目录

龙门新教案

高中数学(1)A版

第一章 集合与函数概念

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

第三章　函数的应用

第一章　集合与函数概念

现实世界中的许多运动变化现象都表现出变量之间的依赖关系．数学上，我们用函数模型描述这种依赖关系，并通过研究函数的性质了解它们的变化规律．

函数是高中数学的重要内容之一，函数的基础知识在现实生活、社会、经济及其他学科中有着广泛的应用；函数与代数式、方程、不等式等内容联系非常密切；函数概念及其反映出来的数学思想已广泛渗透到数学的各个领域，是进一步学习数学的重要基础；函数的概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体体现．

集合是现代数学的基本语言，可以简洁、准确地表达数学内容．在本章，我们将学习集合的一些基本知识，用集合语言表示有关数学对象，并运用集合和对应的语言进一步描述函数概念，感受建立函数模型的过程和方法，初步运用函数思想理解和处理生活、社会中的简单问题．

第一节　集　　合

第一讲　集合的表示(1)

问题探知

在初中数学中，我们接触过“集合”一词，如“圆是到定点距离等于定长的点的集合”“不等式 $x-3>0$ 的解集是 $x>3$”等，同时，“集合”一词又是体育课上体育老师常见的口令．那么，课本中，“集合”这一概念与体育老师的口令“集合”在含义上是一致的吗？试加以说明．

教材全解

重点1　集合

一般地，把一些确定的不同的对象汇集在一起构成一个整体，这个整体称为一个集合．

元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素．

在线课堂

(1)实际上，集合的概念是描述性说明，所以集合是没有给出严格定义的数学概念．

(2)集合是一个整体．

(3)构成集合的对象必须是“确定”的，其中确定是指构成集合的对象具有非常明确的特征，这个特征不是模棱两可的．

(4)如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于(belong to)集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于(not belong to)集合 A，记作 $a\notin A$．由此可知，元素与集合之间只有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种关系．如 $2\in\{2,3\}$，$4\notin\{2,3\}$．

(5)集合的表示：为方便起见，我们经常用大写的拉丁字母表示集合．如 $A=$ {北京、上海、天津、重庆}，$B=$ {不等式 $x-3>0$ 的解}．集合中的元素常用小写的拉丁字母表示．

(6)“对象”即集合中的“元素”，具有广泛性，如数、图形、物品等指定对象．

例1　考察下列每组对象能否构成一个集合？

(1)所有的好人；(2)不超过 20 的非负数；(3)我班 16 岁以下的学生；(4)直角坐标系中横坐标与纵坐标相等的点；(5)充分接近$\sqrt{3}$的实数．

思路导引

集合的元素具有确定性，对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准是 $x\in A$，还是 $x\notin A$，二者必居其一，不会模棱两可．

解：(1)“所有的好人”无明确的标准，对于某个人是否是“好人”无法客观地判断，因此________不能构成集合；类似地________也不能构成集合．

(2)任给一个实数 x，可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”，即“$0\leqslant x\leqslant 20$”与“$x>20$ 或 $x<0$”，两者必居其一，且仅居其一，故“不超过 20 的非负数”能构成集合，即________能构成集合；类以地________也能构成集合．

方法技巧

充分理解集合的概念．在此题的判断中，注重的是集合元素的确定性．

随堂练习

1．考察下列每组对象能否构成一个集合．

(1)著名的数学家．

(2)方程 $x^2-9=0$ 的实数解．

(3)直角坐标系内第一象限内的一些点．

(4)某校 2001 年在校的所有高个子同学．

(5)所有正三角形．

重点2　集合的特征

对于一个给定的集合，集合中的元素具有三个特征：确定性、互异性、无序性．

在线课堂

(1)“确定性”是指对于一个给定的集合,任何一个对象或者是集合中的一个元素,或者不是它的元素,两者必居其一.如例 1 中的 (2)、(3)、(4).

(2)“互异性”是指集合中的任何两个元素是互不相同的,任何两个相同的对象在同一个集合中时,只能算作这个集合中的一个元素.例如,方程 $x^2+2x+1=0$ 的解组成的集合为 $\{-1\}$,而不是 $\{-1,-1\}$.

(3)“无序性”是指在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序.例如,由数 1,2,3 组成的集合可以表示为 $\{1,2,3\}$,也可以表示为 $\{3,1,2\}$,这两种表示形式为同一个集合.

例 2] 若以集合 $\{x,y,z,w\}$ 中的四个元素为边长构成一个四边形,那么这个四边形可能是 (　　)

A. 梯形　B. 平行四边形　C. 菱形　D. 矩形

思路导引

解这道题应从集合元素的三大特征入手考虑?

解 集合中元素的互异性是解本题的侧重点,由于 x,y,z,w 四个元素不相同.故由它们组成的四边形的四条边互不相等,本题应选择________.

警示误区

集合中元素的三大特征在解题中的作用不能忽视.

随 堂 练 习

2. 求集合 $\{1,x,x^2-x\}$ 中元素 x 所满足的条件.

重点 3　常用数集的记法　★★★

常用数集	简　称	记法
全体非负整数的集合	非负整数集(或自然数集)	N
非负整数集内排除 0 的集合	正整数集	N^* 或 N_+
全体整数的集合	整数集	Z
全体有理数的集合	有理数集	Q
全体实数的集合	实数集	R

在线课堂

(1) 按照概念外延的大小,可将 N^*、N、Q、Z、R 按某种次序填入图 1-1-1 中.

(2) 自然数集与非负整数集是相同的,也就是说,自然数集包括数 0,即 $0\in N$ 但 $0\notin N^*$.

(3) 在大写字母的右上角加“$*$”表示在字母所示的集合中除去零的集合,如 R^* 表示非零实数集;在大写字母右下角加“+”号表示字母所示集合中正数的集合,如 Z_+ 表示正整数集.

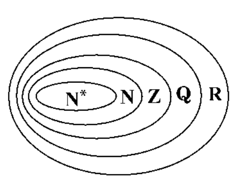

图 1-1-1

例 3] 用适当的符号填空:

(1) 3.14 ____ Q;(2) π ____ Q;(3) 0 ____ Z;

(4) 0 ____ N_+;(5) $\sqrt{2}$ ____ Q;(6) $\sqrt{2}$ ____ R.

思路导引

元素与集合之间的从属关系用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示.

随 堂 练 习

3. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空:

(1) 0 ________ Q,0 ________ N,0 ________ N_+,0 ________ Z,0 ________ R;

(2) -2 ________ N^*,-2 ________ Z,-2 ________ R,-2 ________ Z_+;

(3) $\sqrt{3}$ ________ N_+,$\sqrt{3}$ ________ R,$\sqrt{3}$ ________ Q,$\sqrt{3}$ ________ Z.

研讨应用

下面是两位同学在学习过程中提出的问题,请你加以诊断.

甲生:

集合 $\{1,1\}$ 与集合 $\{1\}$ 表示同一集合.

