

编 委 会

主	任	蓝弘毅	秦 冶				
副	主 任	朱 海	李国华	张宝庆	许博志		
编	委	李敏智	殷强伟	陈 静	李海燕	高 伟	
		王海宁	金 涛	吕浩平	郝 捷	王建忠	
		潘慰高	张 帆	陆 雄	张 辉	薛 辉	
		秦铭荣	张谦文	章 琴	董益文	叶 帆	
		文 一	单士兵	姜 斌	刘 坤	王志宇	
		赵小琴	钱 峰	孙文海	刘 燕	黄元燕	
		雨 苑	詹志强	范 雄	杜思思	胡瑞平	
		童 景	张爱军				
本 册 主 编		潘慰高					
本 册 编 者		鲁有专	苏逸民	马海波			

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥赛金牌全解题库/ 潘慰高主编. —南京:

南京大学出版社, 2004. 5

ISBN 7—305—04181—5

I. 高... II. 潘... III. 数学课—高中—习题

IV. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021387 号

书 名	高中数学奥赛金牌全解题库
主 编	潘慰高
编 者	鲁有专 苏逸民 马海波
出版发行	南京大学出版社
社 址	南京市汉口路 22 号 邮编 210093
电 话	025-83596923 025-83592317 传真 025-83686347
网 址	http://press.nju.edu.cn
电子邮件	nupress1@public1.ptt.js.cn
经 销	全国各地新华书店
印 刷	江苏省地质测绘院印刷厂
开 本	787×1092 1/16 印张 25 字数 565 千
版 次	2004 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN	7—305—04181—5/G • 745
定 价	29.50 元

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

目 录

一、函数	(1)
(一) 函数的概念与性质	(1)
(二) 基本初等函数	(17)
二、数列	(48)
(一) 等差数列与等比数列	(48)
(二) 递推数列与数学归纳法	(63)
三、不等式	(105)
(一) 不等式的解法与证明	(105)
(二) 基本不等式及其应用	(117)
四、三角	(150)
(一) 三角函数的图像与性质	(150)
(二) 三角恒等变形	(163)
五、复数	(190)
(一) 复数的概念与运算	(190)
(二) 排列组合、概率与向量	(203)
六、解析几何	(228)
(一) 直线与圆	(228)
(二) 二次曲线	(234)
七、立体几何	(277)
(一) 位置关系	(277)
(二) 度量计算	(281)
八、平面几何	(311)
(一) 几何证明	(311)
(二) 几何计算	(318)
九、初等数论	(330)
(一) 整数的概念与性质	(330)
(二) 整除与同余	(342)
十、组合数学	(365)
(一) 组合问题	(365)
(二) 逻辑推理	(373)

前言

数学,是一门学好各门学科的重要的基础学科。数学奥林匹克竞赛活动,是学生课外活动中最具吸引力的活动形式之一。数学奥林匹克竞赛对激发学生的学习兴趣,开发智力和潜能,培养探索力、想象力和创造力,开拓视野有着非常积极的作用。

“课内打基础,课外发展能力”,这句话说得不一定全面,但有一定的道理。本书作者长期参加数学竞赛辅导和数学竞赛命题工作,最大的体会是:做数学竞赛题,不仅仅是为了参加竞赛,更重要的是为了提高自己的思维能力,激活自己的潜能,争取在中考和高考中取得好成绩,为继续深造打好基础。

本书在内容编写上的主要特点有:

1. 本书所安排的各个知识点都尽可能在现行中学数学教科书相应的知识点上延伸或拓宽,并尽可能与教科书同步。重视基础,是课内题自然的延伸与拓展。例题给出详细思路和解答过程,习题也提供全解答案,启发同学们掌握方法,便于同学们自学。

2. 本书中例题、习题尽量选自各种竞赛和优秀试题,选题突出新,是最新竞赛题的精选。并且书中对奥赛解题思路、方法进行了总结归纳,具有全新的解题方略。

3. 本书创意别致,编写体例新颖实用。每个专题的栏目设置,[提示概要]为本专题的引言和概述;[举证例题]对每道例题进行题意分析、解法剖析和难点辨析;[点拨关键]在数道同类例题之后,进行解法归纳,归纳总结出同类题的解题思路、规律技巧和破题关键;[演练赛题]是同学们在学习例题的解法之后自己动手实践的习题部分,数学的操作性很强,光看不做是不可能掌握方法的;[全解答案]根据奥数学习的客观实际情况给出习题的全解,方便同学们在做题后进行对比总结,达到切实掌握的效果。

4. 本书内容由浅入深,循序渐进,适合学生的年龄特点与知识结构,并注意与生活实际的联系。强调趣味性,非常规的数学竞赛题只选能开发智力且富有创新的题。

5. 本书具有很强的思考性和开放性。启迪思维,一题多解,帮助学生掌握方法,形成技能,帮助学生学会举一反三,触类旁通。部分习题解法开放、结果开放,充分发挥同学们的想象力和创造力。

