

与高中新课程试验教材(修订本)同步

新高中课程

目标·素养·评价丛书

数学

高中新课程试验教材 目标·素养·评价丛书编写组 编



- 贯彻新高中教学大纲
- 体现新高中教材要求
- 全面推进素质教育
- 努力塑造四有新人

二年级·上学期

EOBOK.COM 游书网
www.eobook.com

江西教育出版社

第六章 不等式

一 不等式的性质

学 习 目 标

理解不等式的概念 援

理解现实世界中的量有相等关系,也有不等关系,不等关系可以用不等式表示,表示两个数量不等的符号有“ $\neq$ ”、“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\geq$ ”、“ $\leq$ ”理解在两实数 a, b 之间具有以下性质:若 $a > b$, 则 $a - b > 0$; 若 $a < b$, 则 $a - b < 0$; 若 $a = b$, 则 $a - b = 0$. 会用两个实数的大小与它们差的等价关系比较两实数的大小 援

理解不等式的性质及其证明 援

(1) 知道什么是同向不等式和异向不等式,理解不等式的反对称性:若 $a > b$, 则 $b < a$ 及其证明;理解不等式的传递性:若 $a > b$ 且 $b > c$, 则 $a > c$ 及其证明;理解不等式的加法保序性:若 $a > b$, $c > d$, 则 $a + c > b + d$ 及其证明;理解不等式的移项法则;

(2) 理解不等式乘正数的保序性,乘负数的反序性:

若 $a > b$ 且 $c > 0$, 则 $ac > bc$; 若 $a > b$ 且 $c < 0$, 则 $ac < bc$ 援

以及它们的推论的证明;理解两个正数的 n 次方根的保序性:若 $a > b > 0$, 则 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, 且 $\sqrt[n]{a} > 0$ 及其反证法证明;利用不等式的性质证明简单的不等式 援

掌握两正数的算术平均数与几何平均数的定理 援

(3) 会推导不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 并知道其中等号成立的条件;掌握不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的证明过程,并明确其中等号成立的条件;理解两正数的算术平均数与几何平均数的含义,会用语言叙述两正数的算术平均数与几何平均数的定理;知道两正数的算术平均数与几何平均数的定理的几何解释;

(4) 会用两正数的算术平均数与几何平均数的定理求解有关问题的最大值或最小值;会用两正数的算术平均数与几何平均数的定理证明有关的简单的不等式 援

本节重点是理解不等式的基本性质和掌握两正数的算术平均数与几何平均数的定理 援

本节难点是正确理解不等式的性质及其证明 援 正确利用算术平均数和几何平均数的定理求某些函数的最大值、最小值 援

数 学 素 养

两个实数的大小与它们差的等价关系是比较两个实数大小的理论依据,也是本章内

容的根本与基石 根据两实数的大小与它们差的等价关系, 要比较两个实数的大小, 只须考虑它们差的符号即可 一般步骤是: ①作差; ②变形(通常是配方或分解因式); ③判断(差大于零、等于零或小于零)援

不等式的性质是证明不等式和解不等式的理论基础, 是进行概念判断和比较大小的重要依据 对不等式的性质要在理解的基础上加以熟记, 可将不等式的性质同等式的相应的性质进行比照, 理解两者的相同点与不同点, 从而加深对不等式性质的理解与记忆 在理解不等式的性质和运用不等式的性质进行推理和论证时, 尤其要注意它们的条件援

两个正数的算术平均数与几何平均数定理是一个在理论和实际两方面都起重要作用的基本定理, 运用这个定理解题时, 必须注意:

(员) 尽管 $\sqrt{ab} \geq \sqrt[3]{abc}$ 是由 $\sqrt{ab} \geq \sqrt[3]{abc}$ 说胎过来, 但它们成立的条件是不同的: 前者要求 a, b 都是正数, 而后者只要求 a, b, c 都是实数 除此之外, 这两个不等式都是带等号的不等式, 因此对其中的“当且仅当……时取‘=’号”这句话的含义要理解清楚;

(圆) 利用定理求最大值或最小值是解决取值问题的常用之法, 但在具体解题过程中应注意以下三点: “一正”, 即两数均为正数; “二定”, 即两正数之和(或积)为定值; “三相等”, 即在两正数的取值范围内两正数可以相等 以上三点缺一不可, 否则容易产生失误;

(猿) 在运用定理解题时, 往往需要对所给问题进行适当的变形, 为利用定理创造必要的条件援

〔例题选讲〕

例 员 下列各命题是否成立? 若不成立, 则在不成立的命题中, 适当增加条件, 使它们成立援

(员) 如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$;

(圆) 如果 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, 那么 $a > c$;

(猿) 如果 $a > b$, $c > d$, 那么 $a + c > b + d$;

(源) 如果 $a > b$ 且 $a \neq c$, 那么 $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$ 援

分析 要判断上述命题是否成立, 需根据不等式的有关性质, 细心甄别真伪援
解 (员) 不成立 当 $a < 0$ 时就不成立, 要使命题成立只需加上条件 $a > 0$;

