高中学科多功能手册

数　学　分　册

主编　马惠生

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是《高中学科多功能手册》中的数学分册，是以1998年修订的学科课程标准和教材使用意见为依据，编写的工具性辅导读物．全书将高中数学的学习内容按知识点分类，共8章，再进行细化，为学生逐一解疑问题，总结规律．

本书通过“知识点”提要、“范例”，对学生进行有效辅导，其间穿插“类比练习”以提高并检验学生解决实际问题的本领；“信息资料”则为学生提供了丰富的数学思想方法、高考信息．最后，提供了类比练习的答案和提示．

全书编写形式活泼，知识点条理清晰，是高中学生学习数学的好帮手，也可作为教师的辅助参考用书．

出版说明

《高中学科多功能手册》(以下简称《手册》是以最新修订的学科课程标准和教材使用意见为依据编写的一套高中学生学习的工具性辅导读物.《手册》包括语文分册、数学分册、物理分册和化学分册,各分册针对高中学生在学习中遇到的疑难点,以问题的形式提出,然后详细地释疑,并揭示其中的要点和规律,是一套注重能力、注重方法的素质型手册.

《手册》既不同于那些常见的习题集,又有别于一般的学习同步辅导材料.在编排上,《手册》力求反映学科体系,紧扣教材,从简到繁,从易到难;在取材上,着力于问题的典型性、代表性、新颖性和多样性;在编写上,力求便于使用,每一个问题的提出与解决自成体系,便于突破难点.各分册严密地构成一个高中各学科知识结构的网络体系,具有“知识点形成条目,结构形成网络,内容形成板块”的特点.

所谓“多功能”的含义:一是学生在学习中的学习参考工具书,《手册》所提出的问题,正是各学科中最重要而又较难的问题,通过不同的栏目进行指导和启迪,便于学生使用;二是明确地揭示了解题方法,便于学生学习和掌握;三是使学生从解题的规范和规律中,掌握和提高解题的基本方法和能力,举一反三,触类旁通;四是使学生有针对性地弥补不足,提高学习的水平;五是通过相关“信息”,拓宽学生的知识面,并帮助学生做好高考心理准备;六是附有有关资料,以便于随时参考查阅.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertc

本书主编马惠生，参加编写的有吕宝兴、郑跃星、赵军山等.

由于篇幅和水平的有限，难免挂一漏万，甚至有不到之处，恳请广大读者给予批评指出.

上海科学技术出版社

2000 年 1 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertong

一、函　　数

1. 集合的概念

（1）集合中的元素具有确定性、无序性和相异性. 尤其应注意相异性在解题中的作用.

（2）集合常用的表示方法有列举法和描述法. 对集合进行直观列举和图解是非常重要的.

（3）集合与集合之间存在包含关系，而集合与元素之间存在隶属关系.

范例 1　　集合之间的关系

集合 $A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{x \mid x\in A, x\in \mathbf{N}^*\}$，$C=\{x \mid x\subset A\}$，求集合 A、B、C 之间的相互关系.

关键

把描述法改写为列举法.

解　集合 $B=\{1, 2\}$.

集合 $C=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

所以集合 A, B, C 之间的相互关系为　$B\subset A$，$B\in C$，$A\notin C$.

说明　本题中集合 C 是以集合为元素的集合.

类比练习

1. 集合 $M=\{y \mid y=2^x,\ x\in \mathbf{R}\}$，集合 $N=\{y \mid y=x^2,\ x\in \mathbf{R}\}$，求 M、N 之间的关系.
2. $P=\{x \mid x=a^2+1,\ a\in \mathbf{N}^*\}$，$Q=\{y \mid y=b^2-4b+5,\ b\in \mathbf{N}^*\}$，求 P、Q 之间的关系.
3. $A=\{0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{x \mid x^3-4x^2+3x=0,\ x\in \mathbf{R}\}$，$M=\{c \mid c\subseteq A\}$，$N=\{D \mid D\subseteq B\}$，求 $M\cap N$.
4. 已知集合 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant k,\ k\in \mathbf{R}\}$，当 k 为何值时，集合 $\{y \mid y=x+1,\ x\in A\}=\{y \mid y=x^2,\ x\in A\}$？

范例 2　元素的相异性

集合 $A=\{x,\ xy,\ \lg xy\}$，集合 $B=\{0,\ |x|,\ y\}$，若 $A=B$，求 x、y 的值.