乙生:

若 $\{x,x^2\}$ 与 $\{1,x\}$ 表示同一集合,则 $x=0$ 或 1.

诊断

随 堂 练 习

4. 下面说法是否正确,请加以判断.

(1) 集合 $\{1,2\}$ 与集合 $\{x=1,y=2\}$ 表示同一集合.

(2) $0\in Z$,且 0 是 Z 中的一个最小元素.

要点记忆

1. 易忽视点:容易忽视集合中元素的互异性,如随堂练习第 2 题,研讨应用等.

2. 易错点:错误地认为 0 不属于自然数集.事实上,自然数集包括 0,即 $0\in N$,但 $0\notin N^*$.

3. 解题规律:充分地利用集合中元素的三大特征是解决集合问题的基础.

4. 两个集合相同只要求两集合中的元素相同即可,与排列顺序无关.

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 下列说法正确的是　(　　)

A. 某校高一(2)班数学成绩非常突出的男生能组成一个集合

B. 半径为1的圆内的点不能组成一个集合

C. 由实数 $a,-a,|a|,\sqrt{a^2},-\sqrt[3]{a^3}$ 所组成的集合中含有5个元素

D. 集合 $\{a,b,c,d\}$ 与集合 $\{d,c,b,a\}$ 表示同一个集合

2. 若 a 是 R 中的元素,但不是 Q 中的元素,则 a 可以是　(　　)

A. 3.14　　B. -5　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\sqrt{7}$

3. 已知 $x^2\in\{1,0,x\}$,则实数 x 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

4. 若 $y=\frac{6}{x+2}$,$x,y\in\mathbf{Z}$,由所有的 y 值组成的集合中元素的个数为　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

5. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空.

2 ______ $\mathbf{N}$,0 ______ $\mathbf{N}^*$,$\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ ______ $\mathbf{Z}$,$\sqrt{3}$ ______ $\mathbf{Q}$,

π ______ $\mathbf{R}$,$\sin45°$ ______ $\mathbf{Q}$,$2\cos60°$ ______ $\mathbf{N}$,$\tan30°$ ______ $\mathbf{R}$.

6. 已知三个实数组成的集合既可表示成 $\{x^2,x+y,0\}$ 也可以表示成 $\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$,则 $x^{2003}+y^{2004}$ 的值等于________.

7. 设 a、b、c 为非零实数,则由 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为________________.

8. 设 A 表示集合 $\{2,3,a^2+2a-3\}$,B 表示集合 $\{|a+3|,2\}$,已知 $5\in A$,且 $5\notin B$,求 a 的值.

[综合测试]

9. 若集合 $\{a,a+b,a+2b\}$ 与集合 $\{a,ac,ac^2\}$ 表示的是同一集合,求 c 的值.

[探究升级]

10. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,求 $a^{2003}+b^{2004}$.

心得笔记

[问题探知]　课本中的"集合"是名词,是指研究对象的全体,口令"集合"是动词,是把分散的人集中起来

[例1]　(1)、(5)不能构成集合;(2)、(3)、(4)能构成集合

[例2]　A

[例3]　(1)$\in$;(2)$\notin$;(3)$\in$;(4)$\notin$;(5)$\notin$;(6)$\in$

[研讨应用]　诊断:以上两个同学的说法都是错误的.

甲同学忽视了集合中元素的互异性,即集合中的元素是互不相同的,没有 $\{1,1\}$ 这种写法.

乙同学也忽视了集合中元素的互异性:$x=0$ 时,$x=x^2$;$x=1$ 时,$x=x^2$,但由 $x\neq x^2$ 知 $x\neq0$ 且 $x\neq1$. 正确的思考方法是:$\begin{cases}x\neq x^2\Rightarrow x\neq0\text{ 且 }x\neq1\\1\neq x\Rightarrow x\neq1\\x^2=1\Rightarrow x=1\text{ 或 }x=-1\end{cases}$

$\therefore x=-1$.

第一节　集　合

第二讲　集合的表示 (2)

问题探知

通过前面的学习我们知道可以用自然语言描述一个集合. 除此之外,集合的表示方法还有___________、___________、___________等.

教材全解

重点 1　集合的表示方法一

列举法:是把集合中的元素一一列举出来,并用花括号"{ }"括起来表示集合的方法.

在线课堂

(1) 用列举法表示集合时,只需将集合中的元素一一列举出来并用花括号括起来即可.

(2) 列举法有直观、明白的特点,但有些集合是不能用列举法表示的. 例如"小于 1 的一切正数的集合",就不能把它的元素一一列举出来或举出有足够代表性且反应出规律的元素.

[例 1]　用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$ 的有理根的集合 A;

(2) 方程 $\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$ 的解集 B.

思路导引

先将方程的解求出,再用花括号括起来即可.

解:(1) 由 $(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2(x^2-2)(x^2+1)=0$ 得 $x=-1\in\mathbf{Q}$, $x=\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$, $x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$,

$\therefore A=$_________________.

(2) 方程只有当_________________同时成立时,等式才成立,$\therefore \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$ 为方程的解,即 $B=$________.

警示误区

第 (2) 小题转化成关于 x、y 的二元方程组,方程组只有一组解,用小括号将 $\frac{1}{2}$, -1 括起来写在花括号内表明集合 $B=\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$ 只有一个元素,而有序实数对 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 按习惯 $\frac{1}{2}$, -1 分别是 x, y 的值. 所以我们不能把 B 写成 $\left\{\left(-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

重点 2　集合表示方法二

描述法:用集合所含元素的共同特征表示集合的方法.

在线课堂

(1) 描述法是把集合中元素的公共属性描述出来,写在花括号内表示集合的方法.

(2) 具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

[例 2]　用描述法表示下列集合:

(1) 所有被 3 整除的数;

(2) 图 1-1-2 中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合(不含虚线).

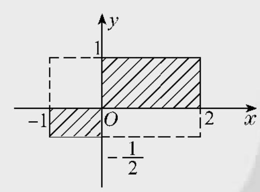

图 1-1-2

思路导引

(1) 中被 3 整除的数可表示为 $3n$, $n\in\mathbf{Z}$;(2) 中元素是坐标 (x,y). 也就是说先考虑元素是什么,再考虑元素必须满足的条件.

解:(1) $\{x\mid x=3n, n\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $\left\{(x,y)\ \middle|\ -1\leqslant x\leqslant 2, -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1 \text{ 且 } xy\geqslant 0\right\}$.

方法技巧

使用描述法时,应注意六点:①写清楚集合中元素的代号;②说明该集合中元素的性质;③不能出现未被说明的字母;④多层描述时,应当准确使用"且""或";⑤所有描述的内容都要写在花括号内;⑥用于描述的语句力求简明、确切.

随 堂 练 习

1. 下列集合各表示数集还是点集?说说它们各有什么异同?