“数学使人聪明”。我们相信,通过数学竞赛活动的推动,将使蕴藏在广大青少年身上的各种智力的、非智力的潜能充分发挥出来,使他们的思维水平表现得更高、思维活动来得更快,使他们的学习意志、学习能力表现得更强。数学奥林匹克重在参与——不仅是为了超过别人,而且是为了超过昨天的自己。

编者的话

“课内打基础,课外发展能力”,这句话说得不一定全面,但有一定的道理.本书作者长期参加数学竞赛辅导和省初中数学竞赛命题工作,最大的体会是:做数学竞赛题,不仅仅是为了参加竞赛,更重要的是为了提高自己的思维能力,激活自己的潜能,争取在中考和高考中取得好成绩,为继续深造打好基础.

基于以上的认识,我们曾编写了大量的小学、初中、高中数学竞赛辅导资料和初、高中助学辅导教材,在全国有较大影响的有《中国高考数学考点50讲》、《走向清华北大·高考阶梯训练》(数学)、《特高级教师点拨高一、高二数学》等.尤其近两年编写的《数学奥林匹克天天练》(初中各册),一年之内加印8至10次之多,这在竞赛辅导书林林总总、目不暇接的今天是不可思议的.参加编写的《华罗庚学校数学读书》(初一分册),也是销路最好、口碑最佳的一本.根本的原因是想读者所想,从读者的实际出发,将做竞赛题和做课内习题有机地结合起来.

本书编写,继承了以上各书的优点.选题突出新,是最新竞赛题的精选.重视基础,是课内题自然的延伸和拓展.强调趣味性,非常规的数学竞赛题只选能开发智力且富有创新的题.

本书能够顺利完成,是和纪国顺同志的大力支持分不开的,借此机会表示衷心感谢!

作者

2003.12

一、函数

提示概要

函数是中学数学的重要概念. 研究函数主要讨论函数的定义域与值域、有界性、单调性、奇偶性、周期性、最值与极值、零点与正负区间等性质, 以及复合函数的单调性与奇偶性等性质.

在中学阶段, 主要研究一次函数、二次函数、正比例函数与反比例函数、指数函数、对数函数、三角函数等一些基本初等函数.

另外, 在数学竞赛中, 我们还接触到一些有关函数方程、函数的迭代、高斯函数等与函数有关的问题.

由于函数有广泛的应用, 所以学习了函数以后, 除了要掌握函数的概念和性质外, 还要善于构造函数进行解题.

(一) 函数的概念与性质

举证例题

1. (2001 · 全国) 已知 a 为给定的实数, 那么, 集合 $M = \{x | x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集的个数为

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 不确定

● 解析: 由方程 $x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0$ 的根的判别式 $\Delta = 1 + 4a^2 > 0$ 知, 方程有两个不相等的实数根, 从而 M 有 2 个元素, 于是可得集合 M 有 $2^2 = 4$ 个子集.

故应选 (C).

2. (2000 · 全国) 设全集是实数集, 若 $A = \{x | \sqrt{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x | 10^{x^2-2} = 10^x\}$, 则 $A \cap \overline{B}$ 是

- (A) $\{2\}$ (B) $\{-1\}$ (C) $\{x | x \leq 2\}$ (D) $\emptyset$

● 解析: 由 $\sqrt{x-2} \leq 0$ 得 $x = 2$, 即 $A = \{2\}$. 由 $10^{x^2-2} = 10^x$ 得 $x^2 - x - 2 = 0$, 即 $B = \{-1, 2\}$, 从而 $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

故应选 (D).

3. (1998 · 全国) 若 $a > 1$, $b > 1$, 且 $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$, 则 $\lg(a-1) + \lg(b-1)$ 的值

- (A) 等于 $\lg 2$ (B) 等于 1
(C) 等于 0 (D) 不是与 a, b 无关的常数

- **解析:** 因为 $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$, 所以 $a+b=ab$, 即 $(a-1)(b-1)=1$.
 因此, $\lg(a-1) + \lg(b-1) = 0$.
 故应选(C).

4. (1998 · 全国) 若非空集合 $A = \{x | 2a+1 \leq x \leq 3a-5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq B$ 成立的所有 a 的集合是

- (A) $\{a | 1 \leq a \leq 9\}$ (B) $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$
 (C) $\{a | a \leq 9\}$ (D) $\emptyset$

- **解析:** 由题意得 $A \subseteq B$.

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a+1 \geq 3, \\ 3a-5 \leq 22, \\ 3a-5 \geq 2a+1. \end{cases} \quad \text{解得 } 6 \leq a \leq 9.$$

故应选(B).

