

高中数学必修 5 教参

前 言

本书是北京师范大学出版社 2004 年 9 月出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学 5 (必修)》的配套教师用书,其内容是介绍本册教科书的教学目的、编写意图与特色、教学内容及课时安排建议、教学建议、评价建议、课程资源参考,同时还提供了本册教科书各章节练习、习题、复习题的参考答案或提示,供执教教师在教学中参考使用。

本书第一章由李军洪、舒昌勇编写,第二章由洪建明、许书华编写,第三章由康宇、黄龙如编写,全书由戴佳珉和李延林统稿审定。希望各执教教师、教研员能在教学实践中继续不断总结,不断创新,用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书,使得课程改革的基本理念和《普通高中数学课程标准(实验)》所设定的课程目标得以真正落实。

2004 年 9 月

目 录

第一章 数列	(1)
§ 1 数 列	(8)
§ 2 等差数列	(12)
§ 3 等比数列	(19)
§ 4 数列在日常经济生活中的应用	(24)
课程资源参考	(29)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(35)
第二章 解三角形	(45)
§ 1 正弦定理与余弦定理	(49)
§ 2 三角形中的几何计算	(55)
§ 3 解三角形的实际应用举例	(57)
课程资源参考	(60)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(63)
第三章 不等式	(69)
§ 1 不等关系	(77)
§ 2 一元二次不等式	(80)
§ 3 基本不等式	(83)
§ 4 简单线性规划	(86)
课程资源参考	(93)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(99)
信息技术在数学中的应用案例	(107)

第一章 数 列

一、教学目标

1. 了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图像、通项公式),了解数列是一种特殊函数.
2. 通过实例,理解等差数列、等比数列的概念.
3. 探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式.
4. 能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系或等比关系,并能用有关知识解决相应的问题.
5. 体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系.
6. 在数列的研究中,从已知的数据推测这些数据的变化规律,这是科学发现中非常重要的能力.
7. 在等差数列、等比数列的通项公式及求和公式推导中,由特殊到一般,培养学生的归纳类比能力.
8. 培养学生的应用意识和创新精神,鼓励学生从多种角度寻求解决问题的方法,强调数学思想方法,注重对学生能力和素质的培养.

二、编写意图与特色

1. 创设问题情境,引导学生探索

依据《普通高中数学课程标准(实验)》要求,结合现代教育理念,将“问题情境—建立模型—解释与应用”作为课程内容的呈现方式,按照“明目标、创情境、浅入口、设梯度、多体验、重探求、会反思”的常规教学思路编写.

“问题是数学的心脏”“学校的数学教学必须以问题解决为核心”.本章各节注重引入,均由“实例分析”或“问题提出”创设情境,所提出的问题或实例都具有一定的代表性和趣味性,如等差数列引入中的地面砖问题,等比数列引入中的拉面问题,等比数列求和引入中的游戏问题等等.通过问题将内容自然引入,再通过对问题的分析解决,由特殊过渡到一般.这样做既降低了内容的难度,激发了学生学习的积极性,又使学生学到了重要的数学思想方法.

《普通高中数学课程标准(实验)》要求探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式.这里的探索是指学生的自主探索,而教师则起一个指导的作用,这反映了《普通高中数学课程标准(实验)》所倡导的新型学习方式.本章内容的处理恰到好处,所设计的问题及思维线路都易于教师激发学生去自主探索.

2. 函数思想,贯穿始终

本章内容紧扣《普通高中数学课程标准(实验)》,始终将函数作为主线贯穿其中.数列是一种特殊的函数,学习数列有助于学生进一步认识和理解函数思想.函数思想贯穿于高中数学的始终,在其他必修内容中出现的函数基本上是连续函数,以往数列的内容比较注重数列中各量之间关系的恒等变形.本章中对数列内容的处理,突出了函数思想、数学模型思想以及离散与连续的关系.

3. 与时俱进,落实双基

突出“双基”,与时俱进地认识“双基”.按《普通高中数学课程标准(实验)》要求,在此次教科书的编写中,注意既保证基本技能的训练,使学生通过必要的练习,掌握数列中各量之间的基本关系,又控制了训练题的难度和复杂程度,删减了繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容.努力改变传统的在纸上演化题型,花样翻新地搞偏题、怪题的做法,注重应用,关注学生对数列模型的本质的理解,以及运用数列模型解决实际问题的能力.本章专门设了“数列在日常经济生活中的应用”一节,另外还按《普通高中数学课程标准(实验)》要求,提供了关于教育储蓄的案例,这些都带有一定的研究性学习的性质.教师在教学中可以此为例,引导学生从生产实际和社会生活中寻找广泛的探究题材.