$A=\{x\mid x^2+2x-1=0\}$;

$B=\{y\mid y=x^2+2x-1\}$;

$C=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-1\}$.

2. 可以表示为方程组 $\begin{cases}x+y=3\\ x-y=-1\end{cases}$ 的解集的是________.

(1) $\{x=1, y=2\}$;

(2) $\{1,2\}$;

(3) $\{(1,2)\}$;

(4) $\{(x,y)\mid x=1 \text{ 或 } y=2\}$;

(5) $\{(x,y)\mid x=1 \text{ 且 } y=2\}$;

(6) $\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2=0\}$.

重点 3　集合的表示方法三

图示法 在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图，这种表示集合的方法称为图示法.

在线课堂

如图 1-1-3 为集合 $\{3,1,2\}$ 的图示法表示.

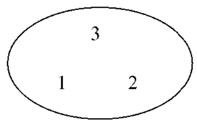

图 1-1-3

重点 4　集合元素的分类

集合按其元素个数可分为：有限集、无限集.

在线课堂

一般地，含有有限个元素的集合叫有限集. 含有无限个元素的集合叫无限集. 例如 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$ 是有限集，$B=\{x \mid x^2-1>0\}$ 是无限集，$C=\{x \mid x^2+1=0\}$ 是空集.

例 3　集合 A 满足：若 $a \in A$，$a \neq 1$，则 $\frac{1}{1-a} \in A$. 证明：(1) 若 $2 \in A$，则集合 A 中还有另外两个元素；(2) 若 $a \in \mathbf{R}$，则集合 A 不可能是单元素集.

思路导引

反复利用题设，若 $a \in A$，$a \neq 1$，则 $\frac{1}{1-a} \in A$，注意角色转换，单元素是指集合中有且只有一个元素.

证明：(1) ∵ ________，∴ $\frac{1}{1-2}=-1 \in A$

∵ ____________，∴ $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2} \in A$

∵ ______________，∴ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \in A$

$\Rightarrow$ A 中还有 -1，$\frac{1}{2}$ 两个元素.

(2) 假设 A 是单元素集，则必有______，即 $a^2-a+1=0$.

∵ $\Delta=(-1)^2-4 \times 1 \times 1=-3<0$，方程没有实数解，故假设不成立，

∴ A 不可能是单元素集.

方法技巧

对于一个否定性命题，用直接法不易证明的，可采用反证法. 如上第 (2) 问就用了反证法.

随 堂 练 习

3. 用适当方法表示下列集合，然后说出它是有限集还是无限集：

(1) 由大于 10 的所有自然数组成的集合；

(2) 方程 $x^2-4=0$ 的解的集合.

随 堂 练 习

4. 用描述法表示下列集合，然后说出它是有限集，还是无限集：

(1) 由 4 和 6 的所有公倍数组成的集合；

(2) 不等式 $4x-6<5$ 的解集.

5. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid y=x, x<5, x \in \mathbf{N}\}$；

(2) $\{y \mid y=x^2-1, x<5, x \in \mathbf{N}\}$；

(3) $\{(x,y) \mid y=x^2-1, x<5, x \in \mathbf{N}\}$.

6. 用描述法表示下列集合：

(1) $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$；

(2) $\left\{\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\cdots,\frac{99}{100}\right\}$.

综合延伸

集合是现代数学的基本语言，可以简洁、准确地表达数学内容. 因此，高中阶段数学的学习要注意集合语言的使用.

例 4　已知集合 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2+2x+1=0\}$，其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 1 是 A 中的一个元素，用列举法表示 A；

(2) 若 A 中有且仅有一个元素，求 a 的值组成的集合 B；

(3) 若 A 中至少有一个元素，试求 a 的取值范围.

思路导引

采用较为灵活的方式给出考查集合知识的命题，解题中需要对三个小题中的命题语言进行斟酌，注意它们相互间的差异.

解：(1) ∵ 1 是 A 的元素，

∴ 1 是方程 $ax^2+2x+1=0$ 的一个根，

∴ $a \times 1^2+2 \times 1+1=0$. 即 $a=-3$，

∴ 方程即为 $-3x^2+2x+1=0$，

∴ $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{3}$，

∴ 此时集合 $A=\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$；

(2) 若 $a=0$，方程化为 $2x+1=0$，此时有且仅有一个根 $x=-\frac{1}{2}$；

若 $a \neq 0$，则当且仅当方程的判别式 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，方程有两个相等的实根 $x_1=x_2=-1$，此时集合 A 中有且仅有一个元素，

∴ 所求集合 $B=\{0,1\}$；

(3) 集合 A 中至少有一个元素包括两种情况：

① A 中只有一个元素，则由 (2) 得 $a=0$ 或 1.

②A 中有两个元素,则 $a\neq 0$ 且 $\Delta>0$.

即 $\begin{cases}4-4a>0\\ a\neq 0\end{cases}\Rightarrow a<1$ 且 $a\neq 0$

综上所述:a 的取值范围为:$\{a\mid a\leqslant 1\}$.

方法技巧

分类讨论是数学解题中常用的方法和思想.如例 4(3)中"至少"包括两层意思,一是 A 中只有一个元素;二是 A 中有两个元素.

随堂练习

7.已知集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $ax^2-3x+2=0\}$,且 A 中元素至多只有一个,求 a 的取值范围.

要点记忆

1.易错点:对无限集的理解错误,认为集合 $\{x\mid 1<x<3\}$ 是有限集,其实这个集合是一个无限集.

2.警示误区:集合 $A=\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$ 和集合 $B=\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$ 是有区别的,它们不相等,A 集合中有两个元素 $\frac{1}{2}$,-1,而 B 集合中只有一个元素,即有一个有序实数对 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

3.解题规律:(1)表示集合的方法有自然语言、列举法、描述法和图示法,在使用中各有利弊.因此,要根据元素的特征以及实际的需要选择表示集合的合适方法.

(2)对于一个否定性命题,用直接法不易证明时,可采用反证法.

(3)对于一个含有"至多"、"至少"等词汇的命题时,解题应考虑用分类的数学思想或反证法去解决.

