目　录

CONTENTS

基　础　篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”和“形”的学科. 代数是它的侧重研究运算方法的分支. 数列、数列的极限、数学归纳法是代数的三个节点.

数列是按一定次序排列的一列数.

从映射、函数的观点看，数列是一个序号集合到另一个数的集合的映射 $f:A\to B$. 其中，$A=\mathbf{N}^*$，或 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，$B\subsetneqq \mathbf{R}$. 因此，数列$\{a_n\}$可以看成是定义域为 A、值域为 B、对应法则为 f 的函数 $a_n=f(n)$的一列函数值 $a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$\cdots$.

数列研究的主要问题是

(1)根据已知条件，求出通项公式 $a_n=f(n)$；

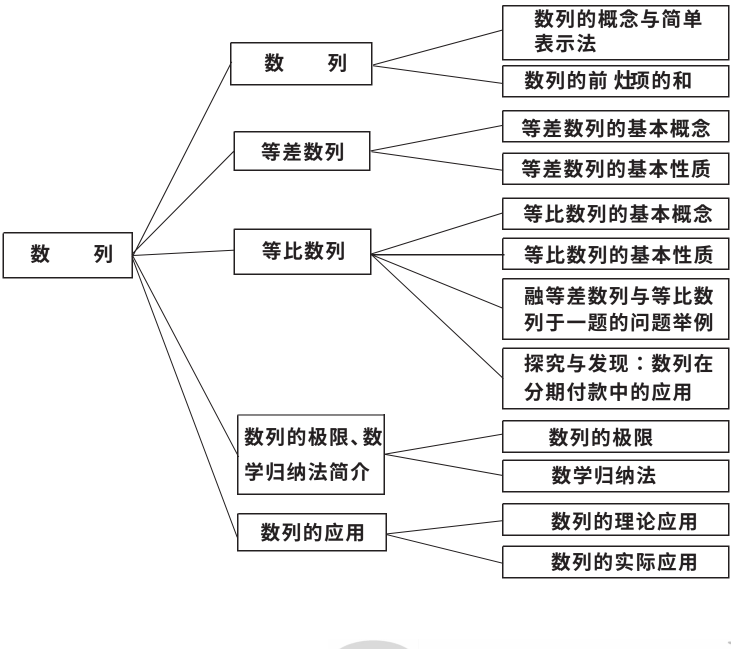
(2)通过通项公式 $a_n=f(n)$研究数列的性质.

数列课题的知识载体是通项 a_n、前 n 项的和 S_n；模型函数是等差数列、等比数列.

数列的极限，其本质是研究无穷数列的变化趋势.

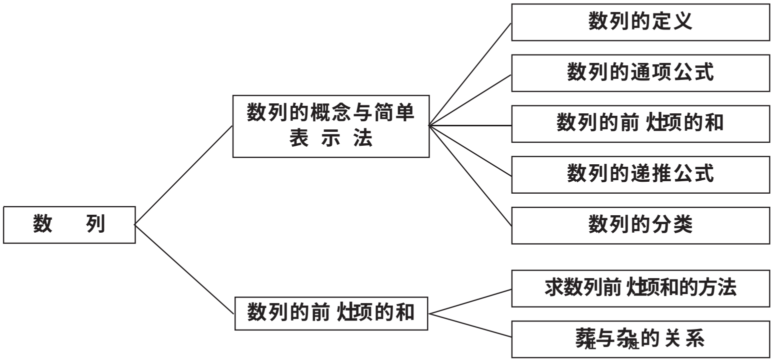
数学归纳法，其本质是研究与正整数有关的命题的推理论证方法.

本书知识框图



第一讲　数　列

本讲知识框图



学习指导

［考纲要求］

理解数列的概念；了解数列的通项公式的意义；了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

1.1　数列的概念与简单表示法

重点难点归纳

重点　①数列的定义. ②数列的通项公式的定义.

难点　正确运用数列的递推公式求数列的通项公式.

本节需掌握的知识点　①数列的定义. ②数列的通项公式的定义.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 数列的定义

数列是按一定次序排列的一列数.

