高中数学竞赛解题方法研究

冷岗松 著

清华大学出版社

内　容　简　介

本书是作者多年组织数学竞赛辅导中积累的经验总结,对中学生解竞赛题的思维方式、解题方法及技巧作了详细的讲解,并用大量典型例题的分析,侧重讲述解数学竞赛题的思维活动过程。书中讲述了大量国内外典型竞赛题的解法,可使高中学生从中学习如何解竞赛题,提高解题的能力。

此书可作为高中数学竞赛的辅导教材,也可供各中学数学教师、师范院校师生及数学竞赛的辅导员参考。

(京)新登字 158 号

高中数学竞赛解题方法研究

冷　岗　松　著

责任编辑　尹芳平

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/32　印张: 12　字数: 257 千字

1993 年 10 月第一版　1993 年 10 月第 1 次印刷

印数: 00001—10000

ISBN 7-302-01323-3/O·145

定价: 8.50 元

前　　言

奥林匹克数学是以竞赛为标记，以"问题和解"为形式的数学，是将现代数学的深刻思想与初等数学的精妙技巧相结合的"中间数学"，是一种富有教育功能的"有用数学"，是富有挑战性的"活数学"。因此，奥林匹克数学空前繁荣。数学奥林匹克活动正在广大的范围内深入地发展。

面对成千上万、千姿百态的数学竞赛试题，"怎样解题"一直是广大中学师生最为关心的问题。本书有别于以内容划分专题的各类竞赛教程，通过大量实例的分析，侧重讲述解数学竞赛题的思维活动过程。

全书共分四章。第 1 章阐述解数学竞赛题的思维方式；第 2 章论及数学竞赛中的基本解题方法；第 3 章总结了解答各类典型问题的方法和技巧；篇幅较短的第 4 章主要适用于教练员和教师，提出了数学竞赛的若干命题策略。全书适合广大高中师生，师范院校数学系学生阅读。

本书是作者在数学竞赛的教练和教学工作中发展起来的，并从众多的竞赛书刊中吸收了大量营养。但囿于作者的学识和水平，书中的错漏之处在所难免，祈盼读者不吝指正，以便有机会再版时修改。

张硂教授审阅了全书并提出了宝贵的修改意见，在此致谢。

冷岗松

1993 年 3 月于长沙

目　　录

第 1 章　数学竞赛中的解题思维方式

数学问题的形式千变万化,结构错综复杂,特别是一些难度较大的国内外竞赛题,不仅题目新颖,知识覆盖面大,而且背景深刻,技巧性强,个别问题的解,独到别致。因此,与解常规数学题(被简单化和舞台化了)相比,解竞赛题要求解题者有良好的数学素质,即不仅要掌握一些必备的基础知识,而且要求有正确的解题思维方式。本章介绍数学竞赛中一些常用的解题思维方式,并通过若干典型例题的分析和讨论加以具体说明。

1.1　观察特征

观察问题的特征,抓住与解题有关的种种信息(有些还是十分隐蔽的信息),是解题获得成功的首要条件。

所谓观察特征,就是要运用已有的知识和经验,对问题的条件和结论的外形结构特点,数值特点,差异特点,图形的形状、位置特点等等,进行仔细的观察、分析和联想。

[**例** 1-1]　**设** $25\cos A+5\sin B+\operatorname{tg} C=0$, $\sin^2 B-4\cos A\cdot\operatorname{tg} C=0$, **求证**: $\operatorname{tg} C=25\cos A$。

分析: 第二个已知等式左边的外形结构与一元二次方程的判别式相似,由此我们考虑方程 $x^2\cos A+x\sin B+\operatorname{tg} C=0$。

这个方程有什么特点呢?对照条件观察易知它有相等的实根,且 5 是它的一个根。到了这里,解题的思路就十分清楚了。

证明: 当 $\cos A=0$ 时,易知 $\operatorname{tg}C=0$,命题成立。

当 $\cos A\neq 0$ 时,考虑一元二次方程

$$x^2\cos A+x\sin B+\operatorname{tg}C=0 \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