心得笔记

[问题探知]　列举法、描述法、图示法

[例 1]　(1)$\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$;

(2)$\begin{cases}\sqrt{2x-1}=0\\ |3y+3|=0\end{cases}$;$\left\{\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$

[例 3]　(1)$2\in A$,$-1\in A$,$\frac{1}{2}\in A$;

(2)$a=\frac{1}{1-a}$

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1.集合 $\{1,3,5,7,9\}$ 用描述法表示应是　(　)

A.$\{x\mid x$ 是不大于 9 的非负奇数$\}$

B.$\{x\mid x\leqslant 9,x\in\mathbf{N}\}$

C.$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 9,x\in\mathbf{N}\}$

D.$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 9,x\in\mathbf{Z}\}$

2.在直角坐标系内,坐标轴上的点的集合可表示为　(　)

A.$\{(x,y)\mid x=0,y\neq 0\}$　B.$\{(x,y)\mid x\neq 0,y=0\}$

C.$\{(x,y)\mid xy=0\}$　D.$\{(x,y)\mid x=0,y=0\}$

3.方程组 $\begin{cases}x+y=1\\ x-y=-1\end{cases}$ 的解集是　(　)

A.$\{x=0,y=1\}$　B.$\{0,1\}$

C.$\{(0,1)\}$　D.$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=1\}$

4.下列集合中为有限集的是　(　)

A.{周长为 12 的三角形}　B.$\{\varnothing\}$

C.$\{x\mid x^2+5x+6<0\}$　D.{不大于 4 的整数}

5.给定下列四个集合,其中无限集是　(　)

①{我国 2000 年实行高一版新教材改革试验的省市};②$\{x\mid 1<x<2\}$;③{全日制普通高级中学教材科书(试验本)数学第一册中的汉字};④{湖北省实验中学高一年级的学生}.

A.①④　B.②　C.②④　D.①②

6.根据集合中元素的个数分类:集合 $\{x\mid |x|<1\}$ 是________,集合 $\{x\in\mathbf{N}\mid |x|<1\}$ 是________,集合 $\{x\mid x^2+x+1=0\}$ 是________,集合 $\{(x,y)\mid (x-1)(y-1)=0\}$ 是________,集合{小于 2 的正有理数}是________.(填"有限集""无限集"或"空集")

7.试用列举法表示集合 $\left\{x\mid x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}\right\}$ 为________.

8.已知集合 $P=\{x\mid ax+b-x+2=0\}$ 是一个无限集,则实数 $a=$________,$b=$________.

[综合测试]

9.试用描述法表示图 1-1-4 中阴影部分所示集合.

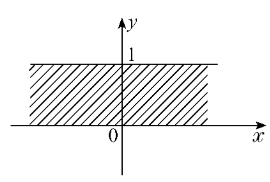

图 1-1-4

10.若实数 x 适合条件 $\frac{6}{x-1}\in\mathbf{N}^*$,试用列举法表示所有 x 的取值组成的集合.

[探究升级]

11.已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值,并求出这个元素;

(2)若 A 中至少有一个元素,求 a 的取值范围.

第一节　集　　合

第三讲　集合间的基本关系

问题探知

实数有相等关系、大小关系，如 $5=5$，$5<7$，$5>3$ 等等，类比实数之间的关系，你会想到集合之间有些什么关系呢？例如集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,5,7\}$，$C=\{$高一(3)班全体同学$\}$，$D=\{$高一(3)班全体男生$\}$，那么 A 与 B，C 与 D 是否也有这样的大小关系呢？

在前面我们学习了集合与元素的定义、集合中元素的特征、集合的表示方法等，显然这些知识仅局限于集合本身，从这节课起，我们将论讨的重点转到两个或几个集合的关系上来.

实数有相等关系、大小关系，如 $5=5$，$5<7$，$5>3$ 等. 类比实数之间的关系，你会想到集合之间的关系有__________.

教材全解

重点 1　子集的定义

一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集 (subset)，记作 $A\subseteq B$ (或 $B\supseteq A$).

在线课堂

(1) 如果由任一 $x\in A$，都可以推出 $x\in B$，那么集合 A 就是集合 B 的子集.

(2) 当 A 不是 B 的子集时，记作 $A\not\subseteq B$ (或 $B\not\supseteq A$)，读作："A 不包含于 B"(或 B 不包含 A).

(3) 我们把不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$，空集是任何集合的子集.

(4) 任何一个集合是它本身的子集. 因为，对于任何一个集合 A，它的任何一个元素都属于 A 本身.

例 1]　设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，$A\supseteq B$，求 a 的值.

思路导引

$A\supseteq B$，即 B 是 A 的子集，所以 B 中元素 1，a^2-a+1 都是 A 中的元素.

解　因 $A\supseteq B$，故可分两种情况：

(1) $a^2-a+1=3$，解得 $a=-1,2$，经检验满足题设条件.

(2) ________，解得 $a=1$. 此时 A 中元素重复. 故 $a=1$ 不合题意. 综上所述，$a=-1$ 或 $a=2$.

警示误区

解决集合中元素的问题，最后应注意检验，结果不应与题设矛盾，也不应与元素的互异性排斥.

随　堂　练　习

1. 设 A、B、C 是三个集合，用子集定义说明：

(1) $A\subseteq A$；

(2) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

重点 2　两个集合相等

如果集合 A 是集合 B 的子集 ($A\subseteq B$)，且集合 B 是集合 A 的子集 ($B\subseteq A$)，此时，集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，因此，集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

在线课堂

(1) 构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

(2) 该定义有两层意思：

①若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；

②若 $A=B$，那么 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(3) 认真体会集合相等的定义与实数中的结论"若 $a\geqslant b$，且 $b\geqslant a$，则 $a=b$"的联系.

重点 3　真子集的定义

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的真子集 (proper subset)，记作 $A\subsetneqq B$ (或 $B\supsetneqq A$).

在线课堂

(1) 当 $A\subseteq B$ 时，有两种可能：$A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

(2) 当 $A\subsetneqq B$ 时 (如图 1-1-5)，要求满足两个条件：

①$A\subseteq B$；

②至少存在一个元素 $x\in B$，但 $x\notin A$.

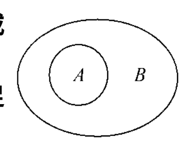

图 1-1-5

(3) 规定：$A\neq\varnothing$ 时，$\varnothing\subsetneqq A$，即空集是任何非空集合的真子集.

例 2]　写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

思路导引

注意子集的定义及两条性质：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$.

解　集合 $\{a,b\}$ 的所有子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$. 其中________是 $\{a,b\}$ 的真子集.

方法技巧

⑴ 在求子集时要注意空集和本身.

⑵ 子集中除去集合本身其余都是真子集,故子集只比真子集多 1 个.

随 堂 练 习

2. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集,并指出哪些是它的真子集.

3. 用适当的符号填空:

⑴ a ________ $\{a,b,c\}$;

⑵ 0 ________ $\{x \mid x^2=0\}$;

⑶ $\varnothing$________ $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$;

⑷ $\{0,1\}$ ________ $\mathbf{N}$;

⑸ $\{0\}$ ________ $\{x \mid x^2=x\}$;

⑹ $\{2,1\}$ ________ $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

4. 判断下列两个集合之间的关系:

⑴ $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x \mid x$ 是 8 的约数$\}$;

⑵ $A=\{x \mid x=3k,k\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x \mid x=6z,z\in\mathbf{N}\}$;

⑶ $A=\{x \mid x$ 是 4 与 10 的公倍数$\}$, $B=\{x \mid x=20m,m\in\mathbf{N}_+\}$.

重点 4

当 $A\subseteq B$ 时,有 $A=B$ 与 $A\subsetneqq B$ 两种可能,且二者必居其一.

