高中数学复习提要

（供高三年级用）

上海市教育委员会教学研究室

上海教育出版社出版

（上海永福路 [illegible]号）

（邮政编码：[illegible]）

上海　　　　发行　上海○○印刷厂印刷

开本 [illegible]　印张 [illegible]　字数 [illegible]

[illegible]年 [illegible]月第 [illegible]版　[illegible]年 [illegible]月第 [illegible]次印刷

印数 [illegible]本

[illegible]　定价：[illegible]元

说摇摇明

为了帮助高三学生对高中数学的基础知识、基本技能、基本方法、基本联系进行复习和整理，我们组织了一些有经验的教师，编写了这本《高中数学复习提要》，供本市高三学生使用援

本书所列的复习内容和复习要求，主要依据是上海中小学课程教材改革委员会编订的《高级中学数学学科课程标准（草案）》，同时参照了相应的高级中学数学课本（试用本）援本书分十二章编排，各章再分若干节，每节编写了“知识提要”、“例题”、“练习”和“习题”援其中“练习”以基本题为主，大致依课时划分配置，可在课内选用；“习题”分节安排，一般供课外使用援另外，为了加强知识的综合运用和能力训练，在一些章内设有一节“综合应用”，其中的例题和练习题有一定的难度；在其他一些章的例题、习题中，也有综合要求较高的题目，对这些内容的复习，不作统一要求援教师在使用本书时，应根据学生的实际水平，对内容作必要的取舍；也可针对教学实际，进行适当的调整；要根据不同复习阶段的要求和学生的具体情况，恰当地组织复习内容和安排练习，从实际出发，注重实效援

参加本书编写的教师有李大元、余应龙、忻再义、康士凯、王凤仪、沈竞华等，最后由上海市教育委员会教学研究室组织

有关专家、教师审定援

本书是试用本，恳切地希望广大师生踊跃反映使用本书的意见，并对书中存在的不足之处提出批评，以便做好本书的修订工作援

上海市教育委员会教学研究室
员怨怨愿年 员园月

目摇摇录

第一章摇集 合 与 函 数

一摇集 合 与 命 题

知识提要

员援集合的基本概念

把某些能确切指定的对象看作一个整体,这个整体叫做一个集合,简称集援空集不含任何元素,记作∅援

如果集合 粤的任何一个元素都属于集合 月,那么集合 粤叫做集合 月的子集,记作 粤⊆月援

空集是任何集合的子集援

如果集合 粤与 月既满足 粤⊆月,又满足 月⊆粤,那么说 粤与月相等,记作 粤越月援

如果 粤⊆月,且 月中至少有一个元素不属于 粤,那么集合 粤叫做集合 月的真子集,记作 粤⊂月援

圆援集合的运算

粤∩月越{曾渣曾∈粤,并且曾∈月};

粤∪月越{曾渣曾∈粤,或者曾∈月};

$\overline{粤}$越{曾渣曾∈陨,曾辕粤},这里 陨表示全集援

猿援命题的四种形式

原命题 如果 α,那么 β援

逆命题 如果 β,那么 α援

否命题 如果$\overline{\alpha}$,那么$\overline{\beta}$援

逆否命题 如果$\overline{\beta}$,那么$\overline{\alpha}$援

源援充分条件与必要条件

如果 $\alpha\Rightarrow\beta$,那么 α 是 β 的充分条件 ;如果 $\beta\Rightarrow\alpha$,那么 α 是 β 的必要条件 如果既有 $\alpha\Rightarrow\beta$,又有 $\beta\Rightarrow\alpha$,即 $\alpha\Leftrightarrow\beta$,那么 α 是 β 的充分而且必要条件,简称充要条件援