由第一个条件知 $x=5$ 是方程(1-1-1)的根。由第二个条件知方程(1-1-1)有相等的实数根,于是 $x_1x_2=25$,又由韦达定理知 $x_1x_2=\dfrac{\operatorname{tg}C}{\cos A}$,故得 $\operatorname{tg}C/\cos A=25$,这就是所要证的。

[例 1-2] (1987 年上海市竞赛试题) 设 f 是$(0,1)$区间上的实函数,如果

(1) $f(x)>0$,对任何 $x\in(0,1)$

(2) $\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(1-x)}{f(1-y)}\leq 2$,对任何 $x,y\in(0,1)$ 证明: f 必定是常数函数。

分析: 要证 f 是常数函数,只要证对任何的 $x,y\in(0,1)$ 恒有 $f(x)=f(y)$。要由不等形式的条件(2)出发证明等量关系,启发我们寻找一对反向的不等式(由 $A\leq B$, $A\geq B$ $A=B$)。

观察条件(2)知 x,y 换位后仍成立。也就是有 $\dfrac{f(y)}{f(x)}+\dfrac{f(1-y)}{f(1-x)}\leq 2$,这也是一个潜在的条件! 对比观察一下这个条件和条件(2)的外形结构特征使我们不禁想起代数中熟悉的不等式: $a,b>0$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$(等号仅当 $a=b$ 时成立)。由此出发,问题就变得十分容易了。

证明: 由于 $f(x)>0$, $f(y)>0$, $f(1-x)>0$, $f(1-y)>$

0，所以

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geq 2,\quad \frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\geq 2,$$

于是

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\geq 4. \tag{1-2-1}$$

又由条件 $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}\leq 2$ 知 $\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leq 2$

从而有

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leq 4. \tag{1-2-2}$$

比较(1-2-2)和(1-2-1)两式，当且仅当 $f(x)=f(y)$，$f(1-x)=f(1-y)$ 时成立，所以 $f(x)\equiv$ 常数。

［例 1-3］（第 24 届前苏联奥林匹克试题）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，证明：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}. \tag{1-3-1}$$

分析：观察不等式(1-3-1)左边每一分式的特点：分子的次数为 2，分母的次数为 1。这易使我们想起柯西不等式，因为根据通常的解题经验，用柯西不等式处理这类分式型的不等式是十分有效的。

证明：由柯西不等式得：

不等式(1-3-1)的左边=

$\frac{1}{2}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)]\cdot$

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=\frac{1}{2},$$ 得证。

注:用例 1-3 的方法还可证明 1984 年全国联赛试题:“设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数,求证:$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$。”

不少数学问题中,常出现某些特殊的“数值”,分析这些数值的特征,顺藤摸瓜,往往可获得解题思路。

[例 1-4] (第二届中国冬令营试题)

(1) 设三个正数 a, b, c 满足不等式

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

求证 a, b, c 一定是某个三角形的三条边长;

(2) 设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\quad(n\geq3)$$

求证这些数中的任何三个一定是某个三角形的三边之长。

分析:(1)较易,从略。要证(2),就是要从(2)中的已知不等式推出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的任意三个数,不妨设为 a_1, a_2, a_3,满足(1)中的不等式便可。也就是要利用(2)中的已知不等式证明

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

这个不等式等价于

$$(n-1)\left(2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right)$$

$$>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)\qquad(1\text{-}4\text{-}1)$$

要证(1-4-1),由(2)中的不等式知如能证明

$$(n-1)\left(2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right)$$

$$> (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

便可。要证(1-4-2),注意到“$n-1$”这一数值特征,考虑将 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ 分组成 $n-1$ 项用柯西不等式;又考虑到(1-4-2)左边的结构特点,这 $n-1$ 项应为$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}$,$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}$,$a_4^2$,$\cdots$,$a_n^2$ 比较适宜,至此思路便豁然开朗了。

证明:由(1)不难验证

$$(a^2+b^2+c^2)-2(a^4+b^4+c^4)$$
$$=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)\cdot(a+b-c)$$

于是

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)>0 \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

若(1-4-3)式的左边有一个因式小于零,另两个因式必大于零,从而它们三者的乘积小于零,矛盾。故(1-4-3)式左边的三个因式都为正,于是 a,b,c 构成一个三角形的三边。