在函数意义下，数列是定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$）的函数 $f(n)$当自变量 n 从 1 开始依次取正整数时所对应的一列函数值

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots.$$

通常用 a_n 代替$f(n)$，于是数列的一般形式为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次叫做数列$\{a_n\}$的第 1 项，第 2 项，…，第 n 项，a_1 也叫首项，a_n 也叫通项. 对项数有限的数列而言，最后一项一般称为末项.

2. 数列的通项公式

一个数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系，如果可以用一个公式

$$a_n=f(n)$$

来表示，我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式.

如，数列 1，4，9，16，…的通项公式为 $a_n=n^2$.

正像不是所有的函数关系都能用解析式表示出来一样，也不是每个数列都能写出它的通项公式. 如，数列 1，2，3，-1，4，-2 就没有通项公式.

有的数列，虽然有通项公式，但在形式上却不一定是唯一的. 如，数列 -1，1，-1，1，…的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，也可写成 $a_n=\cos n\pi$.

3. 数列的前 n 项的和

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 叫做数列$\{a_n\}$的前 n 项的和.

4. 数列的递推公式

如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

5. 数列的分类

(1) 有穷数列、无穷数列

按照数列的项数是有限项还是无限项来分，数列可划分为有穷数列、无穷数列. 如：数列 1，2，…，2 008 和数列 1，3，5，…，$2n-1$，…分别是有穷数列和无穷数列.

(2) 递增数列、递减数列

按照数列的项与项之间的大小关系“$a_{n+1}>a_n$，或 $a_{n+1}<a_n$”来分，数列可划分为递增数列、递减数列. 如：数列 1，2，4，…，2^{n-1}，…和数列 2 008，2 007，…，1 949 分别是递增数列和递减数列.

递增数列与递减数列统称为单调数列.

(3) 有界数列、无界数列

按照数列的任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分，数列可划分为有界数列，无界数列. 如：数列$\{\sin 1\ 921n\}$和数列$\{n^{1\ 927}\}$分别是有界数列和无界数列.

(4) 摆动数列

$a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$ 不确定.如:数列$-2,2,-2,2,\cdots$是摆动数列.

(5) 常数数列

$a_{n+1}=a_n$.如:数列 2 010,2 010,…,2 010,…是常数数列.

解题方法指导

1. 用观察法求数列的通项公式

用观察法求数列的通项公式应从三个方面考虑:

(1) 掌握一些简单数列的通项公式,见下表.

简　单　数　列	通　项　公　式
$1,1,1,1,\cdots$	$a_n=1$
$1,2,3,4,\cdots$	$a_n=n$
$2,4,6,8,\cdots$	$a_n=2n$
$1,3,5,7,\cdots$	$a_n=2n-1$
$1,2,4,8,\cdots$	$a_n=2^{n-1}$
$2,6,12,20,\cdots$	$a_n=n(n+1)$
$1,4,9,16,\cdots$	$a_n=n^2$
$1,8,27,64,\cdots$	$a_n=n^3$
$1,-1,1,-1,\cdots$	$a_n=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi$
$-1,1,-1,1,\cdots$	$a_n=(-1)^n=\cos n\pi$
$1,-2,3,-4,\cdots$	$a_n=(-1)^{n+1}n$
$0,1,0,1,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\left\lvert\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right\rvert$
$1,0,1,0,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\left\lvert\sin\frac{n\pi}{2}\right\rvert$
$1,11,111,1\ 111,\cdots$	$a_n=\frac{10^n-1}{9}$

(2) 正、负号的交错“$+,-,+,-,\cdots$”和“$-,+,-,+,\cdots$”,分别用$(-1)^{n+1}$和$(-1)^n$ 来调解.

(3) 求形如$\{a_n b_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$等形式的数列的通项公式,先分别求出$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的

通项公式，再组合为一体.

[例 1]　求下列数列的一个通项公式：

(1) $1,-1,1,-1,\cdots$；　　(2) $3,5,9,17,33,\cdots$；

(3) $\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；　　(4) $1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\cdots$.

分析　用观察法考察数列中的每一项与它的序号之间的对应关系，归纳各项数值的变化规律.

解　(1) $a_n=(-1)^{n+1}$.