例题

例 员摇设集合 酝越{曾渊曾跃园} ,孕越{曾渊曾约猿} ,那么“ 曾∈ 酝或 曾∈ 孕”是“ 曾∈ 酝∩孕”的（摇）

（粤） 充分但非必要条件；

（月） 必要但非充分条件；

（悦） 充分必要条件；

（阅） 非充分条件也非必要条件援

解摇“ 曾∈ 酝或 曾∈ 孕”相当于“ 曾∈ 酝∪孕”援

显然,“ 曾∈ 酝∩孕”⇒“ 曾∈ 酝∪孕”援

因为 酝∪孕越砸,酝∩孕越(园,猿),

所以“ 曾∈ 酝∪孕”辕 曾∈ 酝∩孕”援

故选(月) 援

说明摇判断 α 是 β 的什么条件,主要是依据充分条件与必要条件的定义援

例 圆摇如果集合 粤越{曾渊曾圆 原猿曾原源约园,曾∈ 砸} ,那么粤∩晕的真子集的个数是__________________援

解法一摇粤越{曾渊曾圆 原猿曾原源约园,曾∈ 砸} 越(原员,源) 援

摇摇摇摇摇摇粤∩晕越{员,圆,猿} 援

摇摇摇摇摇摇粤∩晕的真子集可列举如下 :∅, {员}, {圆},

·圆·

猿，员圆，员猿，圆猿，共有苑个援

解法二摇由前知 粤∩晕为三元集合 员圆猿摇空集为它的员(即 悦圆猿)个真子集,它的单元真子集有 悦员猿个,二元真子集有悦圆猿个摇故它的真子集的个数是 悦圆猿垣悦员猿垣悦圆猿越苑(个)援

解法三摇因为 灶个元素的集合共有 圆灶个不同子集(参见说明),故三元集合 粤∩晕的真子集共有 圆猿原员越苑(个)援

说明摇如果集合 酝有 灶个元素,那么集合 酝的子集共有圆灶个援这是因为:空集作为 酝的子集有 员越悦圆灶个,一元子集有悦员灶个,二元子集有 悦圆灶个,…,灶元子集就是 酝本身,有 悦灶灶个援因而 酝的子集共有

悦圆灶垣悦员灶垣悦圆灶垣…垣悦灶灶越(员垣员)灶越圆灶(个)援

上述结论也可这样证明:酝的子集 阅的个数取决于 阅含有 酝的哪些元素援酝的每个元素都有属于 阅或不属于 阅两种可能援酝有 灶个元素,按乘法原理,酝的子集共有

$\underbrace{圆伊圆伊…伊圆}_{灶个圆}$越圆灶(个)援

例 猿摇已知集合 粤越{曾渣曾圆原愿曾约园,曾∈砸},集合 月越{曾渣曾圆原猿葬曾垣圆葬圆越园,曾∈砸}援

(员) 实数 葬在什么范围内取值时,月⊂粤?

(圆) 实数 葬在什么范围内取值时,粤∩月越∅?

解摇粤越{曾渣曾圆原愿曾约园,曾∈砸}越(园,愿),

摇摇摇摇月越{曾渣曾圆原猿葬曾垣圆葬圆越园,曾∈砸}

越{曾渣曾越葬或 曾越圆葬}援

(员) 因为 月为有限集,粤为无限集,因此

月⊂粤⇔葬,圆葬都属于(园,愿)⇔

$\begin{cases}园约葬约愿\\园约圆葬约愿\end{cases}$⇔$\begin{cases}园约葬约愿\\园约葬约源\end{cases}$⇔园约葬约源援

摇摇所以，当 莽$\in$（ 原员，圆 时，月$\subset$ 粤援

（圆 粤$\cap$ 月越$\varnothing$）$\Leftrightarrow$ 莽及 圆莽都不属于（ 原圆 源 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}莽\leqslant 原圆或 莽\geqslant 源\\ 圆莽\leqslant 原圆或 圆莽\geqslant 源\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}莽\leqslant 原圆或 莽\geqslant 源\\ 莽\leqslant 原员或 莽\geqslant 圆\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 莽$\leqslant$ 原圆或 莽$\geqslant$ 源援

摇摇所以，当 莽$\in$（ 原肆，原圆]$\cup$[源援园员耘园，肆）时，粤$\cap$ 月越$\varnothing$援

例 源摇设集合 粤越｛曾渣原圆$\leqslant$ 曾$\leqslant$ 莽｝不是空集，月越｛赠渣赠越圆曾垣猿，曾$\in$ 粤｝，悦越｛扎渣扎越曾圆，曾$\in$ 粤｝，且 月$\cap$ 悦越悦，求实数 莽的取值范围援

解摇由题设知

月越｛赠渣原员$\leqslant$ 赠$\leqslant$ 圆莽垣猿｝，

悦越$\begin{cases}｛扎渣莽^圆\leqslant 扎\leqslant 源｝，当 原圆\leqslant 莽\leqslant 园时；\\ ｛扎渣园\leqslant 扎\leqslant 源｝，当 园约莽\leqslant 圆时；\\ ｛扎渣园\leqslant 扎\leqslant 莽^圆｝，当 莽跃圆时援\end{cases}$