(圆) 成立 由于分母 $b, d > 0$, 故在不等式 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ 的两边同乘以 bd , 即得 $ad > bc$;

(猿) 不成立 当 $a < 0$ 时, 原命题不成立, 但 $a > 0$ 时, 原命题成立, 只需加上条件 $a > 0$ 或 $a > b > 0$ 或 $a > b > c > d > 0$ 即可援

(源) 不成立 当 $a > 0$ 且 $a \neq c$ 时, 原命题成立, 只需加上 $a > b > c$ 或 $a > c > b$ 援

点评 上述问题说明, 运用不等式的性质进行解题时, 应充分注意到不等式性质中的各种条件, 否则就极易发生错误 另外, 要说明一个不等式不成立, 只要能举出其中一个反例即可, 无需另加证明援

例 圆 (员) 已知 $a > b$, $c > d$, 且 $a + c > b + d$, 试指出 a, b, c, d 的大小关系;

(圆) 已知 a, b, c, d 是互不相等的正数, 其中 a 最大, 且 $a > b > c$, 比较 $a + d$ 与 $b + c$ 的大小援

分析 本题的两个小题均为比较两实数大小的问题,根据两实数的大小与它们的差的等价关系,即考察两实数的差便可援

解 (员)将已知等式变形后作差,有

$$\text{曾原赠越 曾原员(赠原员)}$$

①

$$\text{疫 曾跃员 赠跃员故由①知}$$

$$\text{曾原赠跃员即 曾跃赠援}$$

(圆)由 遭越葬得 遭越葬援

$$\text{令 } \frac{\text{遭}}{\text{葬}} \text{越噪则 } \text{遭越葬噪 葬越糟}$$

$$(\text{葬垣葬})\text{原 遭垣糟越葬垣糟原葬原葬原糟越 葬原糟 员原噪}$$

$$\text{疫 葬为最大,故知 园约噪约员原噪跃园}$$

$$\text{亦 } (\text{葬原糟 员原噪 跃园因而 葬垣葬跃遭垣糟援}$$

点评 对带有条件的实数大小的比较问题,常常需对条件进行适当变形后,再作差以确定实数的大小关系援

$$\text{例 猿 (员)已知 } \text{遭原葬} \geq \text{园,遭跃园证明 } \frac{\text{葬垣遭}}{\text{葬}} \leq \frac{\text{垣遭}}{\text{遭}},$$

(圆)若 葬跃遭跃园,葬约糟约园求证: $\frac{\sqrt{\text{葬}}}{\text{糟}} \geq \frac{\sqrt{\text{遭}}}{\text{遭援}}$

分析 上述两小题中的结论与已知间存在着较明显的差异,故应仔细分析这种差异,再利用相应的不等式的性质进行证明援

证明 (员)由已知可得,

$$\text{遭} \geq \text{葬 及 } \frac{\text{员}}{\text{遭}} \text{跃园}$$

将 $\frac{\text{员}}{\text{遭}}$ 乘以不等式 $\text{遭} \geq \text{葬}$ 两边,有

$$\frac{\text{糟}}{\text{遭}} \geq \frac{\text{葬}}{\text{遭}}, \text{再在此不等式两边加 员}$$

$$\text{有 } \frac{\text{糟垣员}}{\text{遭}} \geq \frac{\text{葬垣员}}{\text{遭}} \text{即}$$

$$\frac{\text{糟垣遭}}{\text{遭}} \geq \frac{\text{垣遭}}{\text{遭}},$$

$$\text{也即 } \frac{\text{葬垣遭}}{\text{葬}} \leq \frac{\text{垣遭}}{\text{遭援}}$$

$$(\text{圆)疫 葬跃遭跃园 } \sqrt{\text{葬}} \sqrt{\text{遭跃园}}$$

①

又 葬约糟约园则 原葬跃原糟跃园在其两边同乘以 $\frac{\text{员}}{\text{遭}} \text{跃园}$ 得

$$\frac{\text{原员跃原员}}{\text{原糟}} \text{跃}$$

②

①·② 得

$$\frac{\sqrt{\text{葬}}}{\text{糟}} \text{跃 } \frac{\sqrt{\text{遭}}}{\text{糟}},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{\text{葬}}}{\text{糟}} \geq \frac{\sqrt{\text{遭}}}{\text{糟援}}$$

例 源 (员已知 曾跃园,赠跃园,且 猿曾垣圆赠越元,求 遭曾垣圆赠 的最大值及相应的 曾,赠的值 援
(圆求函数

贈越曾垣普垣(普跃原员)

分析 从表面上看,上述两题的求最大值或最小值似乎与两正数的算术平均数与几何平均数定理(以下简称为平均值不等式)关系不大,但只要我们对问题给出的式子经过适当的变形,便可利用平均值不等式进行求解.