(2) 由对称性,不妨证明 a_1,a_2,a_3 是某一个三角形的三边便可。这时,由柯西不等式可得

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2$$
$$=\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+a_4^2+\cdots+a_n^2\right)^2$$
$$\leq\left[\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right]$$
$$\cdot\underbrace{(1^2+1^2+\cdots+1^2)}_{n-1}$$
$$=(n-1)\left[2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right]$$

于是由(2)中的不等式便得

$$(n-1)\left[2\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right]$$

$$\geq (n-1)(a_1^4+a_2^4+a_3^4+a_4^4+\cdots+a_n^4)$$

化简就是$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$，再由(1)知$a_1$，$a_2$，$a_3$是某一三角形的三边，得证。

对于几何问题，观察图形的形状特征、位置特征等，是解题成功的关键所在。细致的观察，往往产生妙解。

[例 1-5]　方程$x^2-2x+2=0$的两根记作α，β，方程$x^2+2px-1=0$的两根记作γ，δ。如果在复平面上α，β，γ，δ四点共圆，试确定实数p的值。

分析：本题中最关键的是圆心的位置。为确定其位置先须研究α，β，γ，δ在复平面上的位置。方程$x^2-2x+2=0$的两根是$\alpha=1+i$，$\beta=1-i$；方程$x^2+2px-1=0$的两根是$\gamma=-p+\sqrt{1+p^2}$，$\delta=-p-\sqrt{1+p^2}$。注意到α，β关于实轴对称，因此圆心一定位于α，β连线的中垂线即实轴上，又γ，δ位于实轴，因此圆心一定是γ，δ的中点。故圆心的坐标为$O'(-p,0)$。再由$|O'\alpha|=|O'\gamma|$，便得$p=-\frac{1}{2}$。解略。

[例 1-6]　(第 13 届加拿大竞赛试题)给定半径为r的圆上定点P的切线l，由此圆上动点R引RQ垂直于l，交l于Q，试确定$\triangle PQR$面积的最大值(见图 1.1)。

分析：此题可用解析几何的方法求解。但运算量较大。若注意分析图形的特征，则可得十分简便的解法。如图 1.1，注意到$OP \parallel RQ$这一特点，于是作$RS \parallel l$交圆周于S，

图　1.1

这样易见△PRS 的面积为△PQR 面积的两倍(前者包含与后者全等的两个三角形)。又因为圆内接三角形 PRS 当其为正三角形时面积最大,最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$,从而△PQR 的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$。解略。

有时,动态地观察和分析图形的特征,易发现解题思路。

[例 1-7]　(第 29 届 IMO 试题)已知两同心圆的圆心为 O(如图 1.2),过小圆上一定点 M 作小圆的弦 MA 和大圆的弦 BMC,且使 $MA\perp BC$,求证:$AB^2+BC^2+CA^2$ 为定值。

分析:进行动态的观察与分析,见图 1.2,令 A 沿着小圆周向着极限位置 M 点运动,当 M 与 A 重合时,则过 M 点的弦的方向变为过 M 点的切线方向。此时,由条件 $MA\perp BC$ 知 BC 变为过圆心 O 的直径 B_1C_1,AB 变为 MB_1,AC 变为 MC_1。设大圆和小圆的半径分别为 R,r,则此时

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+AC^2&=MB_1^2+B_1C_1^2+MC_1^2\\&=(R-r)^2+(2R)^2+(R+r)^2\\&=6R^2+2r^2.\end{aligned}$$

这样,我们发现了问题的结论。由于结论中的定值为平方和的形式,启发我们用勾股定理证之。

图　1.2　　　　　　　　　图　1.3

证明: 如图 1.3, 作平行于 AM 的直径 EF, 与 BC 相交于 Q, 设 AM= 2y, 则 OQ= y, 则有

$$BC^2 = (2BQ)^2 = 4(OB^2 - OQ^2) = 4(R^2 - y^2) \quad (1\text{-}7\text{-}1)$$

$$AB^2 = BM^2 + (2y)^2 \quad (1\text{-}7\text{-}2)$$

$$AC^2 = MC^2 + (2y)^2 \quad (1\text{-}7\text{-}3)$$

又 $$BC^2 = (BM + MC)^2 = BM^2 + MC^2 + 2BM \cdot MC$$

$$= BM^2 + MC^2 + 2(B_1M \cdot MC_1)$$

$$= BM^2 + MC^2 + 2(R - r)(R + r) \quad (1\text{-}7\text{-}4)$$

由(1-7-1)～(1-7-4)立即得证。

观察差异特征, 常可帮助我们发现解题方向。

[例 1-8] (1988 年列宁格勒竞赛试题) 设 a, b, c, d 为正实数, 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}. \quad (1\text{-}8\text{-}1)$$