月$\cap$ 悦越悦$\Leftrightarrow$悦$\subseteq$ 月

$$\Leftrightarrow\begin{cases}原圆\leqslant 莽\leqslant 圆\\ 源\leqslant 圆莽垣猿\end{cases}或\begin{cases}莽跃圆\\ 莽^圆\leqslant 圆莽垣猿\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{员}{圆}\leqslant 莽\leqslant 圆或 圆约莽\leqslant 猿$$

$$\Leftrightarrow\frac{员}{圆}\leqslant 莽\leqslant 猿援$$

即 莽的取值范围为区间$\left[\frac{员}{圆},猿\right]$援

说明摇由于 赠越圆曾垣猿是 曾的增函数，因此根据集合 粤即能用区间的形式写出集合 月；但 扎越曾圆不是 曾的单调函数，

因而要用区间形式写出集合 悦就必须对 葬进行分类讨论援

例 缘摇已知集合 粤越{(曾赠 滷曾原圆 ^{圆} 垣(赠垣猿 ^{圆}≤源 ,月越$\left\{(曾赠 滷曾原员 ^{圆} 垣(赠原葬 ^{圆}\leqslant \frac{\text{员}}{\text{源}}\right\}$,且 月⊆粤,求实数 葬的取值范围援

解摇粤表示以 孕(圆 原猿 为圆心，半径为 圆的圆围成的闭圆域，月表示以 匝(员,葬 为圆心，$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$为半径的圆围成的闭圆域援

两圆的位置关系可由两圆的圆心距与两圆半径的和差的大小关系确定援为使 月⊆粤必须且只须圆 匝内切或内含于圆 孕,即 孕,匝两点的距离不大于 圆原$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$,得

$$(\text{圆原员})^{圆}\ 垣(\text{原猿原葬})^{圆}\leqslant \left(\text{圆原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\right)^{圆}$$

$$摇\Leftrightarrow 源葬^{圆}\ 垣圆源葬垣猿员\leqslant 园$$

$$摇\Leftrightarrow 原猿原\frac{\sqrt{缘}}{圆}\leqslant 葬\leqslant 原猿垣\frac{\sqrt{缘}}{圆}援$$

摇摇所以,葬的取值范围为区间$\left[原猿原\frac{\sqrt{缘}}{圆},原猿垣\frac{\sqrt{缘}}{圆}\right]$援

说明摇本例是“数”的问题,借助于“形”得以解决援这样做能使解题直观、简捷援数形结合在数学中是常见的,我们应仔细体会援

练摇习摇员-员-员

员援下面说法中正确的是 （摇）

(粤) 任何一个集合 粤必有两个子集；

（月） 任何一个集合 粤必有一个真子集；

（悦） 若集合 粤和 月的交集是空集，则 粤 月至少有一个是空集；

（阅） 若集合 粤和 月的交集是全集，则 粤 月都是全集援

圆援下列关系中，正确的是 （摇）

（粤） $\varnothing$越 园；　　　　（月） $\varnothing \in$ 园；

（悦） 园$\subseteq$ 园；　　　　（阅） 园$\in$ 园援

摇摇猿援若方程 圆越源的解集为 粤，方程 遭曾 垣员 越园的解集为 月，则集合 粤与 月的关系是 （摇）

（粤） 粤$\cap$ 月越$\varnothing$；　　　　（月） 粤越月；

（悦） 粤$\subseteq$ 月；　　　　（阅） 粤$\supseteq$ 月援

摇摇源援“三个数 葬遭糟不全为零”的充要条件是 （摇）

（粤） 葬遭糟都不是零；

（月） 葬遭糟中最多有一个零；

（悦） 葬遭糟中至少有一个不是零；

（阅） 葬遭糟中只有一个是零援

缘援写出命题“如果 曾越圆，那么 曾原猿曾垣圆越园”的逆命题援

远援写出命题“如果 曾越圆，那么 曾垣$\frac{圆}{曾}$跃圆”的否命题援

苑援设集合 粤越{曾渣曾越圆噪垣员，噪$\in$ 晕}，月越{曾渣曾越圆噪垣员，噪$\leqslant$ 员园，曾$\in$ 晕}，则用列举法表示 粤$\cap$ 月越＿＿＿＿＿＿＿＿＿援