4. 注重思想方法,培养数学素养

强调数学思想方法,注重能力和素质的培养.正如日本著名数学家米山国藏所讲的“无论是对于科学工作者、技术人员,还是数学教育工作者,最重要的就是数学的精神、思想和方法,而数学知识只是第二位”,“作为知识的数学出校门不到两年可能就忘了,唯有深深铭记在头脑中的是数学的精神、数学的思想、研究方法和着眼点,这些都是终身受益的”.数学思想方法是前人在探索数学真理过程中逐步积累起来的,它大量地蕴含于数学的定理、原理、公式、法则和解题过程中.如本章中就包含有:数列定义渗透了函数的思想,用函数的知识来研究数列;由数列前几项求数列的通项时,渗透了从特殊性到一般性的思想;判断某一数列是否为数列中的项,渗透了方程的思想;等比数列求和公式中分 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 的讨论,渗透了分类讨论的思想;将数列实际问题抽象为数学模型时,渗透了化归思想;等差数列通项公式 $a_n = dn + (a_1 - d)$,当 $d\neq 0$ 时,关于 n 成一次型;等差数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$,当 $d\neq 0$ 时,关于 n 成二次型;等比数列通项公式 $a_n = \frac{a_1}{q}q^{n-1}$ ($q>0, q\neq 1$)关于 n 成指数型,它们的图像为无穷多个孤立的点,这些都渗透着数形结合的思想;学习等差数列和等比数列的有关性质时进行类比的方法,通过类比等差数列来促进学生主动获取等比数列的知识,在知识的发生过程中用类比的方法优化认知结构等等.

著名美国心理学家布鲁纳说过:“探索是教学的生命线.”《普通高中数学课程标准(实验)》要求探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式.教师应倡导积极主动、勇于探索的学习方式.综合运用观察、归纳、猜想、证明等方法研究数学,是一种非常重要的学习能力.事实上,在问题探索求解中,常常是先从观察入手,发现问题的特点,形成解决问题的初

步思路;然后用归纳方法进行试探,提出猜想;最后采用证明(或举反例)的方法来检验所提出的猜想.应该指出,能够充分进行上述研究方法训练的素材在高中数学里并非很多,而在本章里却多次提供了这种训练机会,因而在教学中应该充分利用,不要轻易放过.

5. 强调数学的文化价值

体现数学的文化价值.数学是人类文化的重要组成部分,其最根本的特征是它表达了一种探索精神和人文精神.从具体的数学概念、数学方法、数学思想及数学史中揭示数学的文化底蕴.数学课程应适当反映数学的历史、应用和发展趋势,数学对推动社会发展的作用,数学的社会需求,社会发展对数学发展的推动作用,数学科学的思想体系,数学的美学价值,数学家的创新精神和人文精神.数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观.当数学文化的魅力真正渗入教科书、到达课堂、融入教学时,数学就会更加平易近人,数学教学就会通过文化层面让学生进一步理解数学、喜欢数学、热爱数学.

数学教育只有深入到这门学科的文化层面,而不仅仅局限于学科的知识层面,才能获得真正的数学素养,在这样一种全新的视角下,对教科书的理解、教学的实施以及学生的培养自然也就会有更高的品位和更好的理念.正如张奠宙教授所指出的:“数学文化必须走进课堂,在实际数学教学中使学生在数学学习的过程中经常受到文化感染,产生文化共鸣,体会数学的品位和社会的人情味.”

本章对数学文化内容作了一些渗透.如在章头语中,就从科学史上的一个真实故事出发,引出了与本章内容相关的问题,使学生体会了科学家探索真理的精神(如:大胆假设、小心求证),感悟数学在人类社会发展中的重要作用;等差数列求和中的高斯思想,又可引出数学史上的一段佳话;北京天坛圆丘地面问题是中国传统文化与数学的完美结合;等差数列例7中数与形的交融反映的是一种数学美;储蓄问题则反映了数学的社会需求.本章内容注重体现人文精神,展现数学丰富内涵.从生活中观察和搜集到的素材入手,发现和研究那些遍布在我们身边,影响和改变着我们的生活,与科技、经济和社会的发展息息相关的数列问题.