5. (2001 · 湖南) 若 $\log_a \frac{3}{5} < 1$ 则 a 的取值范围是

- (A) $0 < a < \frac{3}{5}$ (B) $a > \frac{3}{5}$ 且 $a \neq 1$
 (C) $\frac{3}{5} < a < 1$ (D) $0 < a < \frac{3}{5}$ 或 $a > 1$

- **解析:** 当 $a > 1$ 时, 由于真数 $\frac{3}{5} < 1$, 故 $\log_a \frac{3}{5}$ 恒小于 1. 于是, $a > 1$, 满足题意.

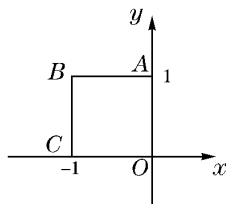
当 $\frac{3}{5} \leq a < 1$ 时, $\log_a \frac{3}{5} \geq \log_a a = 1$, 不符合题意.

当 $0 < a < \frac{3}{5}$ 时, 对数值小于 1, 满足题意.

故应选(D).

6. (1999 · 广西) 如图, 已知函数 $y = 2x^2$ 在 $[a, b]$ ($a < b$) 上的值域为 $[0, 2]$ 则点 (a, b) 的轨迹为图中的

- (A) 线段 AB、BC (B) 线段 AB、OC
 (C) 线段 OA、BC (D) 线段 OA、OC



- **解析:** 由 $y = 2x^2 \geq 0$ 知, 当 $y = 0$ 时, $x = 0$. 所以, $0 \in [a, b]$. 又当 $y = 2$ 时, $x = 1$ 或 $x = -1$. 有如下两种可能, 即

(i) 若 $1 \in [a, b]$, 则由 $a < b$ 且函数在 $\mathbf{R}^+$ 上的单调性知 $b = 1$, 且 $-1 \leq a \leq 0$. 对应的轨迹为线段 AB.

(ii) 若 $-1 \in [a, b]$, 则由 $a < b$, 且函数在 $\mathbf{R}^-$ 上的单调性知 $a = -1$, 且 $0 \leq b \leq 1$, 对应的轨迹为线段 BC.

故应选(A).

7. (2003 · 全国) 已知 x, y 都在区间 $(-2, 2)$ 内, 且 $xy = -1$, 则函数 $u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-x^2}$ 的最小值是

- (A) $\frac{8}{5}$ (B) $\frac{24}{11}$ (C) $\frac{12}{7}$ (D) $\frac{12}{5}$

● 解析: 因为 $y = -\frac{1}{x}$, 所以

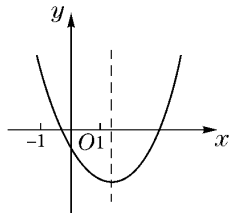
$$u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9x^2}{9x^2-1} = 1 + \frac{35}{37 - (9x^2 + \frac{4}{x^2})}.$$

又因为 $x \in (-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$, 所以当 $9x^2 = \frac{4}{x^2}$, 即 $x^2 = \frac{2}{3}$ 时, $9x^2 + \frac{4}{x^2}$ 的值最小, 此时 u 有最小值 $\frac{12}{5}$.

故应选(D).

8. (2002 · 湖南) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示. 记 $N = |a+b+c| + |2a-b|$, $M = |a-b+c| + |2a+b|$, 则

- (A) $M > N$ (B) $M = N$
(C) $M < N$ (D) M, N 的大小关系不能确定



● 解析: 如图, $f(1) = a+b+c < 0$, $f(-1) = a-b+c > 0$, $a > 0$, $f(0) = c < 0$, $-\frac{b}{2a} > 1$.

从而 $b < 0$, $2a+b < 0$, $2a-b > 0$, $a-c > 0$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } M - N &= |a-b+c| + |2a+b| - |a+b+c| - |2a-b| \\ &= (a-b+c) + (a+b+c) - (2a+b) - (2a-b) \\ &= -2(a-c) < 0. \end{aligned}$$

故应选(C).

9. (2002 · 山东) 已知函数 $f(x) = \frac{a-x}{x-a-1}$, $f^{-1}(x)$ 的图像的对称中心为 $M(m, 3)$, 则 a 等于

- (A) 2 (B) 3 (C) -2 (D) -4

● 解析: 由 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq a+1\}$ 知, $f(x)$ 的图像的对称中心 M' 的横坐标为 $a+1$. 而 $f^{-1}(x)$ 图像的对称中心 M 与 M' 关于直线 $y=x$ 对称, 所以 M 的纵坐标为 $a+1$. 由 $a+1=3$, 得 $a=2$.

故应选(A).