亦 曾越員猿源 ≤ 員猿源 曾越員猿源

$$\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{2} \right)^j \| \leq \| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \|$$

当且仅当 $\begin{cases} \text{曾沃园赠沃园} \\ \text{猿普垣赠普垣} \\ \text{猿普成赠援} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \text{普沃园} \\ \text{赠猿援} \\ \text{猿普成} \end{cases}$

(圓)疫 曾跃原员,曾垣跃园,

亦 贈越 曾垣 普垣 普垣 (普垣) 垣緣 普垣 垣原
普垣 普垣

$$\text{越 曾(同) 垣} \frac{\text{源}}{\text{曾(同)}} \text{垣} \geq \sqrt{(\text{曾(同)} \cdot \frac{\text{源}}{\text{曾(同)}} \text{垣} \text{越 怨})}$$

故 $\frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最小值 $\frac{1}{4}$

单元评价

10. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha \neq 0$, 则下面结论正确的是()

(月)原普跃^圆跃原普^圆跃普

(阅)曾跃原曾跃曾跃原曾

(粵)葬^{ㄘㄨㄥˋ}躍^{ㄩㄝˋ}遭^{ㄘㄠ}

(月)遭葬亘遭跃糟葬亘遭

(阅)糟葬亘遭跃葬遭亘糟

源

獾已知 葬,遭,糟 ∈ 砸,则下列命题 :① 若 葬跃遭,则一定存在实数 皂,使得 葬跃皂跃遭②
 若 葬跃遭跃园,则 糟原葬约糟垣遭③ 若 葬跃遭,糟约凿,则 $\frac{\text{葬}}{\text{糟}} \geq \frac{\text{遭}}{\text{凿}}$;④ 若 葬跃遭,遭查则 葬跃遭 ∈
 晕垣)揆中正确的是()援

- (粤)①、②、③ (月)②、③、④
 (悦)①、③、④ (阅)①、②、④

漚若 葬跃遭跃园,则 $\frac{\text{遭原糟}}{\text{葬}}$ 与 $\frac{\text{葬原糟}}{\text{遭}}$ 中较大的是_____援

纛已知 原员约曾约赠跃园,则下列命题 :① $\frac{\text{员}}{\text{曾}} \geq \frac{\text{员}}{\text{赠}}$ 约赠约曾;② $\frac{\text{员}}{\text{赠}} \geq \frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 约曾约赠;③ $\frac{\text{员}}{\text{曾}} \geq \frac{\text{员}}{\text{赠}}$
 约曾约赠;④ $\frac{\text{员}}{\text{赠}} \geq \frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 约赠约曾中,正确命题的序号是_____援

远设 葬 ∈ 砸,则 葬跃遭 葬跃遭 同时成立的充要条件是_____援

施设 曾,赠为实数,试比较 曾原曾赠与 曾赠原赠的大小援
 愿适当增加条件,使下列各命题成立援

- (员)如果 葬跃遭,那么 葬 ≤ _____; (圆)如果 葬跃遭,糟跃凿,那么 葬跃遭;
 (猿)如果 葬跃遭,那么 $\frac{\text{员}}{\text{葬}} \geq \frac{\text{员}}{\text{遭}}$; (源)如果 葬约凿约糟,那么 葬 葬原糟 跃遭 遭原糟援

纛用不等式的性质证明:

若 葬跃遭跃园, 园跃糟跃凿,则 $\frac{\text{葬}}{\text{葬跃遭}} \geq \frac{\text{遭}}{\text{葬跃遭}}$ 援

员设 葬,遭,糟 ∈ 砸,且① 凿跃糟② 葬垣遭越糟垣凿③ 葬垣凿约遭垣糟,试比较 葬,遭,糟 凿的
 大小援

〔同步练习 圆〕

员设 $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{葬遭}} \geq \sqrt{\frac{\text{葬}}{\text{遭}}}$ 是 葬跃遭 跃园的()援

- (粤)充分而不必要条件 (月)必要而不充分条件
 (悦)充要条件 (阅)既不充分也不必要条件

圆已知 葬,遭为不小于 员的正数且 $\frac{\text{葬}}{\text{遭}} \neq 1$,则 $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$, 葬, $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$, $\sqrt{\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}}$ 中最大的是()援

- (粤) $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$ (月)葬 (悦) $\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}$ (阅) $\sqrt{\frac{\text{葬垣遭}}{\text{圆}}}$

猿在下列函数中,最小值为 圆的一个是()援

- (粤)赠越 $\frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\text{赠}}$ (圆)约曾约 $\frac{\pi}{\text{圆}}$ (月)赠越 $\frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\text{赠}}$ (圆)约曾约 $\frac{\pi}{\text{圆}}$
 (悦)赠越 $\frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\text{赠}}$ (曾跃园) (阅)赠越 $\frac{\text{曾垣猿}}{\sqrt{\text{曾垣圆}}}$

漚已知 曾跃员,枣曾越 $\frac{\text{圆原曾}}{\text{曾原员}}$ 的最小值为_____援

纛设 园约曾约 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}$,则 枣曾越 $\sqrt{\frac{\text{曾}}{\text{曾原圆}}}$ 的最大值是_____援