在线课堂

由上面知,当 $A\subseteq B$ 时,如果 $A\supseteq B$,那么 $A=B$.

当 $A\subseteq B$ 时,如果 $A\neq B$,那么 $A\subsetneqq B$.

[例 3] 已知集合 $A=\{x \mid 1<ax<2\}$, $B=\{x \mid |x|<1\}$,满足 $A\subseteq B$,求实数 a 的范围.

思路导引

对参数进行讨论,写出集合 A、B,让其满足 $A\subseteq B$,求 a 值.

解:⑴ 当 $a=0$ 时,$A=\varnothing$,满足 $A\subseteq B$.

⑵ 当 $a>0$ 时,$A=$__________.

$\because A\subseteq B$, $\therefore$ ________________.

$\therefore$ ________________.

⑶ 当 $a<0$ 时,$A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{2}{a}<x<\dfrac{1}{a}\right\}$.

$\because A\subseteq B$, $\therefore \begin{cases} \dfrac{2}{a}\geqslant -1 \\ \dfrac{1}{a}\leqslant 1 \end{cases}$

$\therefore a\leqslant -2$.

综上所述:____________________.

方法技巧

在解决数集问题时要善于利用数轴. 例如:$A=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{2}{a}<x<\dfrac{1}{a}\right\}$, $B=\{x \mid -1<x<1\}$,

使 $A\subseteq B$,则如图 1-1-6 所示:

$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{a}\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{a}\geqslant -1. \end{cases}$

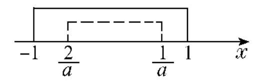

图 1-1-6

随 堂 练 习

5. 设集合 $A=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x \mid x-a\geqslant 0\}$,若 $A\subsetneqq B$,求实数 a 的取值范围.

研讨应用

包含关系 $\{a\}\subseteq A$ 与属于关系 $a\in A$ 是学生易出错和忽视的地方. 一定要注意它们的区别. 集合与集合之间是包含关系,而元素与集合之间是属于关系.

[例 4] 请同学们结合实例谈谈怎样区分下面一些容易混淆的符号:

⑴ $\in$ 与 $\subseteq$;⑵ a 与 $\{a\}$;⑶ $\{0\}$ 与 $\varnothing$.

解:____

____

____

____.

随 堂 练 习

6. 下列结论中正确的有________.

⑴ $a\subseteq\{a,b\}$;⑵ $\{a\}\subseteq\{\{a\},\{b\}\}$;⑶ $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;

⑷ $a\subseteq\{\varnothing\}$;⑸ $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

随 堂 练 习

7. 设 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{10}\}$，则下列各式中正确的是　　(　　)

A. $a\subsetneqq M$　　B. $M\subset\{a\}$

C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subseteq M$

要点记忆

1. 警示误区：元素与集合的关系是“属于”或“不属于”，用符号“$\in$”或“$\notin$”表示. 集合与集合的关系是“包含”或“包含于”，用符号“$\subseteq$”“$\not\subseteq$”“$=$”“$\subsetneqq$”等表示.

2. 特别提示：在特定的情况下，集合也可以作为元素. 如 $C=\{x\mid x\subseteq A\}$，C 中的元素就是 A 的子集.

3. 解题规律：(1) 当 $A\subseteq B$ 时，则 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

(2) 判断两个集合之间的关系：①用列举法表示两个集合，再判断；②分类讨论.

(3) 解决数集问题要学会运用直观的数轴.

(4) 集合与集合间的关系可用 Venn 图直观表示.

心得笔记

[问题探知]　集合之间有包含关系，相等关系. A 与 B，C 与 D 之间都存在包含关系

[例 1]　$a^2-a+1=a$

[例 2]　$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$

[例 3]　(2) $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\right\}$；$\begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant -1,\\ \frac{2}{a}\leqslant 1;\end{cases}$

$a\geqslant 2$；$\{a\mid a=0$ 或 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2\}$

[研讨应用]　(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 是表示元素与集合之间关系的，因此有 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$ 是表示集合与集合之间关系，因此，有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别：一般地，a 表示一个元素，而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的一个集合. 因此有 $1\in\{1,2,3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$ 等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subseteq\{1,2,3\}$.

(3) $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的区别：$\{0\}$ 是含有一个元素的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合，因此 $\varnothing\subseteq\{0\}$，不能写成 $\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 下列命题

①空集没有子集；

②任何集合至少有两个子集；

③空集是任何集合的真子集；

④若 $\varnothing\subsetneqq A$ 时，则 $A\neq\varnothing$，

其中正确的个数是　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 若集合 $A=\{x\mid x=n,n\in\mathbf{N}\}$，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则 A 与 B 的关系是　　(　　)

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\in B$

3. 在以下六个写法中：① $\{0\}\in\{0,1\}$；② $\varnothing\subsetneqq\{0\}$；③ $\{0,-1,1\}\subseteq\{-1,0,1\}$；④ $0\in\varnothing$；⑤ $Z=\{$全体整数$\}$；⑥ $\{(0,0)\}=\{0\}$，其中错误写法的个数是　　(　　)

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

4. 满足条件 $\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 M 的个数是　　(　　)

A. 3 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

5. 若 $B=\{0,1,2,3,4,7,8\}$，$C=\{0,3,4,7,9\}$，则满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$ 的集合有________个.

6. 设 $M=\{x\mid x^2-1=0\}$，$N=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $N\subseteq M$，则 a 的值为________.

7. 若 $\{x\mid 2x-a=0,a\in\mathbf{N}\}\subseteq\{x\mid -1<x<3\}$，则 a 的所有取值组成的集合为________.

[综合测试]

8. 设 $A=\left\{1,\frac{1}{x},xy\right\}$，$B=\{0,1,x\}$，若集合 $A=B$，求 x，y 的值.

9. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+4=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x+1)\cdot(x^2+3x-4)=0\}$. 若 $A\subsetneqq P\subseteq B$，求满足条件的集合 P.

[探究升级]

10. 已知集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x\mid x\in A\}$，$C=\{x\mid x\subseteq A\}$，用列举法写出集合 B 与 C，并说明 A 与 B，B 与 C 的关系.

11. 设集合 $A=\{x\mid x$ 是菱形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是正方形$\}$，指出 A、B、C 之间的关系.

第一节　集　合

第四讲　并集　交集(1)

问题探知

学校先举办了一次田径运动会,某班有 8 名同学参赛;又举办了一次球类运动会,这个班有 12 名同学参赛,两次运动会这个班共有多少名同学参赛?

如果回答 20 名同学参赛,对吗?

教材全解

重点 1

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集(union set),记作 $A\cup B$(读作"A 并 B"),即

$A\cup B=\{x\mid x\in A$,或 $x\in B\}$.