三、教学内容及课时安排建议

§ 1	数列	2 课时
1.1	数列的概念	
1.2	数列的函数特性	
§ 2	等差数列	4 课时
2.1	等差数列	
2.2	等差数列的前 n 项和	
§ 3	等比数列	3 课时
3.1	等比数列	
3.2	等比数列的前 n 项和	
§ 4	数列在日常经济生活中的应用	2 课时

四、评价建议

1. 对课堂教学的自我评价

(1) 确定符合实际的内容范围和难度要求. 每一节课都应当是有针对性的, 没有一个适合任何学生的教科书和教案.

(2) 为学生创设宽松和谐的学习环境. 好的课应当有宽松和谐的学习气氛, 使学生能在探索和学习过程中产生丰富的情感体验. 有探索性的活动等都可以为学生创造和谐的环境. 如在本章中《普通高中数学课程标准(实验)》要求探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式. 这里的探索是指学生的自主探索, 而教师则起一个指导的作用, 这反映了《普通高中数学课程标准(实验)》所倡导的新型学习方式.

(3) 关注学生的学习过程, 让学生有体验数学的机会. 《普通高中数学课程标准(实验)》的一个重要理念就是为学生提供“做”数学的机会, 让学生在学习过程中去体验数学和经历数学. 数学学习, 特别是新概念、新方法的学习, 应当为学生提供具体的情境, 让学生在实际的操作、整理、分析和探索中去体会数学.

(4) 尊重学生的需要, 保护学生的自尊心和自信心. 不同班级的学生会有不同的特征, 同一个班级的学生也存在一定的差异. 好的课程应当关注学生的差异, 尊重不同学生在知识、能力、兴趣等方面的需要. 应当有针对性地设计不同层次的问题、不同类型和不同水平的题目, 使学生都有机会参与教学活动, 都能在学习过程中有所收获. 应恰当处理学生学习活动中不同类型的反馈信息, 保护学生的自尊心和自信心.

(5) 运用灵活的方法, 适应学生的实际和内容的要求. 教学方法的选择和运用应根据不同年龄和不同发展水平学生的需要, 同时也要符合不同的学习内容. 探索与发现的方法是值得提倡的, 但并不是所有的内容都用这样的方法. 教学新概念、新方法的内容时需要学生去探索, 但有些规定性的内容也可以用接受式的方法, 如 § 4 数列在日常经济生活中的应用一节中的几种模型.

(6) 为学生留下思考的时间. 正确处理好主体与主导的关系, 要求做到服务与指导相结合, 教师“教不越位”, 学生“学习到位”. 真正做到: “凡是学生能自己探索得出的, 决不替代; 凡是学生能独立思考的, 决不暗示. 要为学生多创造一点思考的时间, 多一点活动的余地, 多一点表现自我的机会, 多一点体尝成功的愉快.” 最简单的一个指标是教师提问以后是否给学生一定的思考时间, 至少有几秒钟的时间让学生想, 而不是急于下结论, 急于判定学生会还是不会. 特别是那些需要较深入理解和需要一定的创造性才能解决的问题, 更要让学生有一定的思考时间.

2. 对学生可从如下几方面评价

(1) 学生的数学才能, 要从知识、能力、理解、气质等多方面评价;

(2) 解决问题能力, 从形成问题、运用策略、获得结论、推广解法等方面评价;

(3) 数学交流能力, 从表达个人数学思想, 理解别人以书面或口头所表达的数学内容两方

面评价；

(4)推理能力,从是否正确理解和运用各种推理方法评价,对本章尤其要判断学生归纳能力的掌握情况；

(5)数学概念,对学生理解数学知识、掌握数学概念程度的评价；

(6)数学程序,对学生理解、辨别、选择、建立、执行数学程序的评价,如本章要求在具体的问题情境中,发现数列的等差关系或等比关系,并能用有关知识解决相应的问题(建模能力)；

(7)数学气质,对学生学习数学的兴趣、信心、灵活性、坚持性的评价。

3. 对学生评价的方法

(1) 试题评价

试题评价内容分基础部分和探究部分. 增加合作性、贴近学生生活的实例, 考试的思路让大家明白, 允许学生使用一切可使用的工具和资料. 试题分闭卷和开卷两种.