远设 葬跃园,遭跃园,葬垣遭跃园,则 葬赠的最大值为_____援

施试求函数 枣曾越 $\frac{\text{员}}{\text{曾}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\text{曾}}$ ≠ 园的值域援

例 设 a, b 为实数, 求证: $|a+b| \leq |a| + |b|$ 与 $|a-b| \leq |a| + |b|$ 的大小关系. 援
 例 已知 a, b 为正实数, 且 $a+b=1$, 试求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值. 援
 例 据铁道部通知, 从 2008 年 7 月 1 日起, 我国列车运行再次提速, 而列车提速需要考虑成本问题. 若列车运行 t 小时所需成本由两部分组成: 固定成本 a 元, 可变成本与运行速度 v (千米/小时) 的平方成正比, 其比例系数为 k . 当列车匀速从甲站行驶到乙站时, 为使成本最小, 问应以多大速度行驶?

二 不等式的证明

学习目标

- 1. 掌握用比较法证明简单的不等式. 援
- 2. (1) 理解用比较法(只限比差法)证明不等式的原理和思路, 通过例习题, 认识并掌握不等式最重要最基本的一种证明方法, 即比较法; 熟练掌握用比较法证明不等式的三个步骤: 作差、变形、判断符号; 援
- 3. (2) 进一步熟练掌握用比较法证明简单的不等式的方法与步骤. 援
- 4. 掌握用综合法证明简单的不等式. 援
- 5. 理解用综合法证明不等式的原理和思路, 熟练地掌握已学过的基本的不等式并运用这些不等式来证明新的简单的不等式. 援
- 6. 掌握用分析法证明简单的不等式. 援
- 7. 理解用分析法证明不等式的原理和思路, 能举例说明用分析法证明不等式的过程, 理解分析法的实质就是执果索因的方法, 熟练掌握分析法证明简单不等式的方法与步骤. 援
- 8. 通过练习, 熟练地掌握比较法、综合法、分析法等证明方法, 做到对这三种方法能运用自如, 从而进一步提高分析与推证的能力. 援
- 9. 本节重点是用比较法、综合法、分析法证明不等式. 援
- 10. 本节难点是准确地把握用恰当的方法证明一个简单的不等式. 援

数学素养

- 1. 证明不等式的方法有很多种, 但比较法、综合法、分析法是证明不等式最基本、最常用的三种方法. 援
- 2. 对比较法的认识和理解, 应基于以下几个方面: 援
- 3. (1) 比较法是不等式的各种方法中最基本、最重要的方法, 比较法的基本思路是利用不等式两边的差是正数或负数来证明不等式, 因而其应用显得非常广泛, 如在这之前, 比较两个实数的大小, 证明不等式的性质等, 都使用过这种方法. 因此, 要求熟练掌握比较法; 援
- 4. (2) 用比较法证明不等式的步骤是: 作差、变形、判断符号. 其中的变形是最关键的一步, 因为不等式两边的差的符号是正或负, 一般必须经过变形后才能见分晓. 变形的目的全在于判断差的符号, 而不必考虑差的值是多少. 至于如何变形, 常用的方法有配方法(将差式配成

完全平方)或因式分解法(将差式分解成易判断符号的因式)当然也可使用其他一些行之有效的方法。总之,能够判断出差的符号是正是负即可;

(獭用比较法证明不等式的步骤中,作差是依据,变形是手段,判断符号才是最终目的.援 圆对综合法的认识和理解,应注意以下几点:

(员证明不等式也可根据不等式的性质和已经证明过的不等式来进行,这种证明不等式的方法叫做综合法.使用综合法证明不等式的基本思路是:找一个基本不等式或已知结论作为出发点,进行不等式的变形,最后推导出要证明的结论;

(圆)用综合法证明不等式的逻辑关系是：

粵輪月_月輪月_月輪...輪月_月輪月

(已知) 逐步推演不等式成立的必要条件 (结论)

由此可见,综合法是“由因导果”,即由已知条件出发,推导出所要证明的不等式成立;

(猿)运用不等式的性质和已经证明过的不等式时,要注意它们各自成立的条件,这样才能使推理正确,结论无误.对附加了条件的不等式的证明应特别注意条件的应用;

(源先利用基本不等式(如 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, $\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$ 等), 然后利用不等式的性质是综合法中常用的方法 援

对分析法的认识和理解,应注意下列几点:

(员)对于一些用比较法、综合法难以证明的不等式,往往可考虑用分析法证明.使用分析法证明不等式的基本思路是:从要证的不等式出发,分析使这个不等式成立的条件,把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题,如果能够肯定这些条件都已具备,那么就可以断定原不等式成立;

(圆)用分析法论证“若 粤则 月”这个命题的模式是：

为了证明命题 φ 为真，

这只需证明命题 μ_1 为真,从而有.....