在线课堂

(1)对于并集,要注意其中"或"的意义,"或"与通常所说的"非此即彼"有原则的区别,它们是"相容"的."$x\in A$ 或 $x\in B$"这一条件,包括下列三种情况:$x\in A$ 且 $x\notin B$;$x\in B$ 但 $x\notin A$;$x\in A$ 且 $x\in B$.因此,$A\cup B$ 是由所有至少属于 A、B 两者之一的元素组成的集合.

(2)$A\cup B$ 用 Venn 图表示如图 1-1-7.

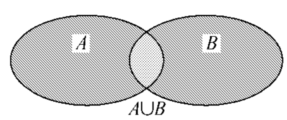

图 1-1-7

例 1 (1)已知 $A=\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$,$B=\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$,求 $A\cup B$.

(2)设 $A=\{x\mid -1<x<2\}$,$B=\{x\mid 1<x<3\}$,求 $A\cup B$.

思路导引

求两个集合的并集,实际上是求由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合.

解:(1)$A\cup B=\{x$ 是等腰三角形$\}\cup\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$ =________.

(2)利用数轴,由图 1-1-8 可知:

$A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}=$________.

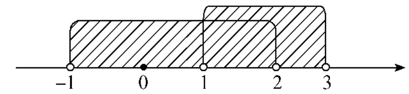

图 1-1-8

警示误区

求 $A\cup B$ 并不是简单罗列两个集合中的元素,根据集合中元素互异性特征,相同的元素在集合中只出现一次.

随　堂　练　习

1.设 $A=\{4,5,6,8\}$,$B=\{3,5,7,8\}$,求 $A\cup B$.

2.若集合 A 和集合 B 满足条件:$A\cap B=\{x\mid x$ 是正方形$\}$,你能构造出几对这样的集合?

3.设集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$,$B=\{x\mid 3x-7\geqslant 8-2x\}$,求 $A\cup B$.

重点 2

一般地,由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(intersection set),记作 $A\cap B$(读作"A 交 B"),即

$A\cap B=\{x\mid x\in A$,且 $x\in B\}$.

在线课堂

(1)$A\cap B$ 是由 A、B 所有公共元素组成的集合,即 $A\cap B$ 的元素既属于集合 A 又属于集合 B.

(2)$A\cap B$ 用 Venn 图表示如图 1-1-9.

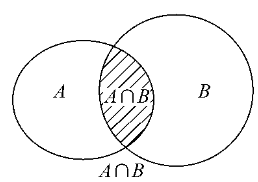

图 1-1-9

例 2 (1)新华中学开运动会,设

$A=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}$,

$B=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}$,

请解释集合运算 $A\cap B$ 的含义.

(2)已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{a-5,1-a,9\}$,分别求适合下列条件的 a 值:

①$9\in A\cap B$;②$\{9\}=A\cap B$.

思路导引

(1)$A\cap B$ 就是新华中学高一年级中那些既参加百米赛跑

又参加跳高比赛的同学组成的集合. (2) $9\in A\cap B$,说明 9 是 A 与 B 的一个公共元素;$\{9\}=A\cap B$,说明 A 与 B 的公共元素有且只有一个 9.

解:(1) $A\cap B=\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}\cap\{x\mid x$ 是新华中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}=$________.

(2) ①∵ $9\in A\cap B$ 且 $9\in B$,∴ $9\in A$,

∴ $2a-1=9$ 或 $a^2=9$,∴ $a=5$ 或 $a=\pm3$.

检验知:________.

②∵ $\{9\}=A\cap B$,∴ $9\in A\cap B$.

∴ $a=5$ 或 $a=\pm3$.

检验知:________.

方法技巧

解与集合元素有关问题时,最后结果要检验. 一方面看是否符合题意,一方面看是否符合集合元素的三大特征.

随 堂 练 习

4. 设平面内直线 l_1 上点的集合为 L_1,直线 l_2 上点的集合为 L_2,试用集合的运算表示 l_1、l_2 的位置关系.

5. $A=\{x\mid x^2-4x-5=0\}$,$B=\{x\mid x^2=1\}$,求 $A\cap B$.

重点 3

$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$;

$A\cap B=B\cap A$ 且 $A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$;

$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$;

$A\cup B=B\cup A$ 且 $A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$.

在线课堂

根据交集、并集的定义结合 Venn 图很容易得到以上这些性质.

例 3 设 $A=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}$,$B=\{(x,y)\mid y=5x-3\}$,求 $A\cap B$.

思路导引

A、B 都是无限集. 不妨设 $(x_0,y_0)\in A\cap B$,那么一方面 $(x_0,y_0)\in A$,所以有 $y_0=-4x_0+6$;另一方面 $(x_0,y_0)\in B$,所以有 $y_0=5x_0-3$. 所以 (x_0,y_0) 应是二元一次方程组 $\begin{cases}y=-4x+6\\ y=5x-3\end{cases}$ 的解.

解:$A\cap B=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}\cap\{(x,y)\mid y=5x-3\}$

$=$________________

$=$________________.

方法技巧

本题中 (x,y) 看作是二元一次方程组的解,是从数(式)的角度来考虑的. 若从形的角度来考虑,(x,y) 可以看作直线上的点的坐标. 求 $A\cap B$ 也就是求二直线交点坐标组成的集合,如图 1-1-10 所示,$A\cap B$ 为单元素集 $\{(1,2)\}$.

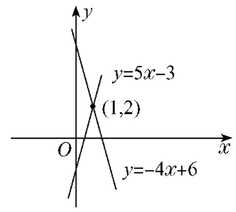

图 1-1-10

体验探究

例 4 我们知道,实数满足分配律,即若 a、b、$c\in\mathbf{R}$,那么有 $a(b+c)=ab+ac$. 那么如果将实数 a,b,c 换成三个集合 A,B,C,用类比的方法可以得出:

(1) $A\cap(B\cup C)=$________________.

(2) $A\cup(B\cap C)=$________________.

思路导引

利用 Venn 图 1-1-11 可以对上述结论(1)进行验证.

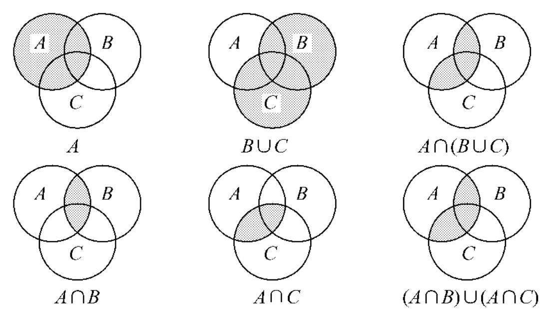

图 1-1-11

随 堂 练 习

6. (1) 若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,则 $A\cap C=$________,$B\cap C=$________.

(2) 若 $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\varnothing$,则 $A=$________,$B\cap C=$________.

要点记忆

1. 警示误区:(1) 求 $A\cup B$ 并不是简单罗列两个集合中的元素. 根据集合中元素互异性特征,相同的元素在集合中只出现一次.