10. (2002 · 山东) 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. 映射 $f: M \rightarrow N$, 则对任意的 $x \in M$, $x + f(x) + xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为

- (A) 122 (B) 15 (C) 50 (D) 27

● 解析: 令 $y = x + f(x) + xf(x)$. 显然, 当 $f(-1), f(0), f(1)$ 取定, 则 y 随之确定.

当 $x = -1$ 时, $y = -1 + f(-1) - f(-1) = -1$, y 恒为常数, $f(-1)$ 有 5 种选择;

当 $x = 1$ 时, $y = 1 + 2f(1)$. 因 $f(x)$ 是正整数, y 恒为奇数, $f(1)$ 有 5 种选择;

所以, 使 y 恒为奇数的映射 f 共有 $5 \times 2 \times 5 = 50$ 个.

故应选(C).

11. (第 16 届哈尔滨) 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[1, \pi]$ 上单调递增. 那么, $f(-\pi), f(-\frac{\pi}{2})$ 与 $f(\log_{0.5} 4)$ 之间的大小关系是

(A) $f(-\pi) > f(-\frac{\pi}{2}) > f(\log_{0.5} 4)$

(B) $f(-\pi) > f(\log_{0.5} 4) > f(-\frac{\pi}{2})$

(C) $f(-\frac{\pi}{2}) > f(-\pi) > f(\log_{0.5} 4)$

(D) $f(-\frac{\pi}{2}) > f(\log_{0.5} 4) > f(-\pi)$

● 解析: $\log_{0.5} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, -\pi < -2 < -\frac{\pi}{2}$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[1, \pi]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, -1]$ 上单调递增.

所以 $f(-\pi) < f(-2) < f(-\frac{\pi}{2})$.

故应选(D).

12. (1996 · 昆明) $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则 $f(\log_{\frac{1}{2}} 24)$ 的值是

(A) $-\frac{23}{24}$

(B) $-\frac{5}{6}$

(C) $-\frac{5}{2}$

(D) $-\frac{1}{2}$

● 解析: 因为 $4 < \log_2 24 < 5$, 所以 $-5 < \log_{\frac{1}{2}} 24 < -4$,

$$\text{所以 } f(\log_{\frac{1}{2}} 24) = f(4 + \log_{\frac{1}{2}} 24) = f(4 - \log_2 24) = -f(\log_2 24 - 4)$$

$$= -f(\log_2 \frac{24}{16}) = -f(\log_2 \frac{3}{2}) = -(2^{\log_2 \frac{3}{2}} - 1) = 1 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

故应选(D).

13. (2002 · 湖南) 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(-x)$ 的反函数是 $y = f^{-1}(-x)$, 则

(A) $y = f(x)$ 是奇函数

(B) $y = f(x)$ 是偶函数

(C) $y = f(x)$ 既是奇函数, 也是偶函数

(D) $y = f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数

● 解析: 由 $y = f^{-1}(-x)$ 得 $f(y) = -x$, 故 $y = -f(x)$ 是 $y = f^{-1}(-x)$ 的反函数, 即 $-f(x) = f(-x)$, 所以 $y = f(x)$ 是奇函数.

故应选(A).

14. (2002 · 全国) 函数 $f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$

(A) 是偶函数但不是奇函数

(B) 是奇函数但不是偶函数

(C) 既是偶函数又是奇函数

(D) 既不是偶函数也不是奇函数

● 解析: 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{当 } x \neq 0 \text{ 时, 因为 } f(-x) &= \frac{-x}{1-2^{-x}} - \frac{-x}{2} = \frac{-x2^x}{2^x-1} + \frac{x}{2} \\ &= \frac{x+x(2^x-1)}{1-2^x} + \frac{x}{2} = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2} = f(x), \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 为偶函数. 显然, $f(x)$ 不是奇函数.

故应选(A).

15. (1998 · 河南) 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(2)=0$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+4)=f(x)+f(4)$ 成立, 则 $f(1998)=$

(A) 3996

(B) 1998

(C) 1997

(D) 0

● 解析: 令 $x=-2$, 则有 $f(2)=f(-2)+f(4)$, 即 $f(2)+f(2)=f(4)$.

所以 $f(4)=2f(2)=0$, 从而 $f(x+4)=f(x)$, 即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

所以 $f(1998)=f(499 \times 4 + 2) = f(2) = 0$.

故应选(D).

16. (1998 · 湖南) 函数 $y = \log_{\frac{1}{5}} |x-2|$ 的单调递减区间是

(A) $(-\infty, 2)$

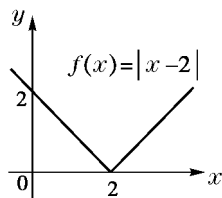
(B) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(C) $(2, +\infty)$

(D) $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

● 解析: 令 $f(x) = |x-2|$, 其函数图像为右图. 当 $x > 2$ 时, $y = \log_{\frac{1}{5}} |x-2|$ 是减函数.

