_{N-1}^{n-1}}=\frac{n}{N}$.

这就说明了,在整个抽取过程中每个个体被抽取的概率相同,均为$\frac{n}{N}$.

然而,这里说的“每次抽取一个个体时任一个体被抽取的概率”与“在整个抽样过程中个体 a 被抽到的概率”显然不是一回事,必须加以分清.例如,我们从含有 6 个个体的总体中抽取一个容量为 2 的样本,总体中的某一个体 a 在第一次抽取时被抽到的概率为$\frac{1}{6}$,在第一次未被抽到而第二次被抽到的概率还是$\frac{1}{6}$($p=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$),而在整个抽样过程中它被抽到的概率是$\frac{1}{3}$.

例 1 从湖中打一网鱼,共 m 条,做上记号再放入湖中,数天后再打一网鱼共 n 条,其中有 k 条有记号,估计湖中有鱼(　　)

(A) $\frac{n}{k}$　　(B) $m\cdot\frac{n}{k}$　　(C) $m\cdot\frac{k}{n}$　　(D)无法估计

解:设湖中有鱼 N 条 那么当从湖中打一网鱼,共 m 条,每条鱼被打捞上来的概率是 $\frac{m}{N}$,数天后再打一网鱼共有 n 条,其中有 k 条有记号,其 $\frac{k}{n}=\frac{m}{N}$, $\therefore N=m\cdot\frac{n}{k}$,故选(B) .

3. 如何理解有放回抽样与不放回抽样 ?

为了把问题说清楚,我们先看两个例题 .

例 2 若 10 个产品中有 7 个正品,3 个次品

(1)不放回地每次从中任取一个,共取 3 次,求取到 3 个次品的概率 .

(2)每次从中任取一个,有放回地取 3 次,求取到 3 个次品的概率 .

解:(1)设 A =" 取到 3 个次品 "

由于这个试验是不放回地抽取 3 次,所以 3 次取产品分别是从 10 个、9 个、8 个中任取一个,因此共有 $C_{10}^1\cdot C_9^1\cdot C_8^1=720$ 种不同的取法,即样本空间中样本点的个数 $n=720$,而 3 次取到 3 个次品有 $C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1=6$ 种不同的取法,即事件 A 包含 $m=6$ 个样本点,所以

$$P(A)=\frac{6}{720}=\frac{1}{120}=0.0083 .$$

从另一个角度分析,从 n 个产品中不放回地每次任取一个,共取 m 次的试验也可以用从 n 个产品中一次任取 m 个产品的方法来考虑 .因而这个试验也可以看成从 10 个产品中任取的 3 个产品都是次品,这样样本空间中的样本点数可用 C_{10}^3 计算,事件 A 所包含的样本点数可用 C_3^3 计算,于是

$$P(A)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}=0.0083 .$$

(2)设 A =" 取到 3 个次品 "

由于这个试验是有放回地取 3 次,即取完一次,记录下产品的种类后放回去,再取第二次,所以每次都是从 10 个产品中任取一个,每次都有 10 种不同的取法,3 次共有 10^3 种不同的取法,即样本空间中共有 $n=10^3$ 个样本点,事件 A 包含的样本点数为 $m=3^3$,所以

$$P(A)=\frac{3^3}{10^3}=0.027 .$$

另外,由于是有放回地抽取 3 次,因而也可以看成是三次独立的试验,每次试验结果只有" 取到的是次品 "与" 取到的不是次品 "两个,因此,试验满足二项分布 .由于每次试验取到次品的概率为 0.3,于是,三次试验中恰取到三个次品的概率为

$$P(A)=(0.3)^3=0.027 .$$

例 3 若 10 个产品中有 7 个正品,3 个次品,每次从中任取一个,不放回地取 3 次,求取到两个正品、一个次品的概率 .

解:设 A =" 取到两个正品、一个次品 ".将试验理解为从 10 个产品中一次任取 3 个产品,于是样本空间中样本点的个数为 $n=C_{10}^3$,事件 A 包含的样本点个数 $m=C_7^2\cdot C_3^1$.所以

$$P(A)=\frac{C_7^2\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}=0.525 .$$

从上面可以看出有放回抽样与不放回抽样是不同的,试验结果也是不一样的.因此,在遇到具体问题时,一定要分清是有放回抽样还是不放回抽样,正确使用计算公式.需要提醒的是在计算时如果用排列组合方法都可以,那么或者都用排列方法,或者都用组合方法.

4. 何谓“小概率事件”?

“小概率事件”通常指发生的概率小于5%的事件.这就提出了一个在一次试验中几乎不可能发生的思想,因为对这类事件来说,在大量重复试验中,平均每试验20次,发生还不到1次,所以认为在一次试验中该事件是几乎不可能发生的.这种认识是我们进行推断的出发点.对于“小概率事件”应从两个方面理解:一是这里的“几乎不可能发生”是针对“一次试验”来说的,因为如果试验次数多了,该事件当然很可能发生;二是当我们运用“小概率事件几乎不可能发生”的原理进行推断时,我们也有5%的犯错误的可能,因为这只是一种估计,它不同于我们过去数学中的推理方法.

“小概率事件”原理主要用于检验假设.是接受统计假设,还是拒绝统计假设,主要取决于“小概率事件”是否发生,不发生则接受,发生了则不接受.

三、练习题

(一)选择题

1. 在简单抽样中,某一个个体被抽中的可能性是(　　)

(A)与第 n 次抽取有关,第一次抽中的可能性要大些

(B)与第 n 次抽样无关,每次抽中的可能性都相等

(C)与第 n 次抽样有关,最后一次抽中的可能性大些

(D)与第 n 次抽样无关,每次都是等可能的抽取,但各次抽取的可能性不一样

2. 系统抽样又称等距抽样,从 N 个个体中抽取 n 个个体为样本,先确定抽样间隔,即抽样距 $K=\frac{N}{n}$ (取整数部分),从第一段 $1,2,\cdots,K,\cdots,i_0+(n-1)K$ 号均入样构成样本,所以每个个体的入样概率是(　　)

(A)相等的　　(B)不相等的　　(C)与 i_0 有关　　(D)与编号无关

3. 分层抽样又称类型抽样,即将相似的个体归入一类(层),然后每层各抽若干个体构成样本,所以分层抽样为保证每个个体等可能入样,必须进行(　　)

(A)每层等可能抽样　　(B)每层不等可能抽样

(C)所有层用同一抽样比,等可能抽样　　(D)所有层同样多样本容量,等可能抽样

4. 总体数学期望(均值)μ的估计量是(　　)

(A)样本均值 $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

(B)样本方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

(C)样本极差 $R=\max(x_1,\cdots,x_n)-\min(x_1,\cdots,x_n)$

(D)样本平均差 $A\cdot D=\frac{1}{n}[|x_1-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|]$

5. 总体方差 δ^2 的估计量是(　　)

(A)样本最大值 $x(n)=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$

(B)样本最小值 $x(1)=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$