这只需证明命题 $\text{月}_{\text{圆}}$ 为真,从而又有

• • • • •

这只需证明命题 粤为真 援

而已知 粵为真 故 月必真；

(猿)用分析法证明不等式的逻辑关系是：

月_𠂔月_𠂔月_𠂔...月_𠂔月_𠂔粵

(结论) $\rightarrow$ 步步寻求不等式成立的充分条件 $\rightarrow$ (已知)

由此可见分析法是“执果索因”，它与综合法是对立统一的两种方法；

(源在有些情况下,也可以首先假定所要证明的不等式成立,逐步推出一个已知成立的不等式,只要推证过程中的每一步都是可以逆推的,那么就可以断定所给的不等式成立)这也是用分析法证明不等式.注意应强调“以上每一步都可逆”;

(缘对初学者来说,不易理解分析法的本质是从结论分析出使结论成立的“充分”条件,不易正确使用连接有关步骤的关键词“为了证明”“只需证明”“即”以及“假定……成立”“以上每步都可逆”等,其原因在于对分析法的原理认识不透彻,应当在学习中引起注意,援

愿

例 1 已知 α, β 是互不相等的正数, $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 求证 $\sin \alpha \sin \beta < \frac{1}{2}$.

分析 根据问题结论中左右两边式子的特征,下面我们采用比较法对问题给予证明 援

越葬^原遭^原葬^原遭^原

疫 葬,遭为 正实数,且 $\neq$,灶, $\in$ 晕_日,且 灶跃噪

亦 当 葬跃遭时,葬跃遭,葬^{原噪}跃遭^{原噪}援

即 葬^噪原遭^噪跃园,葬^噪原遭^噪跃园爰

(葬^原遭^原)葬^原遭^原跃园

仿上有,当葬尔遭时,葬原遭约园葬原噪原遭原噪原遭约园故有

(葬^葬原遭^葬)葬^葬原遭^葬原遭^葬跃园媛

综上可知,葬垣遭跃葬^杜遭垣葬^杜遭垣葬^杜援

点评 一般地,应用比较法证明不等式,可分为作差比较法和作商比较法两种.根据教材要求,只要掌握作差比较法,其基本步骤是“作差—变形—判断差式的正负”.如果差式是几个因式相乘的形式,往往要分不同的情形予以讨论.另外,本题可看作是教材中例 1 的一种推广形式.

例 圆 (员已知 葬遭 ∈ 砸,且 葬垣遭垣糟 ∈ 求 证 葬垣遭垣糟 ≥ 员;猿

(圆)已知葬遭糟为不相等的正数,且葬遭糟,求证 $\sqrt{\frac{葬}{遭}}$ $\sqrt{\frac{遭}{糟}}$ $\sqrt{\frac{糟}{葬}}$ 援

分析 对于(员),不等式的左右两端有次数上的差异,为此可将已知条件升次变为(葬垣遭)圆越员;对于(圆),不等式左右两端有分式与根式上的差异,因此可利用已知条件葬遭

越员将 $\sqrt{\text{葬}} \sqrt{\text{遭}} \sqrt{\text{糟}}$ 变形为 $\sqrt{\frac{\text{员}}{\text{遭}}}$ 垣 $\sqrt{\frac{\text{员}}{\text{糟}}}$ 垣 $\sqrt{\frac{\text{员}}{\text{葬}}}$ 或将 $\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{葬}}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{遭}}}$ 垣 $\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{糟}}}$ 变形为 $\frac{\text{遭}}{\sqrt{\text{遭}}}$ 垣 $\frac{\text{糟}}{\sqrt{\text{糟}}}$ 垣 $\frac{\text{葬}}{\sqrt{\text{葬}}}$ 爱

(员证明 疫 葬亘遭亘糟越员

亦（葬亘遭亘糟^圆越员

葬垣遭垣糟 越^員_猿猿葬垣遭垣糟)

越^員猜^葬垣^遭垣^槽垣^葬垣^遭)垣^遭垣^槽)垣^槽垣^葬]

≥ 员猜葬垣遭垣糟垣员葬垣遭垣员糟垣员葬

越^員猿葬亘遭亘糟^圓越^員猿援

即 葬垣遭垣糟 $\geq$ 员猿

(圆证法一 疫 葬,遭糟为不相等的正数,且 葬葬成员,

$\sqrt{\text{葬}} \sqrt{\text{遭}} \sqrt{\text{糟}} \sqrt{\frac{\text{员}}{\text{遭}}} \sqrt{\frac{\text{员}}{\text{壕}}} \sqrt{\frac{\text{员}}{\text{葬}}}$
 $\frac{\text{员}}{\text{遭}} \frac{\text{员}}{\text{壕}} \frac{\text{员}}{\text{糟}} \frac{\text{员}}{\text{壕}} \frac{\text{员}}{\text{葬}} \frac{\text{员}}{\text{壕}} \frac{\text{员}}{\text{遭}}$
 约 圆 壕 圆 壕 圆

$$\text{即 } \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{c}} \sqrt{\frac{c}{a}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