故应选(C).



17. (2002 · 全国) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间是

(A) $(-\infty, -1)$

(B) $(-\infty, 1)$

(C) $(1, +\infty)$

(D) $(3, +\infty)$

● 解析: 由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 有 $x < -1$ 或 $x > 3$, 故函数 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的定义域为 $x < -1$ 或 $x > 3$. 二次函数 $u = x^2 - 2x - 3$ 在 $(-\infty, -1)$ 内单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 内单调递增. 而 $\log_{\frac{1}{2}} u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增.

故应选(A).

18. (2002 · 山东) 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \in \mathbf{N}_+$ $c \geq 1$ $a + b + c \geq 1$, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个小于 1 的不等正根 则 a 的最小值为

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

● **解析:** 设 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, 则 $a + b + c = f(1) = a(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$, $c = f(0) = ax_1x_2 \geq 1$. 由 $x_1, 1 - x_1, x_2, 1 - x_2, a > 0$, 得 $x_1(1 - x_1) \leq \frac{1}{4}$, $x_2(1 - x_2) \leq \frac{1}{4}$. 又 $x_1 \neq x_2$, 所以 $x_1(1 - x_1) \cdot x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16}$. 于是 $a^2 > 16$.

又 $a \in \mathbf{N}_+$, 所以 $a \geq 5$. 取 $f(x) = 5(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3}) = 5x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{5}{3}$ 符合条件,

所以 a 的最小值是 5.

故应选(D).

19. (1983 · 全国) 已知函数 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 5$ 则

(A) $7 \leq f(3) \leq 26$ (B) $-4 \leq f(3) \leq 15$ (C) $-1 \leq f(3) \leq 20$ (D) $-\frac{28}{3} \leq f(3) \leq \frac{35}{3}$

● **解析:** 由 $f(1) = a - c$, $f(2) = 4a - c$, 得 $a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)]$, $c = \frac{1}{3}[f(2) - 4f(1)]$.

所以 $f(3) = 9a - c = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$.

从而 $\frac{8}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} \times (-1) \leq f(3) \leq \frac{8}{3} \times 5 - \frac{5}{3} \times (-4)$, 于是 $-1 \leq f(3) \leq 20$.

故应选(C).

20. (1999 · 广西) 设 $f(x) = \log_2 \frac{1 + 2^x + 4^x a}{3}$ 其中 $a \in \mathbf{R}$. 如果当 $x \in (-\infty, 1]$ 时 $f(x)$ 有意义 则 a 的取值范围是_____.

● **解析:** 依题意, $1 + 2^x + 4^x a > 0$, $x \in (-\infty, 1]$. 所以, $a > -[\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{2})^x] (x \leq 1)$.

因为 $y = (\frac{1}{4})^x$ 与 $y = (\frac{1}{2})^x$ 在 $(-\infty, 1]$ 上都是减函数, 所以 $y = -[\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{2})^x]$ 在

$(-\infty, 1]$ 上是增函数, 当 $x = 1$ 时取最大值 $-\frac{3}{4}$. 所以, $a > -\frac{3}{4}$.

故应填 $a > -\frac{3}{4}$.

21. (2002 · 湖南) 满足条件 $\{1, 2, 3\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的集合 X 的个数为_____.

● **解析:** X 中一定包含 1, 2, 3 这三个数, 至于另外三个数 4, 5, 6 可以属于 X , 也可以不属于 X . 因此不同的 X 共有 $2^3 = 8$ 个.

故应填 8.

22. (2003 · 全国) 已知 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 2^{1-x} + a \leq 0, x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

● **解析:** $A = (1, 3)$. 设 $f(x) = 2^{1-x} + a$, $g(x) = x^2 - 2(a+7)x + 5$.

要使 $A \subseteq B$, 只需 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $(1, 3)$ 上的图像均在 x 轴的下方, 其充分必要条件是同时有 $f(1) \leq 0, f(3) \leq 0, g(1) \leq 0, g(3) \leq 0$. 由此推出 $-1 \leq a \leq -1$.

故应填 $-4 \leq a \leq -1$.

23. (1998 · 全国) 若 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是以 2 为周期的偶函数, $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{1998}}$, 则 $f\left(\frac{98}{19}\right)$, $f\left(\frac{101}{17}\right)$, $f\left(\frac{104}{15}\right)$ 由小到大的排列是_____.