(2) 解与集合元素有关问题时,最后结果要验证.

2. 解题规律:关于数集的交、并运算要充分利用数轴的直观性;关于点集的运算要尽可能在坐标系中进行.

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 设集合 $A=\{0,1,2,4,5,7\}$，$B=\{1,3,6,8,9\}$，$C=\{3,7,8\}$，则集合 $(A\cap B)\cup C$ 是　(　　)

A. $\{0,1,2,4,8\}$　　B. $\{3,7,8\}$

C. $\{1,3,7,8\}$　　D. $\{1,3,6,7,8\}$

2. 设集合 $A=\{y\in\mathbf{R}\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\in\mathbf{R}\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$　(　　)

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　　B. $\{(0,1)\}$

C. $\{(1,2)\}$　　D. $\{y\in\mathbf{R}\mid y\geqslant 1\}$

3. 已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y}{x^2}=1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-y=0\}$，$C=\{(0,0),(1,1),(-1,0)\}$，则 $(A\cup B)\cap C$ 等于　(　　)

A. $\{(0,0),(1,1)\}$　　B. $\{(0,0)\}$

C. $\{(1,1)\}$　　D. C

4. 满足 $A\cup B=\{a,b\}$ 的集合 A、B 的不同情形有　(　　)

A. 4 组　B. 5 组　C. 8 组　D. 9 组

5. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数有________个.

6. 已知方程 $x^2-px+15=0$ 与 $x^2-5x+q=0$ 的解集分别为 M 和 S，且 $M\cap S=\{3\}$，则 $\dfrac{p}{q}=$______.

7. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$C=\{x\mid -3<x<2\}$，且集合 $A\cap(B\cup C)=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，则 $a=$________，$b=$________.

[综合测试]

8. 设方程 $2x^2+x+p=0$ 的解集为 A，方程 $2x^2+qx+2=0$ 的解集为 B，$A\cap B=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

9. 已知方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根，X 是方程的解集，$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,4,7,10\}$，且 $X\cap A=\varnothing$，$X\cap B=X$，试求 b、c 的值.

[探究升级]

10. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\{$正实数$\}=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

心得笔记

[问题探知]　不对. 因为可能出现某些同学既参加了田径运动会，又参加了球类运动会的情况. 故不能确定为 20 名同学参赛

例 1]　(1) $\{x\mid x$ 是等腰三角形或直角三角形$\}$；

(2) $\{x\mid -1<x<3\}$

例 2]　(1) $\{x\mid x$ 是新华中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学$\}$；

(2) ①$a=5$ 或 $a=-3$；②$a=-3$

例 3]　$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=-4x+6\\y=5x-3\end{cases}\right.\right\}$，$\{(1,2)\}$

[体验探究]　(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

第一节　集　　合

第五讲　并集　交集(2)

问题探知

高一(3)班的学生中,参加语文课外小组的有 20 人,参加数学课外小组的有 22 人,既参加语文课外小组又参加数学课外小组的有 10 人,既未参加数学又未参加语文课外小组的有 15 人,你能算出高一(3)班共有学生多少人吗?

教材全解

重点 1

形如 $2n$ ($n\in Z$) 的整数叫做偶数,形如 $2n+1$ ($n\in Z$) 的整数叫做奇数.全体奇数的集合简称奇数集,全体偶数的集合简称偶数集.

在线课堂

因为整数有正整数、负整数、零之分,所以由奇数与偶数的定义可知,奇数含正奇数、负奇数,偶数有正偶数、负偶数和零.即

{奇数} $=\{2n+1\mid n\in Z\}=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5\cdots\}$;

{偶数} $=\{2n\mid n\in Z\}=\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}$.

例 1】 设 $A=\{x\mid x=2k,k\in Z\}$,$B=\{x\mid x=2k+1,k\in Z\}$,$C=\{x\mid x=2(k+1),k\in Z\}$,$D=\{x\mid x=2k-1,k\in Z\}$.在 A、B、C、D 中,哪些集合相等,哪些集合的交集是空集?

思路导引

用描述法表示的集合,要根据确定的条件来分析集合中元素所具有的特征.

解:____

____

____.

警示误区

由于受过去代数式的影响,因为 $2k\neq 2(k+1)$,$2k+1\neq 2k-1$,就误认为没有相等的集合.其实,在集合中当 $k\in \mathbf{Z}$ 时,$2k$ 与 $2(k+1)$ 都表示所有偶数的集合,$2k+1$ 与 $2k-1$ 都表示所有奇数的集合.集合用描述法表示可以有多种形式,不能只看表面形式的不同,而要看表示式所表示的意义是否相同,所表示的元素个数是否相同.如集合 $\{y\mid y=3x,x\in \mathbf{R}\}$ 与 $\{y\mid y=x+1,x\in \mathbf{R}\}$ 是相等的集合;而集合 $\{x\mid x=2k-1,k\in \mathbf{N}\}$ 与 $\{x\mid x=2k+1,k\in \mathbf{N}\}$ 却是不相等的集合.想一想,这是为什么?

随堂练习

1.已知 A 为奇数集,B 为偶数集,$\mathbf{Z}$ 为整数集,求 $A\cap B$,$A\cap \mathbf{Z}$,$B\cap \mathbf{Z}$,$A\cup B$,$A\cup \mathbf{Z}$,$B\cup \mathbf{Z}$.并思考 A 与 $A\cap \mathbf{Z}$,B 与 $B\cup \mathbf{Z}$ 的关系,那么这意味着什么规律呢?

重点 2

若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$;

若 $A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$;

若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$;

若 $A\cup B=B$,则 $A\subseteq B$.

在线课堂

(1)也就是说 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.这两个结论比较重要,在课内外习题中都有渗透.

(2)利用 Venn 图 1-1-12 可以比较容易地得到以上结论.

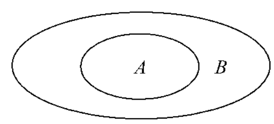

图 1-1-12

例 2】 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$,求 a 的值;

(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的值.

思路导引

在什么情况下 $A\cap B=B$?在什么情况下有 $A\cup B=B$?弄清它们的含义,问题就解决了.

解:$A=\{-4,0\}$.

(1)$\because A\cap B=B$,$\therefore$ ____________________.

①若 $0\in B$,则 $a^2-1=0$,$a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时,$B=A$;当 $a=-1$ 时,$B=\{0\}$.

②若 $-4\in B$,则 $a^2-8a+7=0$,$a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=7$ 时,$B=\{-12,-4\}$,$B\nsubseteq A$.

③若 $B=\varnothing$,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,$a<-1$.

由①②③得 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

(2)$\because A\cup B=B$,$\therefore$ ____________________.

$\because A=\{-4,0\}$,

又$\because B$ 至多只有两个元素,

$\therefore A=B$.

由(1)知,$a=1$.