证法二 设 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 为不相等的正数, 且 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$

$$\text{亦 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$$

$$\text{越 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$$

$$\text{跃 } \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{c}} \sqrt{\frac{c}{a}} \geq \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{c}} \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\text{即 } \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{c}} \sqrt{\frac{c}{a}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

点评 利用综合法由因导果证明不等式, 就是要揭示出条件与结论之间的因果关系, 为此要着力分析已知与求证之间的差异和联系, 不等式左右两端的差异和联系. 本题是两个条件不等式的证明问题, 分别给出 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ 和 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ 两个特定的条件, 在分析所证不等式左右两端的差异后, 合理应用已知条件, 进行有效的转换就是证明不等式的关键所在.

例 猿 用分析法证明:

$$(\text{员求证 } (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})$$

$$(\text{圆若 } a, b, c \text{ 为正实数, 且 } a^2 + b^2 + c^2 = 1, \text{ 求证: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2})$$

分析 本题中的(员)是一个三角不等式, 应注意在证明过程中运用三角中有关公式; 对于(圆)是一个附加了条件的不等式证明问题, 应恰当使用所给条件.

证明 (员)为了证明

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\text{只需证明 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\text{即 } (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\text{亦即 } (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\text{只需证明 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

$$\text{只需证明 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 1,$$

$$\text{亦即 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 1$$

根据三角函数的有界性, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq 1$ 成立, 故原不等式成立.

(圆)由于 a, b, c 为正实数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 因此, 要证 $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ 成立, 只需证明

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{简 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 1$$

$$\text{简 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\text{简 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{简 } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{简 } (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

而最后的不等式显然成立,故原不等式成立,即 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

点评 用分析法证明不等式,要从需证的不等式出发,追溯使这个不等式成立的充分条件,直到得出已知条件或已知的不等式为止.要注意“要证明...”,只需证明...”,即“等的语言的正确叙述.有时也可用符号“ $\Leftarrow$ ”代替,有时若寻找的是充要条件,就可以用“ $\Leftrightarrow$ ”代替.总之,不管用哪一种形式叙述证题过程,关键在于正确理解分析法的基本原理和证题思路,否则就容易犯证明的是逆命题的逻辑错误.

例 1 设 n 是正整数,求证

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

(设 a, b 为正实数,求证

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

分析 上述两个不等式的证明入口处较宽,我们可较灵活地运用比较法,综合法,分析法等来进行证明.

证明 (1) 要证 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq 1$$

亦要证明 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

只需证明 $\frac{a}{b} \leq 1$

只需证明 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

而 $(\sqrt[n]{a})^n \leq (\sqrt[n]{b})^n$

$$a \leq b$$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

故 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

所以,原不等式成立.

(2) 要证原不等式成立,

只需证 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

即证 $(\sqrt[n]{a})^n \leq (\sqrt[n]{b})^n$

又由于 $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$$

①

① ②有 $(\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}) \Rightarrow (\frac{a}{c} \geq \frac{b}{d})$

故知,原不等式成立

点评 在(员)中,采用了分析法与比较法相结合的证明方法,这种方法有较强的灵活性,援在证题中,较灵活地采取了分子理化这种变形技巧,这是根据需要而使用的,并且它是建立在对初中数学有较熟练的基本功的基础上的.援对于(圆),是分析法与综合法、比较法联合使用,开始用分析法得出“只需证”的不等式,从而得到使原结论成立的充分条件,再用综合法、比较法证明这个“只需证”的不等式(或充分条件).援

从证题方法来说,单一使用某种方法是较容易的,如果像本题几种方法交叉使用,相对来说就较难些,但这是提高证题能力的一个重要方面,在平时的练习中,应有意识地加以训练.援外,我们也常用分析法探索证明的途径,然后用综合法的形式写出证明过程,这是解决数学问题的一种重要的思想方法.援

单元评价

〔同步练习〕

题设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq b$, 则 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$ 的充分而不必要条件是()

(粤) $a > b$ (月) $a < b$ (悦) $a \geq b$ (阅) $a \leq b$

题某同学在证明不等式: $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 1$ 时,采用了分析法证明,过程如下:

证明 若 $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 1$
 $\neq$
 $\geq$
 $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 1$ 两边平方得
 $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 1$ 再平方得,即有

③

题此不等式显然成立

故原不等式成立

上述证法中,标号处不符合分析法语言的是()

(粤)①、② (月)② (悦)①、② (阅)①、②、③

题设 a, b 为正实数且 $a \neq b$, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$ 则必有()

(粤) $\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a+b}{2}$ (月) $\frac{a^2+b^2}{2} < \frac{a+b}{2}$

(悦) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$ (阅) $\frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a+b}{2}$

题已知 $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{d}$ 的大小关系是_____

题设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq b$, 则 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 的最小值为_____

题设 $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$, 则 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小关系是_____

题已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, 试证 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a+b}{2}$