分析: 观察不等式(1-8-1)中的变元, 易见他们的地位存在着差异。因此在运用基本不等式时必须消除这种差异, 否则得不到精确的下界。注意到 a= b= 1, c= 2, d= 4 时等号成立, 因此为消除差异, 在变形分组运用基本不等式时, 让 a, b 对等配组, 2a 与 c, 2b 与 c, 4a 与 d, 4b 与 d 分别等同配组, 于是经过探索便可发现下面的证法。

证明: 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{1b}{d}\ (a + b + c + d)$

$$= 22 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\ \frac{2a}{c} + \frac{c}{2a} + 4\ \frac{4a}{d} + \frac{d}{4a}$$

$$+ 2\ \frac{2b}{c} + \frac{c}{2b} + 4\ \frac{4b}{d} + \frac{d}{4b} + 8\ \frac{2c}{d} + \frac{d}{2c}$$

由于 $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2(\alpha > 0)$, 故上述括号内之值均不小于 2, 于是便

得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d)\geq 64.$$

这就是不等式(1-8-1),得证。

观察和挖掘一些隐藏的特征,对于突破问题的难点有十分重要的作用。

[例 1-9] (1992 年湖南省竞赛试题)若 A,B,C 成等差数列,试求直线 $Ax+By+C=0$ 与抛物线 $y=-2x^2$ 相交弦的中点的轨迹方程。

分析:此题虽然为一常规的解析几何题,但弄得不好,所设变元一多,则相当繁杂。若注意到问题的两个隐含特征:(1)对任何的 A,B,C,直线 $Ax+By+C=0$ 总通过定点 $P_0(1,-2)$(这是因为 $A-2B+C=0$);(2)$P_0(1,-2)$ 还在抛物线 $y=-2x^2$ 上,则问题变得十分简便。

解:由 A,B,C 成等差数列知 $A-2B+C=0$,这说明直线 $Ax+By+C=0$ 总过定点 $P_0(1,-2)$,又 P_0 在抛物线上,因此 P_0 为直线与抛物线的一个交点。设它们的另一交点为 $P_1(x_1,y_1)$,它们相交弦的中点为 $P(x,y)$,则

$$x=\frac{x_1+1}{2},\quad y=\frac{y_1-2}{2}$$

也就是 $x_1=2x-1$,$y_1=2y+2$,又 $P_1(x_1,y_1)$ 在抛物线上,于是有 $2y+2=-2(2x-1)^2$,即 $y+1=-(2x-1)^2$,这就是点 P 的轨迹方程。

从上面一些例子可看出,要观察到问题的特征,并非轻而易举之事,这里必须有数学知识上的娴熟,思维上的灵巧以及锲而不舍的精神。

值得指出，观察特征具有非常广泛的含义，如变换观察角度，意味着变更问题；观察问题的简单情形，意味着特殊化。这些较具体的观察思维方式，本章将予以专门介绍。

1.2　特殊化与一般化

由于一般性寓于特殊性之中，对于一个复杂的问题，如果从一般角度解题有困难，那么我们就可以通过考察和研究它的特殊情况，寻求和发现一般规律及方法。这种从特殊入手解决问题的思考方式，通常称为"特殊化"。

特殊化是一种以屈求伸、欲进先退的思维方法。在数学解题和数学研究中经常用到。我国著名数学家华罗庚先生就曾经指出："善于'退'，足够地'退'，'退'到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！"

通过特殊化，可探索出问题的正确结论。

[例 1-10]　设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项分别为 $a_n=2^n$，$b_n=3n+2$，它们的公共项由小到大排列成数列$\{c_n\}$，求$\{c_n\}$的前 n 项和。