(2) $a_n=1+2^n$.

(3)数列的项，有的是分数，有的是整数，可将数列的各项都统一成分数再观察.

在数列 $\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$ 中，分母为 2，分子为 n^2，

所以
$$a_n=\frac{n^2}{2}.$$

(4)把数列改写成 $\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{-1}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{5},\frac{0}{6},\frac{-1}{7},\frac{0}{8},\cdots$.

分母依次为 $1,2,\cdots$，而分子 $1,0,-1,0,\cdots$ 周期性地出现，

因此，我们可以用 $\sin\frac{n\pi}{2}$ 来表示分子，

所以
$$a_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}.$$

2. 根据数列的递推公式求数列的通项公式

[例 2]　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$，写出数列的前 6 项及 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析　已知 $a_{n+1}=2a_n+1$ 中，一般称为数列的递推公式. 由数列的首项和递推公式可直接写出数列中的各项，通项公式可用累乘法来求.

解　$\because$ $a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$，

$\therefore$
$$a_2=7,a_3=15,a_4=31,a_5=63,a_6=127.$$

$a_{n+1}=2a_n+1$ 变形为 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，由此得下面 $n-1$ 个式子

$$a_n+1=2(a_{n-1}+1),$$

$$a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1),$$

$$a_{n-2}+1=2(a_{n-3}+1),$$

……

$$a_2+1=2(a_1+1).$$

将这 $n-1$ 个等式相乘,得

$$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1).$$

又∵ $a_1=3$,

∴ $$a_n=2^{n+1}-1.$$

点评　已知递推公式求通项,可把每相邻两项的关系列出来,抓住它们的特点进行适当的处理.本题的处理办法是相乘(称为累乘法).有时也可相加或相减(称为叠加法).比如,本例调整一下系数就可用叠加法,即对递推公式 $a_{n+1}=2a_n+1$ 可做如下调整:$a_n=2a_{n-1}+1$,$2a_{n-1}=2^2a_{n-2}+2$,$2^2a_{n-2}=2^3a_{n-3}+2^2$,…,$2^{n-2}a_2=2^{n-1}a_1+2^{n-2}$.将这 $n-1$ 个等式相加,得 $a_n=2^{n-1}\cdot 3+(1+2+\cdots+2^{n-2})$.本题还可用递归法,即将递推关系层层代入,比如,$a_{n+1}=2a_n+1\Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,所以 $a_n=2a_{n-1}+1$,所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2[2(a_{n-2}+1)]=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)=2^{n+1}$,所以 $a_n=2^{n+1}-1$.

[例 3]　已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$中,$a_1=1$,$b_1=-1$,又 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$,$b_{n+1}=6a_n-4b_n$.求 a_n 和 b_n.

分析　本题没有直接给出两个数列的递推关系,但两个等式只要相减就可得到差数列的递推关系,即 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$,因此用累乘法或递归法可求得差数列的通项 $a_n-b_n=2^n$,代入第 1 个等式消去 b_n 得$\{a_n\}$的递推公式,再用叠加法可求得$\{a_n\}$的通项公式,然后代入差数列的通项公式即可得$\{b_n\}$的通项公式.

解　由 $\begin{cases}a_{n+1}=8a_n-6b_n,\\ b_{n+1}=6a_n-4b_n,\end{cases}$ 得

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n),$$

∴ $a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1})=2^2(a_{n-2}-b_{n-2})=\cdots=2^{n-1}(a_1-b_1)=2^n$,

即 $$a_n-b_n=2^n. \qquad ①$$

把①代入 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$,得

$$a_{n+1}=2a_n+6(a_n-b_n)=2a_n+6\cdot 2^n.$$

∴ $a_{n+1}=2a_n+6\cdot 2^n$,

$2a_n=2^2a_{n-1}+6\cdot 2^n$,

$2^2a_{n-1}=2^3a_{n-2}+6\cdot 2^n$,

……

$2^{n-1}a_2=2^n\cdot a_1+6\cdot 2^n$.