要点

依据元素的相异性对所求的结果进行检验.

解　由 $xy>0$ 可知 $\lg xy=0$，所以 $xy=1$.

(1) 若 $x=1$，$y=1$，则 $A=\{1,\ 1,\ 0\}$，不符合元素的相异性.

(2) 若 $x=-1$，$y=-1$，则 $A=B=\{0,\ 1,\ -1\}$，

$\therefore$　$x=-1$，$y=-1$.

类比练习

5. 集合 $M=\{2,\ 3,\ a^2+1\}$，$N=\{a^2+a-4,\ 2a+1,\ -1\}$，且

$M\cap N=\{2\}$,则 a 的值是________.

6. 集合 $M=\{a, a+d, a+2d\}$, $N=\{a, aq, aq^2\}$, a 为不等于 0 的常数,且 $M=N$. 求 d, q.

7. 由实数 x, $-x$, $|x|$, $\sqrt[3]{-x^3}$, $\sqrt{x^2}$ 所组成的集合最多含有的元素个数是(　　)

(A) 2 个.　(B) 3 个.　(C) 4 个.　(D) 5 个.

8. $M=\{1, 3, t\}$, $N=\{t^2-t+1\}$,若 $M\cup N=M$,则 t 的值是(　　)

(A) $t=1$.　(B) $t=2$, $t=0$, $t=-1$.

(C) $t=2$, $t=\pm1$.　(D) 不存在.

范例 3　　**子集的个数**

(1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, \cdots, 9, 10\}$, M 满足 $A\subset M\subseteq B$,这样的集合 M 共有多少个?

(2) 已知 $X\cup Y=\{0, 1\}$,写出非空集合 X, Y 的所有可能解.

要点

含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n 个.

解　(1) M 是集合 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 的非空子集与 A 的并集. 所以这样的 M 共有 $2^8-1=255$(个).

(2) X, Y 都是 $\{0, 1\}$ 的非空子集,所以 $X=\{0\}$,则 $Y=\{1\}$,或 $Y=\{0, 1\}$; $X=\{1\}$,则 $Y=\{0\}$ 或 $Y=\{0, 1\}$; $X=\{0, 1\}$,则 $Y=\{0\}$ 或 $Y=\{1\}$ 或 $Y=\{0, 1\}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertong

说明　注意子集,真子集,非空子集,非空真子集之间的差异,它们的个数分别为 2^n 个,2^n-1 个,2^n-1 个,2^n-2 个.

类比练习

9. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$,则集合 B 的子集最多可能有______个;若 $A\cap B=\{1, 2, 3, 4\}$,则集合 B 的子集至少有______个.

10. $A=\{1, 2, 3\}$且 $A\cup B=A$,则满足条件的集合 B 的个数是______.

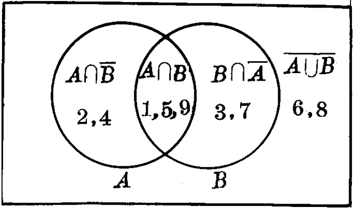
11. $A=\left\{x\left|\frac{6}{3-x}\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{Z}\right.\right\}$,试用列举法表示集合 A,并求集合 A 的真子集的个数.

12. A、B 两个集合各有 6 个元素,$A\cap B$ 有 4 个元素,若集合 C 同时满足(1) $C\subseteq A\cup B$;(2) $C\supseteq A\cap B$. 求满足条件的集合 C 的个数.

范例 4　集合的分类

全集 $I=\{1, 2, 3, \cdots, 8, 9\}$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $\overline{A}\cap B=\{3, 7\}$, $\overline{A}\cup B=\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,求 A, B.