(2) 作业分析

作业是日常教学质量的体现, 作业分析是评价教学质量和教学水平的重要方式之一. 作业分析分两类: 一是分析学生现成的作业, 从作业完成质量以及改正质量来评价; 二是现场提供作业, 通过学生完成该项作业的水平和能力来评价.

(3) 综合能力测试

在学生解决问题的过程中, 观察学生的各种表现, 如学生怎样提出问题、分析问题、怎样进行推理, 怎样与他人交流. 评价者通过课堂教学的反映, 把握学生的学习心态, 发现教学过程中出现的问题或失误, 记录学生学习过程中的各种能力.

(4) 成长记录袋

成长记录袋用来记录学生成长的足迹, 是对学生个性化的评价. 成长记录袋内容有: 能够反映学生学习过程和成果的资料; 自己特有的解题方法; 印象最深的学习体验; 自认为满意或成功的小论文、作业; 教师和同学的评价; 探究活动的记录; 单元知识总结; 富有挑战性的问题; 喜欢阅读的资料; 自我评价与他人评价; 学生的自我小结或反思.

(5) 二次评价

由于学生所处的文化背景、家庭环境和自身思维方式不同, 因此学生在数学学习的发展上必然存在差异. 我们在评价学生时不能用一个标准, 要允许一部分学生经过自己的努力逐步达到要求, 保护学生的数学学习的热情和信心, 从而使他们在自身的基础上得到发展.

(6) 课堂观察

教师观察学生在课堂内的表现来评价学生三方面目标的达成情况, 主要从学生参与课堂教学的积极性、创造性和思维的活跃程度, 以及合作意识和能力等方面来考察.

(7) 合作学习评价

课标强调改变学生学习方式, 合作学习是最重要的学习方式之一, 注重了解学生的合作意识和合作能力, 合作学习评价主要采用观察问题和解决问题的方式进行.

五、教学建议

1. 教学方法建议

由于本章各节引入各具特色,均由“实例分析”或“问题提出”创设问题情境,这些具有代表性和趣味性的问题将内容自然引入,再通过对问题的分析和解决,由特殊过渡到一般.这样做既降低了内容的难度,又使学生学到了重要的数学思想方法.因此本章教学很适合于启发式教学和研究性学习,引导学生在问题情境中探索出问题的一般结论和解决问题的一般方法.

2. 教学手段建议

注重信息技术与数学课程的整合,在一些问题的运算中,也适当安排了计算器等现代教育技术手段的运用.某些图形,如图 1-16 用多媒体做成动画效果更好.等比数列“问题提出”中(1)的拉面问题,有条件的可以放一段录像.等差数列前 n 项和 S_n 是定义在正整数集上,关于 n 的二次函数,即 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ (不含常数项),其图像是抛物线 $y = \frac{d}{2}x^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)x$ 上的点 (n, S_n) ,但点的横坐标为正整数.在教学时,有条件的可借助计算机辅助教学,使学生充分观察 (n, S_n) 在二次曲线上为一系列孤立点的运动变化状态,从而使教学显得生动、形象.

章头语

章头语的内容是数列与小行星的发现,它从科学史上的一个真实故事出发,引出了与本章内容相关的问题,使学生对数列有了一个初步的印象.讲述时要向学生分析提丢斯将行星到太阳的距离与数列

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots \quad \textcircled{1}$$

相联系的思维过程,以及数列①的特征及规律.

1766年,普鲁士天文学家提丢斯(Titius, 1729—1796)分析了已知的6个行星到太阳距离的一组数据:

$$0.39, 0.72, 1, 1.52, 5.2, 9.5. \quad \textcircled{2}$$

他发现,虽然这一组数据很难看出有何规律,但若作如下变形:

$$0.39 \approx 0.4 = 0.4 + 0, \quad 0.72 \approx 0.7 = 0.4 + 0.3, \quad 1 = 0.4 + 0.6,$$

$$1.52 \approx 1.6 = 0.4 + 1.2, \quad 5.2 = 0.4 + 4.8, \quad 9.5 \approx 10 = 0.4 + 9.6.$$

而数列 $0, 0.3, 0.6, 1.2, 4.8, 9.6$ 是有一定规律的,从而得到下表(单位:天文单位)

行星 距 离 类别	水星	金星	地球	火星	?	木星	土星	?	?
实际距离	0.39	0.72	1	1.52	?	5.2	9.5	?	?
假设距离	$0.4+0$	$0.4+0.3$	$0.4+0.6$	$0.4+1.2$	$0.4+2.4$	$0.4+4.8$	$0.4+9.6$	$0.4+19.2$...