把 $a_{n+员}$圆$_n$+远圆 中的 n 每次减少 员 再把所得式子两边同时乘以 圆 就得到了这 $n-$员个式子

以上各式相加并把 $a_1=1$ 代入，得

$$a_{n+1}=2^n+6\cdot 2^n\cdot n=2^n(6n+1).$$

∴ $$a_n=2^{n-1}[6(n-1)+1]=2^{n-1}(6n-5),$$

即 $$a_n=2^{n-1}(6n-5).$$

把上式代入①，得

$$b_n=2^{n-1}(6n-7).$$

[例 4] 已知数列$\{a_n\}$：3，5，7，…，$2n+1$，…，作另一数列$\{b_n\}$，使 $b_1=a_1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，求数列$\{b_n\}$的第 4 项、第 5 项和通项.

分析 数列$\{a_n\}$是已知数列，通项公式为 $a_n=2n+1$，$\{b_n\}$与$\{a_n\}$的关系是 $b_n=\begin{cases}a_1 & (n=1),\\ a_{b_{n-1}} & (n\geqslant 2).\end{cases}$ 结合在一起，得 $b_1=a_1$，$b_{n+1}=2b_n+1$，即 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，所以数列$\{b_n+1\}$的通项可求.

解 $b_2=a_3=7$，

$b_3=a_{b_2}=a_7=2\cdot 7+1=15$，

$b_4=a_{b_3}=a_{15}=31$，

$b_5=a_{b_4}=a_{31}=63$，

①$a_n=2n+1\Rightarrow a_1=b_1=3$.
②依 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，将 $n=1$，2，…，$n-1$ 逐个代入

∵ $b_n=a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$，

∴ $n\geqslant 2$ 时，$b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+1}$，

∴ $b_n=2^{n+1}-1$（经检验，$n=1$ 也适合）.

3. 根据数列前 n 项和公式求数列的通项公式

[例 5] 数列$\{a_n\}$中，$S_n=n^2+n-2$，求 a_n.

分析 已知数列的前 n 项和的公式，求通项 a_n，可直接利用通项与和的关系 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

解 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1+1-2=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.$$

∴ $a_n=\begin{cases}0 & (n=1),\\ 2n & (n\geqslant 2).\end{cases}$

a_1 符合 $a_n=2n$ 的表达式，通项公式可以统一写，如果 a_1 不符合表达式，通项公式必须分段表示

4. 根据数列的通项公式求数列的某些项

[例 6] 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases} n & (n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*), \\ n+1 & (n=2k,k\in\mathbf{N}^*). \end{cases}$

(1)写出这个数列的奇数项的前 3 项;

(2)写出这个数列的前 3 项.

分析 可以直接按项数的奇偶性求所求的项,另一种方法是将通项公式整理成 $a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

解 (1)$a_1=1$,$a_3=3$,$a_5=5$.

(2)$a_1=1$,$a_2=3$,$a_3=3$.

点评 通项公式可以分段表达也可统一表达,如:$a_n=\begin{cases} f(n) & (n\text{ 为奇数}), \\ g(n) & (n\text{ 为偶数}) \end{cases}$ 也可合并写成 $a_n=\dfrac{1}{2}[f(n)+g(n)]+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\times[f(n)-g(n)](n\in\mathbf{N}^*)$.

5. 数列中的探索性问题

[例 7] 数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=(n+1)\times0.9^n$,问是否存在这样的正整数 N,使得对于任意的正整数 n,都有 $a_n\leqslant a_N$ 成立,证明你的结论.

分析 本题属于探索性问题中的存在性问题,这类问题的解题思路是:先假定所需探索的对象存在或结论成立,以此为前提进行推理和运算.若推出矛盾,则否定结论,否则要给出肯定的证明.本题提出的问题是判断数列$\{a_n\}$中是否存在最大的项,所以需要研究数列中各项间的大小关系及其变化情况.因此,只要判断$\{a_n\}$的增减性即可.

解 由$a_n=(n+1)\times0.9^n$,得

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}(n+2)-\left(\frac{9}{10}\right)^n(n+1)=\frac{9^n}{10^{n+1}}(8-n).$$

∴ $n<8$ 时,$a_{n+1}>a_n$;$n>8$ 时,$a_{n+1}<a_n$;且 $a_8=a_9$.