愿援设集合 杂葬越{（曾，赠）渣曾越葬垣糟燥泽θ，赠越$\frac{葬}{圆}$垣泽蚤灶θ，$\theta \in$ 砸}，其中 葬为实常数援

（员） 杂葬是怎样的图形？

（圆） 若 杂葬$\subset$ {（曾，赠）渣曾圆垣赠圆约源}，求 葬的取值范围援

习摇题摇员- 员

员援‘ 澡垣赠越园’是‘ 澡越员且 赠越员’的 （摇）

（粤） 充分但非必要条件；

（月） 必要但非充分条件；

（悦） 充分必要条件；

（阅） 非充分条件也非必要条件援

园援若函数 枣（曾）、早（曾）的定义域和值域都是 砸，则 枣（曾）跃早（曾）（曾∈砸）成立的充要条件是 （摇）

（粤） 有一个 曾∈砸，使得 枣（曾）跃早（曾）；

（月） 有无穷多个 曾∈砸，使得 枣（曾）跃早（曾）；

（悦） 对 砸中任意的 曾都有 枣（曾）跃早（曾）垣员；

（阅） 砸中不存在 曾使得 枣（曾）≤早（曾）援

猿援满足条件｛园，猿｝∪粤越｛园，猿，远｝的集合 粤的个数是____________援

源援设全集是实数集 砸，粤越｛曾渣曾≤员垣√园，曾∈砸｝，月越｛员，园，猿，源｝，则用列举法表示 粤∩月越____________援

缘援设集合 粤越｛曾渣曾垣员渣跃园，曾∈砸｝，月越｛曾渣曾园约怨，曾∈砸｝，则用区间表示 粤∪月是____________援

远援设集合 粤越｛曾渣曾园垣曾原远越园｝，月越｛曾渣皂曾垣员越园｝，则满足 月⊂粤的实数 皂的一切值为____________援

苑援已知 葬跃园且 葬≠员，写出命题‘若 葬跃员，则 赠越葬曾是增函数’的逆命题、否命题与逆否命题援

愿援已知集合 粤越｛曾渣曾园原葬曾垣葬园原员怨越园｝，月越｛曾渣造燥早园（曾园原缘曾垣愿）越员｝，悦越｛曾渣曾园垣园曾原愿≤园，曾∈砸｝援若 粤∩月≠∅，且 粤∩悦越∅，求实数 葬的值援

二摇函数及其基本性质

知识提要

员援函数的基本概念

如果在某个变化过程中有两个变量 曾赠并且对于 曾在某个范围 阅内的每一个确定的值，按照某个对应法则 枣赠都有唯一确定的值与它对应，那么 赠就叫做 曾的函数，记作 赠越枣曾，曾∈ 阅援曾叫做自变量，曾的取值范围 阅叫做函数的定义域，和 曾的值相对应的 赠的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域援

已知两个函数 枣曾（曾∈ 阅贡）、早曾（曾∈ 阅圆），如果 阅越阅贡∩阅圆，并且 阅不是空集，那么 枣曾 垣早曾（曾∈ 阅）及 枣曾·早曾（曾∈ 阅）分别叫做函数 枣曾与 早曾的和及积援

圆援函数的基本性质

如果对于函数 枣曾的定义域 阅内的任意实数 葬都有 枣原葬 越枣葬［或 枣原葬 越原枣葬］，那么就把函数 枣曾叫做偶函数（或奇函数）援

函数定义域 阅关于原点对称是这个函数为偶函数（或奇函数）的必要条件援

对于给定区间上的函数 枣曾，如果对于属于这个区间的自变量的任意两个值 曾贡、曾圆，当 曾贡约曾圆时，都有 枣曾贡 约枣曾圆［或 枣曾贡 跃枣曾圆］，那么就说 枣曾在这个区间上是增函数（或减函数）援如果函数 枣曾在某个区间上是增函数或者减函数，那么就说函数 枣曾在这一区间上是单调函数援这个区间叫做函数 枣曾的单调区间援

设曾$_{园}$属于函数枣曾的定义域援如果不等式枣曾≥枣曾$_{园}$）［或枣曾≤枣曾$_{园}$）］对定义域内任意曾都成立，那么枣曾$_{园}$）叫做函数赠越枣曾的最小值（或最大值），记作赠$_{最小值}$越枣曾$_{园}$）［或赠$_{最大值}$越枣曾$_{园}$）］援

对于函数枣曾（曾∈阅），如果存在一个不是零的常数栽使得曾取阅内的每一个值时，都有等式枣曾垣栽越枣曾，那么这个函数枣曾就叫做周期函数，常数栽叫做函数枣曾的周期援

对于一个周期函数枣曾来说，如果在所有的周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就叫做这个函数的最小正周期援

例题

例员摇求下列函数的定义域：

（员）赠越$\frac{曾原猿}{曾垣圆}$垣$\frac{员}{\sqrt{员原曾}}$；摇摇（圆）赠越$\sqrt{遭造早_{园援缘}\frac{曾原员}{曾垣缘}}$援