天文学家据此提出假设:太阳系中各行星与太阳的距离应是 0.4 与数列

$$0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, \dots$$

中某一项的和,并由此断言:在与太阳距离为 0.4 与该数列某一项的和的位置上一定存在着尚未发现的行星.

自然界中很多现象是有一定规律可循的,由此也可对学生进行辩证唯物主义教育.

由章头语还可引导学生学习科学家探索真理的精神(如大胆假设、小心求证),感悟数学在人类社会发展中的重要作用.

§ 1 数 列

1.1 数列的概念

一、教学目标

通过日常生活中的实例,了解数列的概念和几种简单的表示方法(列表、图像、通项公式),了解数列是一种特殊函数.

1. 使学生理解数列的定义、能够区分项和项数这两个不同的概念.
2. 使学生掌握通项公式概念,能够用不完全归纳法写出一些数列的通项公式.

本节主要内容有:数列的定义、项数、项和通项公式. 教学重点是数列的定义、通项公式. 教学难点是应用不完全归纳法推导出数列的通项公式.

二、设计思路与教学建议

1. 在数列概念的教学中,可以多举几个数列的实例,以使学生理解数列的有关概念,如:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

茶杯每个 1.5 元,则购 n 个茶杯所需钱数 $f(n) = 1.5n$. 购 1 个, 2 个, 3 个, 4 个, …, 100 个茶杯所需钱数(元)排成一列数:

$$1.5, 3, 4.5, 6, \dots, 150.$$

2. 有序性是数列的基本属性,两组完全相同的数,由于排列顺序的不一样,就构成了不同的数列,用记号 $\{a_n\}$ 表示数列时,不能将 $\{a_n\}$ 看成一个集合,这是因为:(1)数列 $\{a_n\}$ 的项是有序的,而集合的元素是无序的;(2)数列 $\{a_n\}$ 可以有相等的项,如数列 $1, 1, 2, 2, \dots$,但集合的元素是互异的.

3. 不能说数列是按数的规律排列的一列数,它只是按一定次序排列的一列数.

4. 当一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与项数 n 之间的关系可以用一个公式 $a_n = f(n)$ 表示时,我们就把这个公式称之为数列的通项公式. 通项公式的教学,应注意使学生明确以下几点:

- (1) $\{a_n\}$ 与 a_n 不同, $\{a_n\}$ 表示数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 而 a_n 只表示数列的第 n 项.

- (2) 与不是所有函数关系都能用解析式表示类似,并不是所有数列都有通项公式,如 π 精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, … 的不足近似值排列成一列数:

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots$$

所有的质数从小到大排成一列数:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

(注:古希腊数学家欧几里得在公元前 300 年就已证明出:存在着无限多个质数.但迄今为止,尚未发现质数有何排布规律.)

上面两个数列都不能用通项表示.

(3)同一个数列的通项公式,其表达形式并不一定是唯一的,有的数列的通项公式形式并不相同,但它们表示同一个数列.如数列:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

的通项公式可以写成 $a_n = (-1)^{n+1}$, 或者写成

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数,} \\ -1, & n \text{ 是偶数;} \end{cases}$$

也可以写成 $a_n = \cos(n+1)\pi$.

(4)数列中一类重要而有趣的问题是从简单的做起,通过观察、分析、归纳猜想结论(进而用数学归纳法证明我们自己猜想的正确性),这一研究问题的方法和过程,与数学家发现结论、研究前沿数学的方法是相似的(甚至是相同的).

对于一个数列,如果只知道它的前几项,或者有限项,而没有指出它的变化规律,那么与它对应的数列通项公式就可以有许多个,由此归纳猜想出来的“通项公式”不一定是唯一的,而只是满足条件的许多通项公式中的一个.

如对数列 $3, 5, 7, 9, \dots$ 通项公式 $a_n = 2n+1$, 我们可以写出另一个通项公式,使以这个公式算出来的前 4 个项就是 $3, 5, 7, 9$. 例如取

$$a'_n = 2n+1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

很明显,当 $n=1, 2, 3, 4$ 的时候,它与 a_n 算出来的结果相同,但是当 $n>4$ 的时候,应用公式 a_n 和 a'_n 算出的结果就不同了,例如

$$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11,$$

而

$$\begin{aligned} a'_5 &= 2 \times 5 + 1 + (5-1)(5-2)(5-3)(5-4) \\ &= 10 + 1 + 24 = 35. \end{aligned}$$

通常,遇到这种题目,我们总是设法写出一个比较简单的通项公式就可以了.