∴ $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_8=a_9>a_{10}>a_{11}>\cdots$.

判断数列的增减性与判断函数的增减性方法相同,即考查 $a_{n+1}-a_n$ 的符号,正号具有递增性,负号具有递减性

∴ 存在正整数 $N=8$ 或 9,使 $a_n\leqslant a_N$ 成立.

基础训练题

一、选择题

1. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，当$n\geqslant 2$时，$a_1a_2a_3\cdots a_n=n^2$，则a_3+a_5等于　(　　)

A. $\frac{61}{16}$　　B. $\frac{25}{9}$　　C. $\frac{25}{16}$　　D. $\frac{31}{15}$

2. 如果数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$，那么这个数列的通项公式是　(　　)

A. $a_n=2(n^2+n+1)$　　B. $a_n=3\cdot 2^n$

C. $a_n=3n+1$　　D. $a_n=2\cdot 3^n$

3. 若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-2n+2\ 008$，则$a_{n+1}-a_n=$　(　　)

A. $2n-2$　　B. $2n-1$　　C. $2n$　　D. $2n+1$

4. 如果数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{n^2+n}$，那么$\frac{1}{10}$是它的　(　　)

A. 第4项　　B. 第5项　　C. 第6项　　D. 第7项

二、填空题

5. 数列$-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\cdots$的一个通项公式是__________.

6. 若数列$\{a_n\}$的前n项的和为$S_n=\frac{2n-1}{n}$，则$a_8=$__________.

7. 若数列$\{a_n\}$的前n项的和为$S_n=2n^2-3n+1$，则它的通项公式为__________.

8. 在函数$f(x)=\sqrt{x}$中，令$x=1,2,3,\cdots$，可得一个数列，则这个数列的前五项为__________.

三、解答题

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项的和为$S_n=3n^2-2n$，求数列的通项公式.

10. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，且$a_na_{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2(n=2,3,\cdots)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

答案与提示

一、选择题

1. A（由$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2$可知，$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-1}=(n-1)^2$，

$\therefore a_n=\frac{n^2}{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-1}}=\frac{n^2}{(n-1)^2}$，$\therefore a_3=\frac{9}{4}$，$a_5=\frac{25}{16}$，$\therefore a_3+a_5=\frac{61}{16}$.）

2. D(当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=6$. 当 $n=2$ 时,$a_2=S_2-S_1$, ∴ $a_2=\left(\frac{3}{2}a_2-3\right)-a_1$,解得$a_2=18$. 将 $n=2$ 代入四个选项中通项公式,可否定 A、B、C.)

3. B(由 $a_n=n^2-2n+2\ 008$ 知,$a_{n+1}=(n+1)^2-3(n+1)+2\ 008=n^2+2\ 007$, ∴ $a_{n+1}-a_n=2n-1$.)

4. A(若$\frac{1}{10}$是这个数列的某一项,则必存在正整数 n,使得$\frac{2}{n^2+n}=\frac{1}{10}$,即此方程有正整数解. 解此方程得 $n=4$ 或 $n=-5$(舍去),所以$\frac{1}{10}$是这个数列的第 4 项.)

二、填空题

5. $a_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$.

6. $a_8=S_8-S_7=\frac{16-1}{8}-\frac{14-1}{7}=\frac{1}{56}$.

7. 运用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$来求. $a_1=S_1=2-3+1=0$. $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$, ∴ $a_n=2n^2-3n+1-[2(n-1)^2-3(n-1)+1]=4n-5$, ∴ $a_n=\begin{cases}0 & (n=1),\\ 4n-5 & (n\geqslant 2).\end{cases}$

8. $1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}$.

三、解答题

9. 当 $n\geqslant 2$ 时 ,$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-[3(n-1)^2-2(n-1)]$,即 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=6n-5$. 又∵ $a_1=S_1=1=6-5$,当$n=1$时,a_1 符合 $a_n=6n-5$ 的表达式,所以 $a_n=6n-5$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

10. 当 $n\geqslant 2$ 时,$a_na_{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^2$, ∴ $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$. 当 $n=1$ 时,$a_1=4$也符合,∴ $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

视野拓展

释疑解难

$a_n=f(n)$ 与 $y=f(x)$ 的相同点在哪儿?不同点又在哪儿?