● **解析:** $f\left(\frac{98}{19}\right) = f\left(6 - \frac{16}{19}\right) = f\left(-\frac{16}{19}\right) = f\left(\frac{16}{19}\right)$,

$$f\left(\frac{101}{17}\right) = f\left(6 - \frac{1}{17}\right) = f\left(-\frac{1}{17}\right) = f\left(\frac{1}{17}\right),$$

$$f\left(\frac{104}{15}\right) = f\left(6 + \frac{14}{15}\right) = f\left(\frac{14}{15}\right).$$

又 $f(x) = x^{\frac{1}{1998}}$ 在 $[0, 1]$ 上是严格递增的, 而 $\frac{1}{17} < \frac{16}{19} < \frac{14}{15}$,

$$\text{所以, } f\left(\frac{101}{17}\right) < f\left(\frac{98}{19}\right) < f\left(\frac{104}{15}\right).$$

故应填 $f\left(\frac{101}{17}\right), f\left(\frac{98}{19}\right), f\left(\frac{104}{15}\right)$.

24. (1998 · 上海) 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是开口向下的抛物线, a, b, c 各不相等, 且都在集合 $A = \{n | |n| \leq 5, n \in \mathbf{Z}\}$ 中取值. 则这些抛物线中通过点 $(0, -1)$ 的有_____条.

● **解析:** 因为 $a < 0, c = -1, a, b, c \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

所以这样的抛物线共有 $4 \times 9 = 36$ 条.

故应填 36.

25. (1998 · 北京) 设函数 $f(x) = (x+a)^3$ 对任意实数 x 都有 $f(2+x) = -f(2-x)$. 则 $f(-3) + f(3) =$ _____.

● **解析:** 由 $f(2+x) = -f(2-x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 得 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 成中心对称, 所以 $f(x) = (x-2)^3$, 从而 $f(-3) + f(3) = (-3-2)^3 + (3-2)^3 = -124$.

故应填 -124 .

26. (1998 · 北京) 已知 $f_1(x) = 4x + 1$, $f_2(x) = x + 2$, $f_3(x) = -2x + 4$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数. 我们定义 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 为 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ 的最小值. 则 $f(x)$ 的最大值等于_____.

● 解析:如图.

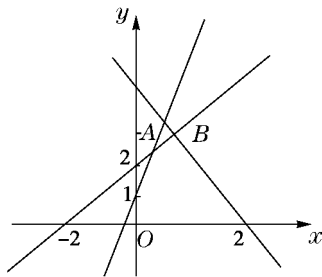
$$\text{由 } \begin{cases} y=4x+1, \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y=x+2, \\ y=-2x+4 \end{cases} \Rightarrow B(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}).$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 4x+1 (x \leq \frac{1}{3}), \\ x+2 (\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}), \\ -2x+4 (x > \frac{2}{3}). \end{cases}$$

$$\text{从而当 } x = \frac{2}{3} \text{ 时, } f(x)_{\max} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{故应填 } \frac{8}{3}.$$



27. (2002 · 湖南)函数 $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{|x+a| - a}$ 为奇函数的充要条件是_____.

● 解析:必要性:若 $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{|x+a| - a}$ 是奇函数,则由 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 为偶函数知 $y = |x+a| - a$ 应当为奇函数,所以 $|-x+a| - a = -(|x+a| - a)$ 应当对定义域中的所有 x 恒成立,即 $|x+a| + |x-a| = 2a$ 应当恒成立,所以 $a > 0$.

充分性:若 $a > 0$,则 $f(x)$ 的定义域为 $[-a, 0) \cup (0, a]$,这时 $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$,显然 $f(x)$ 为奇函数.

故应填 $a > 0$.

28. (1997 · 全国)设 x, y 为实数,且满足 $\begin{cases} (x-1)^3 + 1997(x-1) = -1, \\ (y-1)^3 + 1997(y-1) = 1. \end{cases}$ 则 $x+y =$ _____.

● 解析:原方程组化为

$$\begin{cases} (x-1)^3 + 1997(x-1) = -1, \\ (1-y)^3 + 1997(1-y) = -1. \end{cases}$$

因为 $f(t) = t^3 + 1997t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增,且 $f(x-1) = f(1-y)$,

所以, $x-1 = 1-y$, 即 $x+y = 2$.

故应填 $x+y = 2$.

29. (2002 · 湖南)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 它具有下述性质:

(1) 对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x^3) = f^3(x)$,

(2) 对任何 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 \neq x_2$ 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

则 $f(0) + f(1) + f(-1)$ 的值为_____.

- **解析:** 首先根据性质(1), 在 $f(x^3) = f^3(x)$ 中分取别 $x=0, 1, -1$ 可得 $f(0) \in \{0, 1, -1\}$, $f(1) \in \{0, 1, -1\}$, $f(-1) \in \{0, 1, -1\}$. 再由性质(2)可知 $\{f(0), f(1), f(-1)\} = \{0, 1, -1\}$. 所以 $f(0) + f(1) + f(-1) = 0$.

故应填 0.