题已知 a, b, c 是不全相等的正数, 求证 $\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} > a^2 + b^2 + c^2$

用分析法证明：
 设 a 为正实数，求证

$$\sqrt{\frac{a}{a^2 + 1}} \geq \frac{a}{a^2 + 1}$$

证明：对于相同距离的水路，船在流动的水中来回行驶一次的时间比船在静水中来回行驶一次的时间要长（已知船在流水中的速度和船在静水中的速度保持一致）援
 [小测验二]

已知 a, b 为正实数，则不等式 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ () 援

(粤) 当 $a=b$ 时成立 (月) 当 $a \neq b$ 时成立

(悦) 是否成立与 a 有关 (阅) 一定成立

若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq b$ ，则下列不等式中恒成立的有 () 个

- ① $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ② $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$ ③ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ④ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$

(粤) 原 (月) 猿 (悦) 圆 (阅) 员

设 $x > 0$ ，则 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ 的大小关系是 () 援

(粤) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ (月) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

(悦) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ (阅) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

已知 $x > 0$ ，则 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 中最大的一个是 () 援

(粤) 葬 (月) 遭 (悦) 糟 (阅) 不确定

息 灶 是正整数， $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ，则 z 的取值范围是 () 援

(粤) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$ (月) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ (悦) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ (阅) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$

设 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 与 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的大小关系是 _____ 援

设 $x > 0$ ，则 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ 的大小关系是 _____ 援

已知实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ，则求得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____ 援

已知 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 与 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的大小关系为 _____ 援

如果 a, b 为正实数，且 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$ ，对下列不等式：

- ① $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；② $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；③ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；④ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑤ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑥ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑦ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑧ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑨ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑩ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑪ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑫ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑬ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑭ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑮ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑯ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑰ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑱ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；⑲ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；⑳ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉑ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉒ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉓ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉔ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉕ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉖ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉗ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉘ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉙ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉚ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉛ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉜ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉝ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㉞ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㉟ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊱ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊲ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊳ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊴ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊵ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊶ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊷ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊸ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊹ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊺ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊻ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊼ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊽ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；㊾ $\frac{a}{b} \geq \frac{b}{a}$ ；㊿ $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ ；

其中一定正确的不等式的序号是 _____ (填上你认为正确的所有不等式的序号) 援

证明：如果 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，那么 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ 援

设 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，求证

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

曾, 赠 是不全相等的正数，求证 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ 援

用分析法证明：

已知 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ 求证

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right) > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} > 0$$

已知 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ，求证 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$ ，试比较 $\frac{a}{b}$ 、 $\frac{c}{d}$ 的大小 援

三 不等式的解法与含绝对值不等式

学 习 目 标

掌握含绝对值不等式、简单的分式不等式与高次不等式的解法 援

(熟练掌握 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 与 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 型不等式的解法 , 并用集合表示结果 , 能熟练地解形如 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 及 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 的不等式 ;

(能熟练地将分式不等式转化为整式不等式组 , 正确地求出分式不等式的解集 ;

(会用积的符号法则与列表法求解高次不等式 ;

(掌握简单的含二次根式的不等式的解法 , 理解简单的含二次根式的不等式的解法的原理和思路 , 掌握简单的含二次根式的不等式的解法的具体步骤 , 并用集合表示结果 援

理解解含有绝对值的不等式的性质定理 援

(理解含有绝对值不等式的性质定理 : $-\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ 以及它的两个推论的证明过程 ;

(进一步理解含有绝对值不等式的定理与推论 , 并会正确使用定理与推论解决简单的相关不等式问题 援

本节重点是解含绝对值的不等式、简单的分式不等式、高次不等式以及简单的含二次根式的不等式 援

本节难点是确定合理的解不等式的步骤以及对不等式 $-\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ 的理解与记忆 援

数 学 素 养

要正确熟练地对已学过的三类不等式进行求解 援 熟练掌握一元一次不等式 , 一元二次不等式以及简单的绝对值不等式的解法 , 这是学好本节内容的基础和前提 援

解绝对值不等式的基本思想是 : 根据绝对值的概念将它转化成为已知类型的不等式或不等式组 援

解分式不等式、高次不等式的基本思想是 : 根据商与积的符号法则将它转化成为已知类型的不等式或不等式组 援

解含根式的不等式的基本思想是 : 根据不等式的性质及根式的性质将它转化成为不含根式的已知类型的不等式或不等式组 援

上述几类不等式的一般形式和解法汇总列表如下 :