5. 数列的通项公式在数列中占有极其重要的位置,它是数列的核心.

可以用数列的通项公式求数列的任意一项的值;反之,如果已知一个数是数列的一项,那么只要将这个数代入 a_n , 就可以求出这个数是数列的哪一项. 利用这种方法还可以判断一个数是否是数列中的项并研究数列的一般性质(如单调性、最大(小)值、图像以及周期性等). 弄清通项公式的意义、理解通项公式的作用、熟练掌握求数列通项公式的一般方法,将对数列的学习起到非常重要的作用.

在数列的各种表示方法中,运用列表法给出数列,优点是内容具体、方法简单,但要确切表示一个无穷数列或项数比较多的有穷数列比较困难,在这方面,此法与集合的列举法表示的效果相似;运用递推法给出数列,虽然揭示了一些数列的性质,但要了解数列的全貌,计算也很不方便;运用公式法表示数列(即给出数列的通项公式),则具有明显的优点,数列 $\{a_n\}$ 的通项公

式已知,可以求出数列 $\{a_n\}$ 中任意指定的一项,也有利于对数列的研究.

6. 根据数列的前几项,写出一个数列通项公式的教学是本节的教学难点.在教学时应注意培养学生的观察、分析、类比和归纳能力.应注意首先将学生的注意力集中到寻求数列的项与项数的关系上来,然后看看这几项的表示式中哪些部分是变化的,哪些部分是不变的,再探索各项中变化部分与对应的项数之间关系,从而归纳出项与项数关系的规律,写出通项公式.

如一组数:1 4 9 1 6 2 5 3 6 4 9 6 4 8 1 1 0 0 1 2 1 该如何记住?

7. 本节实例分析中所给出的6个数列都来自生活及数学本身,尤其是实例(2)GDP及实例(3)“人口问题”,分析各年数据、找出变化规律,对数量的估计和发展趋势的预测是国家制定国民经济发展和制定一系列相关政策的基础.实例(6)给出的是一个常数列的实际模型.

1.2 数列的函数特性

一、教学目标

1. 了解数列是一种特殊函数.
2. 判别数列的单调性.

数列的图像表示及数列的单调性是本节重点.本节的难点是如何利用数列与函数的关系灵活解决有关的实际问题.

二、设计思路与教学建议

1.《普通高中数学课程标准(实验)》特别指出要体现数列是一种特殊函数,通过列表、图像、通项公式表示数列,把数列融于函数之中.

由于数列是一种特殊形式的函数,因此有关函数的观点和方法都适用于数列,我们特别关注数列的特征及变化规律.

实例分析中的图1-4来源于上海版高二地理课本P60.

2. 像函数的图像一样,我们也可以把一个数列用图像来表示.这时,我们把平面直角坐标系横轴的正方向,作为表示数列的项数 n 的轴;把纵轴作为表示数列各项的值 a_n 的轴.在作图时,为简便起见,在直角坐标系两坐标轴上取的单位长度可以不同.

3. 数列概念与函数概念的联系

与数列对应的函数是一种定义域为正整数集(或它的前 n 数组成的有限子集)的函数,它是一种自变量“等距离”地离散取值的函数.从这个意义上看,它丰富了学生所接触的函数概念的范围.但数列与函数并不能画等号,数列是相应函数的一系列函数值.基于以上联系,数列也可用图像表示,从而可利用图像的直观性来研究数列的性质.数列的通项公式实际上是相应函数的解析表达式.

4. 数列研究的方法

常用的有两种,一种是利用函数观点去研究,这种方法较多地用于研究数列的性质和图

像. 另一种方法是根据数列的离散特点, 从项与项的关系来研究, 这是主要的研究方法.

用函数的观点看数列, 有其方便之处, 但它没有充分利用数列的特点, 例如函数常用的三种表示法, 数列都可搬用, 而数列特有的表示法: 递推表示法、连同列表法和图像法, 也因为数列的特点, 可以用一条轴作图像, 一列数作表格. 即使是单调性的研究, 数列中只需要计算 $a_{n+1} - a_n$, 较函数单调性的研究要简洁得多.

因此, 考虑到数列特点的研究自然占有重要地位.