30. (1998 · 湖南) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 且 $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$, $f(-2) = f(1) \neq 0$ 则 $g(1) + g(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

- **解析:** 因为 $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$,

所以 $f(y-x) = f(y)g(x) - g(y)f(x) = -[f(x)g(y) - g(x)f(y)]$.

有 $f(x-y) = -f(y-x) = -f[-(x-y)]$,

则 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x)$ 是奇函数.

故 $f(1) = f(-2) = f(-1-1)$

$$= f(-1)g(1) - g(-1)f(1)$$

$$= -f(1)[g(1) + g(-1)].$$

所以 $g(1) + g(-1) = -1$.

故应填 -1.

31. (1996 · 北京) 函数 $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$ 在 $[-3, 3]$ 上的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- **解析:** $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 5$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 5$$

$$= z(z+2) + 5 = (z+1)^2 + 4,$$

其中 $z = x^2 + 5x + 4$.

在 $z = x^2 + 5x + 4, x \in [-3, 3]$ 中, 由于抛物线开口向上, 对称轴为 $x = -\frac{5}{2} \in [-3, 3]$.

所以 $z_{\min} = (-2.5)^2 + 5(-2.5) + 4 = -2.25$,

$$z_{\max} = 3^2 + 5 \times 3 + 4 = 28.$$

所以 $y = (z+1)^2 + 4, z \in [-2.25, 28]$, 抛物线开口向上, 对称轴为 $z = -1 \in [-2.25, 28]$.

所以 $y_{\min} = 4$.

故应填 4.

32. (1996 · 北京) 函数 $f(x) = |x^2 - a|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值 $M(a)$ 的最小值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

- **解析:** 由于 $f(x) = |x^2 - a|$ 是偶函数,

所以 $M(a)$ 是 $f(x)$ 在区间 $0 \leq x \leq 1$ 内的最大值.

当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 - a$, 易知 $M(a) = 1 - a$.

当 $a > 0$ 时, 从图像可知,

若 $\sqrt{2a} \geq 1$, 则 $M(a) = a$;

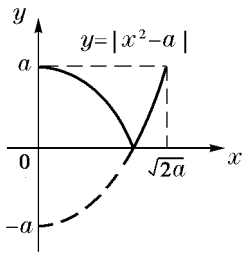
若 $\sqrt{2a} \leq 1$, 则 $M(a) = f(1) = 1 - a$.

$$\text{所以 } M(a) = \begin{cases} 1-a, & (a \leq \frac{1}{2}), \\ a, & (a \geq \frac{1}{2}). \end{cases}$$

由于 $a \leq \frac{1}{2}$ 时 $M(a)$ 递减, $a \geq \frac{1}{2}$ 时 $M(a)$ 递增.

所以 $a = \frac{1}{2}$ 时, $M(a)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故应填 $\frac{1}{2}$.



33. (1997 · 上海) 已知点 $A(0, 4)$, $B(4, 0)$. 若抛物线 $y = x^2 - mx + m + 1$ 与线段 AB (不包括端点 A 及 B) 有两个不同交点, 则 m 的取值范围为 _____.

● 解析: 由 $\begin{cases} x+y=4, \\ y=x^2-mx+m+1 \end{cases}$ 消去 y , 得

$$x^2 - (m-1)x + m - 3 = 0.$$

依题意, 这个方程在 $(0, 4)$ 内有两个不同的实根.

将方程中参数 m 分离, 得

$$m = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1) + (x - 1) - 1}{x - 1} = x + 1 + 1 - \frac{1}{x - 1} = x - 1 - \frac{1}{x - 1} + 3.$$

$$\text{所以 } 3 < m < \frac{17}{3}.$$

故应填 $(3, \frac{17}{3})$.

34. (2001 · 全国) 函数 $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的值域为 _____.

● 解析: 由 $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$,

$$\text{得 } \sqrt{x^2 - 3x + 2} = y - x \geq 0.$$

$$\text{两边平方, 得 } (2y - 3)x = y^2 - 2.$$

$$\text{从而, } y \neq \frac{3}{2} \text{ 且 } x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3}.$$

$$\text{由 } y - x = y - \frac{y^2 - 2}{2y - 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2 - 3y + 2}{2y - 3} \geq 0 \Rightarrow 1 \leq y < \frac{3}{2} \text{ 或 } y \geq 2.$$

$$\text{任取 } y \geq 2, \text{ 令 } x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3}, \text{ 易知 } x \geq 2.$$

$$\text{于是, } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ 且 } y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{任取 } 1 \leq y < \frac{3}{2}, \text{ 同样令 } x = \frac{y^2 - 2}{2y - 3}, \text{ 易知 } x \leq 1.$$

$$\text{于是, } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ 且 } y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

因此,所求函数的值域为 $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$.