对数列$\{a_n\}$的研究,一时一刻都离不开通项公式 $a_n=f(n)$. 由于 $n\in\mathbf{N}^*$,所以仅仅通过 $a_n=f(n)$去研究$\{a_n\}$的性质就必然存在一定的局限性. 如,已知 $a_n=\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+1$,$n\in\mathbf{N}^*$,问 n 取何值时,a_n 最小?此问题若回答为"当 $n=\frac{7}{2}$时,

a_n 最小.”答案就是错误的,原因是$\frac{7}{2}\notin\mathbf{N}^*$,因此,“$n=\frac{7}{2}$”是不可能的.设想建立 $a_n=\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+1$ 的对应函数 $y=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+1,x\in\mathbf{R}$,这时我们可以肯定地说:当 $x=\frac{7}{2}$时,y 最小!于是,我们可以更进一步地得到:当 $n=3$,或 $n=4$ 时,a_n 最小.诸如此类的例子,举不胜举.

以上分析客观地反映了数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=f(n)$与函数 $y=f(x)$的对应关系:

(1) 定义域的关系:$\{n|a_n=f(n),n\in\mathbf{N}^*\}\subsetneqq\{x|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$;

(2) 值域的关系:$\{a_n|a_n=f(n),n\in\mathbf{N}^*\}\subsetneqq\{y|y=f(x),x\in\mathbf{R}\}$;

(3) 对应法则的关系:相同,都是 f.

典型例题导析

[例 8]　给出下列数列的通项公式,n 取何值时,a_n 最小?

(1)$a_n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2+1$;(2)$a_n=\left(n-\frac{10}{3}\right)^2+1$;(3)$a_n=(n-11)^2+1$.

分析　通过建立 $a_n=f(n)$的对应函数 $y=f(x)$解答本题.读者请注意:这三道题代表三个类型,尤其要注意“$\frac{9}{2}$夹在 4 与 5 的正中间,$\frac{10}{3}$夹在 3 与 $3\frac{1}{2}$之间,11 本身就是正整数”对答案的影响.

解　(1)设 $a_n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2+1$ 的对应函数为 $y=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+1$,则

当 $x=\frac{9}{2}$时,y 最小.　$\frac{9}{2}$在 4 与 5 的正中间,所以有两个 n 使a_n 最小

如图 1-1(A),当 $n=4$,或 $n=5$ 时,a_n 最小.

(2)设 $a_n=\left(n-\frac{10}{3}\right)^2+1$ 的对应函数为 $y=\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+1$,则

当 $x=\frac{10}{3}$时,y 最小.　在所有的正整数中,3 距$\frac{10}{3}$最近,这时 n 唯一

如图 1-1(B),当 $n=3$ 时,a_n 最小.

(3)由已知 $a_n=(n-11)^2+1$,得

当 $n=11$ 时,a_n 最小.　因为 n 可以直接取到正整数,所以没有必要设 a_n 的对应函数

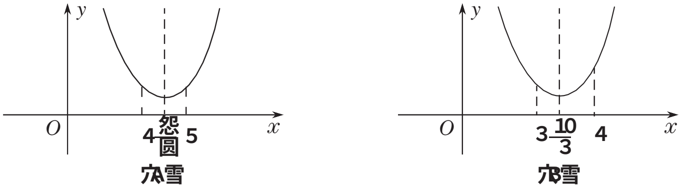


图 1-1

2. 累乘法、叠加法、递归(迭代)法概述

由数列$\{a_n\}$的递推公式 $a_n=f(a_{n-1})$可以写出 $n-1$ 个式子：

$$a_n=f(a_{n-1}),$$

$$a_{n-1}=f(a_{n-2}),$$

……　　这 $n-1$ 个式子相乘,或相加以后,其结果形式上都比较简单、明了

$$a_3=f(a_2),$$

$$a_2=f(a_1).$$

通过这 $n-1$ 个式子"相乘,相加,或层层代入"去求数列的通项公式的方法,依次称为累乘法、叠加法、递归(迭代)法.