图示



解　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,

$\therefore$　$A\cap B=\{1, 5, 9\}$.

$\overline{A}\cap B=\{3, 7\}$,

$\therefore$　$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$\overline{A}\cup B$ 是 $A\cap\overline{B}$ 的补集,

$\therefore$　$A\cap\overline{B}=\{2, 4\}$.

关键

$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cup B=\overline{A\cap\overline{B}}$.

由此可知 $A=\{1, 2, 4, 5, 9\}$.

本题可以采用图解法(如图所示).

说明　全集 I **可以依据一个集合** A **进行分类即** A **与** $\overline{A}$**;也可以依据两个集合** A、B **进行分类,即** $A\cap\overline{B}$, $A\cap B$, $B\cap\overline{A}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$.

类比练习

13. $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$, $\overline{A}\cap B=\{4\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 5\}$,**则**(　　)

(A) $3\notin A$ **且** $3\notin B$.　　(B) $3\in A$ **且** $3\in B$.

(C) $3\in A$ **且** $3\notin B$.　　(D) $3\in B$ **且** $3\notin A$.

14. $A=\{x|x^2+px+12=0, x\in N\}$, $B=\{x|x^2-5x+q=0, x\in N\}$, $I=N$, $\overline{A}\cap B=\{2\}$, $A\cap\overline{B}=\{4\}$, **求** $A\cap B$, $A\cup B$.

15. $I=\{2, 4, 6, 8, \cdots, 18, 20\}$, $A\cap\overline{B}=\{12, 14\}$, $\overline{A}\cap B=\{2, 4, 16, 18\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{6, 8\}$,**求** A, B.

高考情报

1. 设全集 $I=N$,**集合** $A=\{x|x=2n, n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x|x=4n, n\in\mathbf{N}^*\}$,**则**(　　)

(A) $I=A\cup B$.　　(B) $I=\overline{A}\cup B$.

(C) $I=A\cup\overline{B}$.　　(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. 设 I **是全集,集合** P, Q **满足** $P\subset Q$,**则下面结论错误的是**(　　)

(A) $P\cup Q=Q$.　　(B) $\overline{P}\cup Q=I$.

(C) $P\cap\overline{Q}=\varnothing$.　　(D) $\overline{P}\cap\overline{Q}=\overline{P}$.

答案与提示

1. $M\subset N$ **2.** $P\subset Q$ **提示**：$Q=\{1,2,5,10,\cdots\}$，$P=\{2,5,6,\cdots\}$ **3.** $\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

4. $k=0$ 或 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. $a=\dfrac{1}{2}$，$a=-3$ **6.** $q=-\dfrac{1}{2}$，$d=-\dfrac{3}{4}a$ **7.** A **8.** B

9. 16；16 **10.** 8

11. $A=\{9,6,5,4,2,1,0,-3\}$. 真子集个数为 255 个

12. 16 **13.** C **14.** $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{3,4,2\}$

15. $A=\{10,12,14,20\}$，$B=\{2,4,10,16,18,20\}$

2. 集合的运算

(1) 把用抽象描述法表示的集合改用列举、图示、区间、数轴、图象等直观方法表示是集合运算中的常用手段.

(2) 熟悉集合运算的一些等价关系：如

$A\cup B=A\Leftrightarrow A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A\Leftrightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$，

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 等.

(3) 优先考虑空集 $\varnothing$ 是否满足题设条件.

范例 1 **方程问题**

$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+4=0\}$，若 $A\cup B=A$，求 a 的范围.

要点

1. 改描述表示为列举表示.

2. 优先考虑$\varnothing$.

3. 回代检验.

解　由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$，

$A=\{1,2\}$.

(1) $B=\varnothing$满足题设条件，

$\therefore\quad \Delta=a^2-16<0$,

$-4<a<4$;

(2) $B\neq\varnothing$，若 $1\in B\Rightarrow a=5$，此时

$B=\{1,4\}$，$B\not\subseteq A$(舍)；

若 $2\in B\Rightarrow a=4$，此时

$B=\{2\}$满足条件.