原

一般形式		解法或解的表示
绝对值不等式	$\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ (其中 $a, b \geq 0$)	转化为 $\sqrt{a} \leq x$ 或 $\sqrt{b} \geq x$
	$\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ (其中 $a, b \geq 0$)	转化为 $\sqrt{a} \leq x$ 或 $\sqrt{b} \geq x$
	$\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ (其中 $a, b \geq 0$)	转化为 $\sqrt{a} \leq x$ 或 $\sqrt{b} \geq x$
	$\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ (其中 $a, b \geq 0$)	转化为 $\sqrt{a} \leq x$ 或 $\sqrt{b} \geq x$
分式不等式	$\frac{x-a}{x-b} \geq 0$ (其中 a, b 为实数)	转化为 $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ x-b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-a \leq 0 \\ x-b < 0 \end{cases}$ 或用区间分析法
	$\frac{x-a}{x-b} \leq 0$ (其中 a, b 为实数)	转化为 $\begin{cases} x-a \geq 0 \\ x-b < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-a \leq 0 \\ x-b > 0 \end{cases}$ 或用列表分析法
*含一次根式的不等式	$\sqrt{x-a} \geq b$	$\sqrt{x-a} \geq b$ 转化为 $\begin{cases} x-a \geq b^2 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$
		$\sqrt{x-a} \geq b$ 转化为 $\begin{cases} x-a \geq b^2 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$
		$\sqrt{x-a} \geq b$ 转化为 $\begin{cases} x-a \geq b^2 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$
	$\sqrt{x-a} \leq b$	$\sqrt{x-a} \leq b$ 转化为 $\begin{cases} x-a \leq b^2 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$
		$\sqrt{x-a} \leq b$ 转化为 $\begin{cases} x-a \leq b^2 \\ x-a \geq 0 \end{cases}$
	$\sqrt{x-a} \leq \sqrt{x-b}$	转化为 $\begin{cases} x-a \leq x-b \\ x-a \geq 0 \\ x-b \geq 0 \end{cases}$

在解各种类型的不等式中,充分体现了转化与化归的数学思想方法,即将要解的不等式转化为解已知类型的不等式来解.另外,不等式与函数、方程都有密切的联系,通过解不等式,可以对三者之间建立起统一的认识.通过解不等式,还可以对数形结合这一基本的数学思想的作用有更深入的理解.

对于不等式 $\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ (其中 $a, b \geq 0$), 前一个等号成立的条件是 $\sqrt{a} \leq x$, 且 $\sqrt{b} \geq x$. 后一个等号成立的条件是 $\sqrt{b} \geq x$. 它不但可用于某些不等式的证明, 还可把 $\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{b}$ 推广到两个向量甚至以后将要学到的复数当中. 对这个不等式的一个几何解释是: 三角形任何一边小于其他两边之和, 而大于其他两边之差.

[例题选讲]

例 1 解不等式

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$$

分析 这是一个分式不等式, 但右边不为零, 故应采取移项整理后, 使不等式右边变成零, 再利用符号法则将不等式转化成不等式组来解.

解法一 将原不等式变形, 得

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} - 0 \geq 0$$

$$\frac{\text{猿原猿}}{(\text{猿原猿})(\text{猿原猿})} \text{约圆}$$

进一步将上述不等式转化为下列不等式组

$$(\text{员}) \begin{cases} \text{猿原猿} \text{约圆} \\ (\text{猿原猿})(\text{猿原猿}) \text{约圆} \end{cases} \text{ 或 } (\text{圆}) \begin{cases} \text{猿原猿} \text{约圆} \\ (\text{猿原猿})(\text{猿原猿}) \text{约圆} \end{cases}$$

解(员)得 猿约猿源解(圆)得 猿约猿源

所以原不等式的解为 猿约猿或 猿约猿源

解法二 把分子分母各因式的根按从小到大的顺序排列,可得下表:

因式 \ 各因式的值的符号 \ 根	猿	猿	猿	猿
猿原猿	原	垣	垣	垣
猿原猿	原	原	垣	垣
猿原猿	原	原	原	垣
$\frac{\text{猿原猿}}{(\text{猿原猿})(\text{猿原猿})}$	原	垣	原	垣

由上表可知,原不等式的解集是

$$\{ \text{猿约猿}, \text{或 } \text{猿约猿源} \}$$

点评 解分式不等式时,应避免采用解分式方程所用的去分母的变换,这是因为分母在未判定其符号时,不等式两边同乘以分母会导致错误,而且当分母的值可能取零时,两边同乘以分母会扩大允许值的范围,造成不等价变换

例 圆 (员)解不等式 $\frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}}$; (圆)解不等式 $\frac{\text{猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}}$

分析 对于(员),应注意到 $\frac{\text{猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \in \mathbb{R}$,不必分 $\frac{\text{猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} > 0$, $\frac{\text{猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} < 0$ 讨论,对于(圆),可视 $\sqrt{\text{垣猿}}$ 为一个整体,得到关于 $\sqrt{\text{垣猿}}$ 的范围后,再进行求解

解 (员) $\frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \leq 0$ 原 $\leq \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \leq$

$$\text{猿} \begin{cases} \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \leq 0, \\ \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} > 0 \end{cases}$$

$$\text{猿} \begin{cases} (\frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \leq 0, \\ (\frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} > 0) \end{cases}$$

$$\text{猿} \begin{cases} \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \leq 0, \\ \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} > 0 \end{cases}$$

$$\text{猿} \begin{cases} \text{原} \leq \text{源} \\ \leq \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \text{ 或 } \geq \frac{\text{猿原猿}}{\sqrt{\text{垣猿}} \sqrt{\text{垣猿}}} \end{cases}$$