读者了解累乘法、叠加法、递归法以后,若回头再读一遍例 2,可能另有一番品味.

思维拓展训练题

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-2n+2\ 009$,这个数列的前多少项的和最大?

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-2\ 008$,这个数列的前多少项的和最小?

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2^{n^2-2\,001n+2\,002}}$,这个数列的哪一项最大,其值是多少?

4. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}=2^n a_n$,且 $a_1=1$,求 a_n.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_2=\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{2}{a_n}(n=2,3,\cdots)$,求 a_n.

6. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=0$,且 $a_n=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+3)(n=2,3,\cdots)$,求 a_n.

7. 设 $a_1=1$,$b_1=0$,且 $3a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$,$3b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}(n\geqslant 2)$,求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

8. 在数列$\{a_n\}$中,设 $a_1=1$,x 的二次方程 $a_{n+1}x^2-(2a_{n+1}+a_n+2)x+2a_n+$

$4=0$有重根，求 a_n.

9. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，前 n 项的和为 S_n，且 $a_n=2S_{n-1}+2n-1(n\geqslant 2)$，求 a_n.

10. 数列$\{a_n\}$由“$a_1=1,4a_na_{n+1}=(a_n+a_{n+1}-1)^2,a_n>a_{n-1}$”定义，求 a_n.

答案与提示

1. 设 $a_n=-2n+2\ 009$ 的对应函数为 $y=-2x+2\ 009$，则①一次函数 $y=-2x+2\ 009$是 R 上的减函数；　②令 $y=0$，得 $x=1\ 004.5$. 由①和②知，数列$\{a_n\}$从第 1 005 项开始，各项的值都是负数，所以它的前 1 004 项的和最大.

2. 设 $a_n=2n-2\ 008$ 的对应函数为 $y=2x-2\ 008$，则 $y=2x-2\ 008$ 是 R 上的增函数，且 $y=0$ 时，$x=1\ 004$. 所以数列$\{a_n\}$的前 1 003 项，或前 1 004 项的和最小.

3. 设 $a_n=\dfrac{1}{2^{n^2-2\ 001n+2\ 002}}$的对应函数为 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$，$t=x^2-2\ 001x+2\ 002$，则①当 $x=-\dfrac{-2\ 001}{2\times 1}=1\ 000.5$ 时，二次函数 $t=x^2-2\ 001x+2\ 002$ 有最小值；②$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ 是 R 上的减函数. 由①和②知，当 $x=1\ 000.5$ 时，y 最大. 于是，当 $n=1\ 000$，或 $n=1\ 001$ 时，a_n 最大，且 a_n 的最大值为 $a_{1\ 000}=a_{1\ 001}=2^{998\ 998}$.

4. 由 $a_{n+1}=2^na_n,a_1=1$，得$\dfrac{a_2}{a_1}=2,\dfrac{a_3}{a_2}=2^2,\cdots,\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$. 将 $n-1$ 个式子相乘，得 $\dfrac{a_n}{a_1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，$\because a_1=1$，$\therefore a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5. 由 $a_1=1,a_2=\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{2}{a_n}$，得$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_{n-2}}=\cdots=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$. $\therefore a_n=\dfrac{2}{n+1}$.

6. $\because a_n=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+3)$，$\therefore a_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_{n-2}+3)$，两式相减，得 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}-a_{n-2})$，用累乘法得 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}(n\geqslant 2)$，再由叠加法，得 $a_n=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$a_n=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. 经验证，$n=1$ 也满足通项公式.

7. 已知两式相加，得 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$，$\therefore \{a_n+b_n\}$的通项为 $a_n+b_n=1$. 同理 $a_n-b_n=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1})$. $\{a_n-b_n\}$的通项为 $a_n-b_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$. 解方程组，得 $a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2\cdot 3^{n-1}}$，$b_n=\dfrac{3^{n-1}-1}{2\cdot 3^{n-1}}$. 经验证，$n=1$ 也满足通项公式.