综上，得　$-4<a\leqslant 4$.

易错　集合运算中的方程问题有两个易错点：(1) 忘记对$\varnothing$进行思考；(2) 忘记对求得的结果进行检验.

类比练习

1. 全集 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2+px+12=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，

(1) 若 $\overline{A}\cap B=\{2\}$，求 $p+q$；(2) 若 $A\cap B=\{4\}$，求 $A\cup B$.

2. 集合 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求 p 范围.

3. $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m 的值.

4. $M=\{x\mid x^2+mx+n=0\}$，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，且 $M\cap A=\varnothing$，$M\cap B=M$，试求 m，n 的关系.

5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-$

$5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$同时成立，求实数 a 的值.

范例 2　　不等式问题

集合 $A=\{y\mid y-(a^2+a-2)y+a(a^2-2)<0,\ a>0\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},\ 0\leqslant x\leqslant 3\right\}$，若 $A\subseteq B$，求 a 范围.

要点

1. 改描述法为区间.
2. 借助数轴.
3. 注意边界"开"、"闭".
4. 不忘空集$\varnothing$.

解　$B=[2,4]$.

(1) $a>2$，则 $A=(a,a^2-2)$.

$$\begin{cases}a^2-2\leqslant 4,\\ a\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant a\leqslant\sqrt{6},$$

$\therefore\ 2<a\leqslant\sqrt{6}$.

(2) $a=2$，$A=\varnothing$，满足条件.

(3) $0<a<2$，则 $A=(a^2-2,a)$.

$$\begin{cases}a^2-2\geqslant 2,\\ a\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 2\leqslant a\leqslant 4\text{ 或 }$$

$a\leqslant -2$，无解.

综上，得　$2\leqslant a\leqslant\sqrt{6}$.

类比练习

6. 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+1}{2-x}<0\right\}$，$B=\{x\mid 4x+p<0\}$，若 $B\subseteq A$，求 p 的求值范围.

7. 集合 $P=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$Q=\{x\mid x^2+4x+a<0\}$，若 $P\cap Q=Q$，求 a 的求值范围.

8. 全集 $I=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$，$A=\{x\mid |x-2|>1\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0\right\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$.

9. $A=\{x\mid \sqrt{x-1}\leqslant 3-x\}$，$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$，

（1）若 $A\supset B$，求 a 范围；（2）$A\cap B=\varnothing$，求 a 范围.

范例 3　　点集问题

集合 $M=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，$T=\{(x,\ y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，若 $M\cap T=\varnothing$，求 a.

要点

1. 弄清各个点集的几何形状.

本题中 M 是不过点 $(2,\ 3)$ 的直线，而 T 在 $a\neq 1$ 时为直线，在 $a=1$ 时为空集.

2. 消去一个未知数得最简方程 $ax=b$. 当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，原方程组无解；当 $a\neq 0$ 时，对 $x=\dfrac{b}{a}$ 进行检验.

解　方法一（图象法）

（1）M，T 均表示直线，当它们互相平行且不重合时，$M\cap T=\varnothing$，

$\therefore\quad a+1=\dfrac{a^2-1}{a-1}$，且 $\dfrac{15}{a-1}\neq -2a+1$.

解方程，得　$a=-1$.

（2）M 不含点 $(2,\ 3)$，当 T 过点 $(2,\ 3)$ 时，$M\cap T=\varnothing$，

$\therefore\quad 2(a^2-1)+3(a-1)=15$，且 $a+1\neq -\left(\dfrac{a^2-1}{a-1}\right)$.

解方程，得　$a=-4$，$a=\dfrac{5}{2}$.

（3）当 $a=1$ 时，$T=\varnothing$，即 $M\cap T=\varnothing$.

综上，得　$a=1$，-1，$\dfrac{5}{2}$，-4，共

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ert