解摇（员）为使函数解析式有意义，必须

$$\begin{cases}曾垣圆\neq 园\\ 员原曾跃园援\end{cases}$$

解得　　曾约员且曾≠原圆援

摇摇因此，所求的定义域是（原肄，原圆）∪（原圆，员）援

（圆）所求的定义域

阅越$\left\{曾渣遭造早_{园援缘}\frac{曾原员}{曾垣缘}\geq 园\right\}$越$\left\{曾渣园约\frac{曾原员}{曾垣缘}\leq 员\right\}$

越{曾渣曾跃员}越（员，垣肄）援

摇摇说明摇求初等函数的定义域，一般可归结到解一个不等

式组或混合组援在较简单的情况下，例如，设 孕(曾、匝(曾为整式，对 赠越$\dfrac{\text{孕(曾}}{\text{匝(曾}}$，归结为解 匝(曾 ≠ 园；对 赠越 $\sqrt[\text{圆k}]{\text{孕(曾}}$，归结为解 孕(曾 ≥ 园；对 赠越造燥早$_{\text{匝(曾}}$孕(曾，归结为解$\begin{cases}\text{孕(曾 跃园}\\ \text{匝(曾 跃园}\\ \text{匝(曾} \neq \text{员援}\end{cases}$

解(圆 的表达比较简洁，但不能直接写出 阅越(员援援援援耘垣肄)，应有中间过程援

例 圆摇已知

$$\text{枣(曾 越}\begin{cases}\text{圆曾 当 园} \leqslant \text{曾} \leqslant \text{员时；}\\ \text{圆 当 员约曾约圆时；}\\ \text{猿 当 圆} \leqslant \text{曾约垣肄时援}\end{cases}$$

求函数 赠越枣(曾(曾∈[园援援援援耘垣肄))的值域援

解摇当 园≤曾≤员时，园≤圆曾≤圆援

所以函数 赠越枣(曾(曾∈[园援援援援耘垣肄))的值域为[园圆∪猿援

例 猿摇已知二次函数 赠越枣(曾 满足条件 枣(园 越$\dfrac{\text{员}}{\text{圆}}$皂和枣(曾垣员)原枣(曾原员)越源曾原圆皂援

(员 求 枣(曾 的表达式；

(圆 如果 赠越枣(曾 的图象与 曾轴有两个不同的交点，且交点在区间(园源 内，求实数 皂的取值范围；

(猿 当 赠越枣(曾 的图象与 曾轴有两个交点时，这两个交点是否可能在点$\left(\dfrac{\text{员}}{\text{圆}}\text{,园}\right)$的两旁？

解摇(员 设 枣(曾 越葬曾$^{\text{圆}}$垣遭曾垣糟援

· 员园

由 枣园 越$\frac{员}{圆}$皂,得 糟越$\frac{员}{圆}$皂援

又 枣曾垣员 越蔡 曾垣员^{圆}垣遭 曾垣员 垣糟

越蔡曾^{圆}垣(圆蔡垣遭 曾垣蔡垣遭垣糟

枣曾原员 越蔡 曾原员^{圆}垣遭 曾原员 垣糟

越蔡曾^{圆}垣(原圆蔡垣遭 曾垣蔡原遭垣糟

得 枣曾垣员 原枣曾原员 越源蔡曾垣圆遭援

摇摇已知 枣曾垣员 原枣曾原员 越源曾原圆皂,于是得 源蔡曾垣圆遭越源曾原圆皂,此式对定义域中的一切 曾的值都成立援

亦摇$\begin{cases}源蔡越源\\圆遭越原圆皂,\end{cases}$摇摇 即$\begin{cases}蔡越员,\\遭越原皂援\end{cases}$

亦摇枣曾 越曾^{圆}原皂曾垣$\frac{员}{圆}$皂援

摇摇(圆 函数 赠越曾^{圆}原皂曾垣$\frac{员}{圆}$皂的图象是开口向上的抛物线,对称轴为直线 曾越$\frac{皂}{圆}$,根据题意,得

$\begin{cases}\Delta 越皂^{圆}原圆皂 跃园\\ 枣园 越\frac{员}{圆}皂 跃园\\ 枣源 越员远原源皂 垣\frac{员}{圆}皂 跃园\\ 园约\frac{皂}{圆}约源\end{cases}$ 摇即摇 $\begin{cases}皂 约园或 皂 跃圆\\ 皂 跃园\\ 皂 约\frac{猿圆}{苑},\\ 园约皂 约愿援\end{cases}$

摇摇亦摇圆约皂约$\frac{猿圆}{苑}$,即 皂的取值范围是区间$\left(圆 \frac{猿圆}{苑}\right)$援

(猿 开口向上的抛物线 赠越曾^{圆}原皂曾垣$\frac{员}{圆}$皂与 曾轴有两个