8. 分解因式得$(x-2)[a_{n+1}x-(a_n+2)]=0$，$\because a_{n+1}\neq 0$，$\therefore x=2$ 或 $x=\dfrac{a_n+2}{a_{n+1}}$，$\because$ 方程

有重根，∴ $2=\frac{a_n+2}{a_{n+1}}$，整理得 $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$，用累乘法：$a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$，$a_{n-1}-2=\frac{1}{2}(a_{n-2}-2)$，…，$a_2-2=\frac{1}{2}(a_1-2)$，将 $n-1$ 个式子相乘，得 $a_n-2=\frac{1}{2^{n-1}}(a_1-2)$. ∵ $a_1=1$，∴ $a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

9. $n\geqslant 2$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 和已知条件得 $S_n-S_{n-1}=2S_{n-1}+2n-1$，即 $S_n=3S_{n-1}+2n-1$，两边相加 $n+1$ 得 $S_n+n+1=3(S_{n-1}+n)$，取 $n=2,3,\cdots,n$，相乘得 $S_n+n+1=3^n$. 即 $S_n=3^n-n-1$，于是 $a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n-1}-1$.（经验证，$n=1$ 时也满足通项）

10. 由递推公式得 $a_{n+1}^2-2(a_n+1)a_{n+1}+(a_n-1)^2=0$…①，用 $n-1$ 代替下标：$a_{n-1}^2-2(a_n+1)a_{n-1}+(a_n-1)^2=0$…②. 由①和②，知 a_{n+1} 和 a_{n-1} 是方程 $x^2-2(a_n+1)x+(a_n-1)^2=0$ 的两根，由韦达定理，得 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n+2$…③. 由③式得 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+2$，∴ $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的通项可用累加法求得 $a_{n+1}-a_n=2n+1$，再由叠加法，得 $a_n=n^2$.

1.2 数列的前 n 项的和

重点难点归纳

重点 ①数列的前 n 项的和与通项公式的关系. ②数列的前 n 项的和的求法.

难点 对用递推关系给出的数列的讨论.

本节需掌握的知识点 ①数列的前 n 项的和与通项公式的关系. ②领悟求数列的前 n 项的和的方法本质，掌握方法的一般规律.

知识点精析与应用

知识点精析

数列课题的知识载体是通项公式 a_n、前 n 项的和 S_n，可以说 a_n、S_n 贯穿于数列研究的全过程. 因此，全面地、系统地探讨 a_n、S_n 的求解方法显得格外重要.

1.1 节我们讨论了 a_n 的求解方法，本节介绍 S_n 的求解方法.

1. 求数列的前 n 项的和的方法

(1) 倒序相加法

即根据有些数列的特点，将 S_n 倒写后再与 S_n 相加，从而达到（化多为少）求

和的目的.

(2) 错位相减法

即将数列中的各项乘以一个适当的数(或式),然后错开一位相减,使数列中的一些项相互抵消或形成规律,最后得出数列的前 n 项的和.

(3) 裂项相消法

即将数列中的各项均分裂成两项的差,而后和式中的一些项相互抵消(多数情况下只剩下首末两项),以达到求和的目的. 此种方法的实施多从数列的通项公式的裂项入手.

2. a_n 与 S_n 的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$ 联系 a_n 与 S_n 的“桥梁”

应用 a_n 与 S_n 的这种关系求 a_n,步骤有三:①计算 a_1, $a_1=S_1$;②计算 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$;③检验 $a_1=S_1$ 是否适合 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$?是,$a_n=S_n-S_{n-1}$;否,$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2).\end{cases}$

解题方法指导

1. 运用倒序相加法求 S_n

[例 1] 记 $S_n=1+2+3+\cdots+n$,求 S_n.

分析 由正整数列的特点不难发现下面的规律:

$1+n=2+(n-1)=3+(n-2)=4+(n-3)=\cdots$.

解 $S_n=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$, 正序

$S_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$, 倒序

两式相加,得

$S_n+S_n=(1+n)+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+\cdots+[(n-1)+2]+(n+1)$.

$\therefore\ 2S_n=n\cdot(1+n)$, “正序+倒序”,即倒序相加法

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. 运用错位相减法求 S_n

[例 2] 求 $S_n=1+2+4+8+\cdots+2^n$.