分析：由$\{b_n\}$的通项公式知，凡属$\{b_n\}$的项，以 3 除必余 2，根据这一原则观察$\{a_n\}$中的前面一些项 2，4，$\underline{8}$，16，$\underline{32}$，64，$\underline{128}$，256，$\underline{512}$，知底下加横线的项也是$\{b_n\}$的项，因此属于$\{c_n\}$，于是$\{c_n\}$的前四项为 8，32，128，512。由此我们猜测$\{c_n\}$的项为$\{a_n\}$的第三项起的所有奇数项，构成一个首项为 8，公比为 4 的等比数列。通过分析特殊情况，我们明确了$\{c_n\}$的结构，从而知道了问题的结论，剩下的是严格证明的任务了。

解：易见 $c_1=8$，设$\{a_n\}$的第 m 项与$\{b_n\}$的第 k 项相等，并

设这是$\{c_n\}$的第 n 项,即 $c_n = 2^m = 3k + 2$,$\{a_n\}$的第 $m+1$ 项为

$$a_{m+1} = 2^{m+1} = 2\cdot 2^m = 2(3k+2) = 3(2k+1)+1$$

这不是$\{b_n\}$的项,而$\{a_n\}$的第 $m+2$ 项为

$$a_{m+2} = 2^{m+2} = 4(3k+2) = 3(4k+2)+2$$

这是$\{b_n\}$的项,从而是$\{c_n\}$的第 $n+1$ 项,即 $c_{n+1} = 2^{m+2}$,故$\{c_n\}$是首项为 8,公比为 4 的等比数列,它的前 n 项和为 $S_n = \dfrac{8(2^{2n}-1)}{3}$。

[例 1-11] (第 18 届 IMO 试题)设数列 $u_0 = 2, u_1 = \dfrac{5}{2}, \cdots, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$,求证:

$$[u_n] = 2^{\frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}}$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

分析:由要证的结论可知,应有 $u_n = 2^{b_n} + \alpha$,其中 $b_n = \dfrac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$,$0 \leq \alpha < 1$。为了判断 α的形式,可先计算所给数列的前几项

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}, u_2 = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1},$$

$$u_3 = 8\frac{1}{8} = 2^3 + 2^{-3},\quad u_4 = 32\frac{1}{32} = 2^5 + 2^{-5}, \cdots$$

由上述几项的规律可猜测 $u_n = 2^{b_n} + 2^{-b_n}$,这不难用数学归纳法证明。这样,只要注意到 $0 \leq 2^{-b_n} < 1$,便得所证结果$[u_n] = 2^{b_n}$。证略。

通过特殊化,可发现解题的有效途径。对于特例的方法,有时可直接迁移用于一般,有时可稍加改造用于一般,有时则能给我们以某种“顿悟”和启迪,引导我们发现一般的方法。

[**例** 1-12] **如图** 1.4, △PQR **和**△P′Q′R′ **是两个全等的正三角形**, **六边形** ABCDEF **的边长分别记为**: $AB = a_1$, $BC = b_1$, $CD = a_2$, $DE = b_2$, $EF = a_3$, $FA = b_3$, **求证**: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$。

分析: **此题一拿到手**, **大凡都有这样的念头**, **想要利用余弦定义来证明**(**因为结论中涉及到线段的平方关系**), **但稍经尝试**, **就会发现难以奏效**。**这样**, **不妨先**“**退**”**一下**, **考察问题的特殊情形**。

图 1.4　　　　图 1.5

考察△PQR **和**△P′Q′R′ **的对应边平行时的情形**, **如图** 1.5, $PQ \parallel R'P'$, $QR \parallel P'Q'$, $RP \parallel Q'R'$, **这时** △PAB, △Q′BC, △QCD, △R′DE, △REF, △P′FA **都是正三角形**, **注意到正三角形的边长与面积的关系** $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, **则要证的结论即为**:

$$S_{a_1} + S_{a_2} + S_{a_3} = S_{b_1} + S_{b_2} + S_{b_3} \qquad (1\text{-}12\text{-}1)$$

其中 S_{a_1} **表示边长为** a_1 **的**△PAB **的面积**, **其余类同**。

因为△PQR **和**△P′Q′R′ **是全等的正三角形**, **故**(1-12-1)