故应填 $[1, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$.

35. (2002 · 上海) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2x} (1 - x + \sqrt{1 - 2x + 2x^2})$, $x \in [2, 4]$, 则该函数的值域是_____.

● **解析:** $f(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1} \right]$.

设 $t = \frac{1}{x} - 1$, 则由 $x \in [2, 4]$, 得 $t \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right]$, 且 $y = \frac{1}{2} (t + \sqrt{t^2 + 1}) = \frac{1}{2(\sqrt{t^2 + 1} - t)}$

在 $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right]$ 上单调增.

$t = -\frac{3}{4}$ 时, $y = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \right) = \frac{1}{4}$;

$t = -\frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

所以函数值域是 $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right]$.

故应填 $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right]$.

36. (1998 · 上海) 设 $f(n)$ 是定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 上的函数, 且满足 $f(1) = 2$, $f(n+1) = \frac{2f(n)+1}{2}$. 则 $f(1998)$ 的值是_____.

● **解析:** 因为 $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2}$, 所以 $f(1998) = f(1) + \frac{1}{2} \cdot 1997 = 1000.5$.

故应填 1000.5.

37. (1995 · 全国) 设 $M = \{1, 2, 3, \dots, 1995\}$, A 是 M 的子集且满足条件: 当 $x \in A$ 时, $15x \in A$. 则 A 中元素的个数最多是_____.

● **解析:** 用 $n(A)$ 表示集合 A 的元素个数. 由题意, k 与 $15k$ ($k=9, 10, \dots, 133$) 这两个数中至少有一个不属于 A , 所以至少有 $133 - 9 + 1 = 125$ 个数不属于 A , 即 $n(A) \leq 1995 - 125 = 1870$.

另一方面, 取 $A = \{1, 2, \dots, 8\} \cup \{134, 135, \dots, 1995\}$, 则 A 满足题设条件, 且 $n(A) = 1870$.

故应填 1870.

38. (1997 · 上海) 某种商品凡购买 100(包括 100)件以下的按零售价结算, 购买 101(包括 101)件以上的按批发价结算. 已知批发价每件比零售价低 2 元, 某人原欲购该商品若干件, 需按零售价结算付 a 元, 但若多买 21 件, 则可按批发价结算恰好也是 a 元(a 为整数), 则 a 的值为_____.

● **解析:** 设购该商品 b 件, 则有 $\frac{a}{b} = \frac{a}{b+21} + 2$.

其中 $a, b \in \mathbf{N}_+$, 且 $\begin{cases} b < 100, \\ b+21 > 100, \end{cases}$ 即 $79 < b < 100$.

于是 $21a = 2b(b+21)$, 所以 $b = 21t (t \in \mathbf{N}_+)$.

从而 $b = 84, a = 840$.

故应填 840.

39. (1986 · 全国) 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 那么 和式

$$f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{3}{1001}\right) + \dots + f\left(\frac{1000}{1001}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

● **解析:** 因为 $\frac{n}{1001} + \frac{1001-n}{1001} = 1 (n=1, 2, \dots, 500)$. 且当 $x+y=1$ 时,

$$f(x) + f(y) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^y}{4^y + 2} = \frac{4^x(4^y + 2) + 4^y(4^x + 2)}{(4^x + 2)(4^y + 2)} = \frac{2 \cdot 4^{x+y} + 2(4^x + 4^y)}{4^{x+y} + 4 + 2(4^x + 4^y)} = 1,$$

所以和式的值为 500.

故应填 500.

点拨关键

解与函数有关的选择题和填空题, 应灵活应用函数的有关性质, 比如奇偶性的判定: 奇 $\pm$ 奇=奇, 偶 $\pm$ 偶=偶, 奇 $\pm$ 偶=非奇非偶; 奇 $\times$ 奇=奇, 偶 $\times$ 偶=偶, 奇 $\times$ 偶=奇等. 单调性的判定: 增 $+$ 增=增, 减 $+$ 减=减; 具有相同单调性的两个函数的复合函数是增函数, 具有相反单调性的两个函数的复合函数是减函数等. 奇偶性与反函数的关系: 偶函数一般不存在反函数, 奇函数不一定存在反函数, 若存在反函数, 则反函数一定是奇函数. 奇偶性与单调性的关系: 奇函数在 (a, b) 与 $(-b, -a)$ 内具有相同的单调性, 偶函数在 (a, b) 与 $(-b, -a)$ 内具有相反的单调性等. 这样就能很快地做出正确的判断.

举证的例题

40. (1996 · 昆明) 已知 $t > 0$,

$$f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}, \quad g(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t + \frac{1}{t} + 1}.$$

求 $f(t)$ 的最小值和 $g(t)$ 的最大值.

● **解析:** 由不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2 (x > 0)$, 可得