数列具有一般函数没有的特点:

- (1) 可以明确指出下一项;
- (2) 可以明确求出指定的某一项.

这就决定了从研究项与项的关系出发的方法是可行的, 两个典型的例子是等差数列和等比数列.

5. 单调性除利用定义判别外, 还可以利用其函数性质判定. 如例 3(1) 亦可设 $a_n = 3 - n$, 因为一次函数 $y = 3 - x$ 是递减函数, 因此数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

例 4 表示的是摆动数列, 注意 $|a_n|$ 递减且趋于 0.

例 5 有点难度, 重点分析: (1) 为何各站要编号;

(2) 各站的剩余邮件数的计算;

(3) 各站的剩余邮件数 a_n 是其站号 n 的函数.

可布置学生课后思考: 若将例 5 中 8 站换为 6 站或 9 站, 该题结果如何?

§ 2 等差数列

2.1 等差数列

一、教学目标

1. 理解等差数列的定义,能够应用定义判断一个数列是否为等差数列,并确定等差数列的公差.
2. 探索并掌握等差数列的通项公式,能够应用其公式解决等差数列的问题.
3. 体会等差数列与一次函数的关系,能够应用一次函数的性质解决等差数列问题.
4. 掌握等差中项的定义和等差数列项的性质,能够应用等差中项的定义和等差数列项的性质解决问题.
5. 能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,并能用有关知识解决相应的问题.

本节主要内容有:等差数列的定义、通项公式和等差数列的函数特性,教学重点是等差数列的定义、通项公式.本节的难点是在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,并能灵活运用这些公式解决相应的实际问题.

二、设计思路与教学建议

1. 等差数列的概念是通过归纳三个数列的共同特点给出的,要启发学生积极思考,大胆猜想,找出“问题提出”中数列①,②,③的共同特点,由此得出等差数列的定义及公差 d 的概念.

引入可补充例子:小兵开始学习英语时,他只知道 5 个单词:hello, thank, you, bye, I. 他决定从明天起,每天背记 10 个新单词.假如他能如愿,那么从今天开始,他的单词量将逐日递增,依次为:

$$5, 15, 25, 35, \dots$$

多少天后他的单词量可达到 3 000 呢?

“问题提出”(2)说明了等差数列在产品标准化中的应用.

2. 等差数列的定义是推导等差数列的通项公式、前 n 项和公式的基础,因此教学中首先要讲清楚等差数列的定义,而且应自始至终紧扣这个定义.

在讲解等差数列的定义时,应注意以下几点:

(1) 注意防止求公差时,把相邻两项相减的顺序颠倒.虽然等差数列的任意一项减去后一项的差也是一个常数,但它不是公差,而是公差的相反数.

(2) 要证明一个数列为等差数列,只要证明对任意正自然数 n , $a_{n+1} - a_n$ 是同一个常数.这

里所说的常数实际上指 $a_{n+1} - a_n$ 是一个与 n 无关的数. 教学中应注意防止学生把不完全归纳法当作论证的方法. 如学生通过计算 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4$ 等式的值后, 发现它们都是同一个常数, 从而得出该数列为等差数列. 如果学生出现这种错误, 教学中应举例说明由不完全归纳法得出的结论具有或然性, 从而帮助学生及时纠正错误.

(3) 当公差 $d=0$ 时, 等差数列是一个常数数列.

3. 通项公式的教学, 应注意以下几点:

(1) 等差数列通项公式的推出有多种方法, 但相对来说, 归纳猜想的方法更为重要, 因此教材中是利用不完全归纳法来得到通项公式的猜想, 但囿于难度及内容所限并未给出严格的证明. 从普通的事例联想到有关知识, 从简单的情况入手, 通过猜测归纳, 发现并证明具有一般规律的结论. 这种联想、猜测、归纳、证明的途径, 如果能在学习的过程中经常使用, 将会有助于学生开拓思路, 帮助学生发现规律, 提高解决问题的能力 and 开拓创新精神.

在实际教学中还可以利用叠加法推导得出等差数列的通项公式:

由

$$\begin{array}{l}
 a_{n+1} - a_n = d, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 则有} \\
 \left. \begin{array}{l}
 a_2 - a_1 = d \\
 a_3 - a_2 = d \\
 a_4 - a_3 = d \\
 \dots\dots \\
 a_n - a_{n-1} = d
 \end{array} \right\} \text{ 相加得 } a_n - a_1 = (n-1)d,
 \end{array}$$

即

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

当 $n=1$ 时, 上式两边都等于 a_1 , 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (n \in \mathbf{N}_+).$$

将 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 整理成 $a_n = dn + (a_1 - d)$ 的形式, 然后通过对函数式的分析使学生明确: 以项数 n 为点的横坐标, 项 a_n 为点的纵坐标的点 (n, a_n) , 在一条以公差 d 为斜率的直线上. 点 $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n), \dots$ 在一条以公差 d 为斜率的直线上, 所以对该直线上任意二点 $(n, a_n), (m, a_m)$ 有

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad (m \neq n).$$

(2) 在明确等差数列通项公式特征的基础上, 教师应适当地引导学生分析等差数列的单调性: 当 $d > 0$ 时, 等差数列是递增数列; 当 $d = 0$ 时, 等差数列是常数数列; 当 $d < 0$ 时, 等差数列为递减数列.

(3) 通过利用通项公式解决等差问题, 应引导学生明确: 等差数列的通项公式与四个量有关, 即首项 a_1 , 公差 d , 项数 n , 第 n 项 a_n , 而且首项 a_1 , 公差 d 是等差数列的两个关键量.

4. 例 1(1) 要求用等差数列的定义判断, 例 1(2) 也可以举出反例, 说明其不满足定义.

例 2 是利用等差数列的定义, 用不完全归纳法归纳出结论, 例 2 的目的是由特殊到一般, 完成它后可以很轻松地得出一般等差数列的通项公式(可指导学生完成).

例 3、例 4 是等差数列的定义及通项公式的运用, 例 3(1) 是由特殊到一般, 例 3(2) 是由一

般到特殊. 例 3(2)也可由 $a_{n+1} - a_n = d$ 求出. 例 4 用的是待定系数法, 包含着方程的思想.

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 $\Leftrightarrow a_n = pn + q$ (p, q 为常数, 公差是 p).

例 5 是体现等差数列与线性函数(直线)的关系. 已知一个等差数列的任意两项, 可以确定这个数列的通项, 这是因为两点可以确定一条直线; 也可以从方程的角度来理解, 两个量 (a_1, d) 可由二元一次方程组求出.

例 6 关键是分析发现梯子各级所存在的等差关系, 也可以利用等差中项(a, b, c 成等差数列 $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$)的概念.

5. 在解有关等差数列应用题时, 如果已知三个数成等差数列, 解题时一般可将这三个数分别设为 $a-d, a, a+d$ (其中公差为 d). 这样设通常可以使计算变得较为简便. 如果已知四个数成等差数列呢?

6. 可指导学生探索研究下面问题:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差为 d , 则数列 $\{a_{2n}\}, \{a_{3n}\}$ 是否是等差数列? 如果是, 公差又是什么?

(2) 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列, 公差分别为 d_1, d_2 , 则数列 $\{ca_n\}$ (c 是常数), $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}, \{3a_n + 5b_n\}$ 是否是等差数列? 如果是, 公差又是什么?

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $m+n=p+q, m, n, p, q \in \mathbf{N}_+$, 试判断 $a_m + a_n$ 与 $a_p + a_q$ 的关系.

2.2 等差数列的前 n 项和

一、教学目标

1. 探索并掌握等差数列前 n 项和公式.
2. 能够应用等差数列前 n 项和公式解决等差数列的问题.

本节主要内容有: 等差数列前 n 项和公式, 教学重点是等差数列前 n 项和公式的推导过程和思想. 本节的难点是在具体的问题情境中, 如何灵活运用这些公式解决相应的实际问题.

二、设计思路与教学建议

1. 在讲解等差数列的前 n 项和公式时, 可以先向学生讲解高斯巧妙计算 $1+2+3+\dots+100$ 的故事, 重点是分析理解高斯的求和思想, 有条件的教师可将图 1-16 做成多媒体课件(拼图), 由此启发学生求等差数列前 n 项和的思路. 要注意的是, 无论在教学中采用什么教学方法, 教师都应注意启发或分析求和的思路.

高斯在青年时就成为著名的数学家了, 数学成为高斯一生中最心爱的研究科目. 他有多方面的兴趣, 对古代语言、天文、物理都有钻研、发现和发明, 他也是一位了不起的天文学家和物理学家.

高斯和很多著名科学家一样, 从小就非常细心地观察和注意周围发生的一切现象, 往往从