警示误区

(1) $B=\varnothing$ 也是 $B\subseteq A$ 的一种情况,要优先考虑,不能遗漏.

(2) 要注意结果的检验,防止多解.

(3) 显然 $A\cap B=B \not\Leftrightarrow A\cup B=B$,故两问答案不一样.

例 3　已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,集合 $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,是否存在实数 a,使得集合 A、B 能同时满足下列三个条件:① $A\neq B$;② $A\cup B=B$;③ $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$?

若存在,求出这样的实数 a 的值;若不存在,试说明理由.

思路导引

根据给出的三个条件,我们知道集合 A,$A\subsetneqq B$ 且 $A\neq\varnothing$.

解:由已知条件求得 $B=\{2,3\}$,又 $A\cup B=B$,且 $A\neq B$,

$\therefore$ ________,又________,$\therefore A=\{2\}$ 或 $A=\{3\}$.

当 $A=\{2\}$ 时,将 2 代入 A 中方程,得 $a^2-2a-15=0$,

$\therefore a=-3$,或 $a=5$.

但此时集合 A 分别为 $\{2,-5\}$ 和 $\{2,3\}$ 与 $A=\{2\}$ 矛盾,

$\therefore$ ________________.

当 $A=\{3\}$ 时,同上也将导出矛盾.

综上所述,满足题设要求的实数 a 不存在.

方法技巧

本题的另外一个解法是:由上面的解法分析,可以断定集合 A 是一个包含在集合 B 中的单元素集,于是能直接由一元二次方程的判别式等于零来求集合 A,然后利用 A 中元素是否在 B 中来判断. 或根据韦达定理来检验单元素集 A 中的 2 或 3 是否为方程的重根. 如:若 $A=\{2\}$,则 $\begin{cases}2+2=a\\2\times 2=a^2-19\end{cases}$ 不可能. 读者不妨照此分析试一试.

随堂练习

2. 设 $A=\{-3,4\}$,$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0\}$,$B\neq\varnothing$,且 $A\cap B=B$,求实数 a、b 的值.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$,$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$,$A\cap C=C$,求 a,m.

综合延伸

在研究集合时,经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集,用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如,$A=\{a,b,c\}$,则 $\mathrm{card}(A)=3$.

一般地,对任意两个有限集合 A、B,有

$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

以上公式,我们可以利用 Venn 图 1-1-13 进行解释.

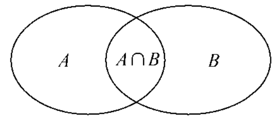

图 1-1-13

例 4　学校小卖部进了两次货,第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽车共 6 种. 第二次进的货是圆球笔、铅笔、火腿肠、方便面共 4 种,两次一共进了几种货?

思路导引

设 A 为第一次进货品种的集合,B 为第二次进货品种的集合,那么 $A\cap B$ 就是两次进货相同品种的集合. $\mathrm{card}(A)$,$\mathrm{card}(B)$,$\mathrm{card}(A\cap B)$ 是已知的,于是可以根据上面的公式求出 $\mathrm{card}(A\cup B)$.

解:设 $A=\{$第一次进货的品种$\}$

$B=\{$第二次进货的品种$\}$

那么 $A\cap B=\{$两次进货相同的品种$\}$

$A\cup B=\{$两次进货所有的品种$\}$

$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$

$=$ ________________.

随堂练习

4. 90 名学生中参加数学竞赛的有 63 名,参加化学竞赛的有 52 名,两次竞赛都参加的至多有多少名?至少有多少名?

要点记忆

1. 警示误区:$B\subseteq A$ 有三种情况. (1) $B=\varnothing$;(2) $B=A$;(3) $B\subsetneqq A$. 以上三种情况都不能遗漏.

2. 解题规律:(1) 奇、偶数集表示形式是多样的,

{奇数} $=\{2n+1\mid n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\cdots$

{偶数} $=\{2n\mid n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x\mid x=2n+2,n\in\mathbf{Z}\}$

$=\cdots$

(2) 有限集元素的个数

$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 已知 $A=\{x\,|\,x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\,|\,x=k+3,k\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B$ 等于　(　　)

A. B　B. A　C. $\varnothing$　D. $\mathbf{R}$

2. 若 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,$C=\{0,2,4,8\}$,则满足上述条件的集合 A 有　(　　)

A. 1 个　B. 7 个　C. 8 个　D. 9 个

3. 设 $M=\{1,2,m^2-3m-1\}$,$P=\{-1,3\}$,$M\cap P=\{3\}$,则 m 的值为　(　　)

A. 4　B. -1　C. $1,-4$　D. $4,-1$

4. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2+\sqrt{m}x+1=0\}$,若 $A\cap\mathbf{R}=\varnothing$,则实数 m 的取值范围为　(　　)

A. $m<4$　B. $m>4$

C. $0<m<4$　D. $0\leqslant m<4$

5. 设 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 $M\cup N=$________,$M\cap N=$________.

6. 若 $A=\{x\,|\,x=4n,n\in\mathbf{N}\}$,$B=\{y\,|\,y=6n,n\in\mathbf{N}\}$,则

(1) $A\cap B=$____________________(用描述法).

(2) $A\cup B=$____________________(用描述法).

7. 有下列四个命题:①若 $a\in A\cup B$,则 $a\in A$;②若 $a\in A\cap B$,则 $a\in A\cup B$;③若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$;④若 $A\cup B=A$,则 $A\cap B=B$. 其中是真命题的命题序号为____________.(把所有真命题的序号全部填上)

[综合测试]

8. 已知:两个不同集合 $A=\{1,3,a^2-a+3\}$,$B=\{1,5,a^3-a^2-4a+7\}$,$A\cap B=\{1,3\}$. 求:

(1) a 及集合 A 和 B;

(2) 满足 $A\cap B\subsetneqq M\subsetneqq A\cup B$ 的集合 M 的子集的个数.

9. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-ax+a^2-19=0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}$,求 a 取何值时,$A\cap B\neq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

[探究升级]

10. 设集合 $A=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y\,|\,y=2x+3,x\in A\}$,$C=\{y\,|\,y=x^2,x\in A\}$,若 $B\cup C=B$,求 a 的取值范围.

11. 已知集合 $A=\{x\,|\,x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant-1\}$,$B=\{x\,|\,2m<x<m-1,m\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\varnothing$,且 $A\cup B=A$,求 m 的取值范围.

12. 已知集合 $A=\{x\,|\,2a-1\leqslant x\leqslant a+2\}$,$B=\{x\,|\,3<x<5\}$,求能使 $B\supseteq A$ 成立的实数 a 的取值范围.

心得笔记

[问题探知]　参加语文和数学课外小组的共有 $20+22-10=32$(人),既未参加数学也未参加语文课外小组的有 15 人. 故高一(3)班有 $32+15=47$(人)

[例 1]　$A=C$,$B=D$,$A\cap B=\varnothing$,$A\cap D=\varnothing$,$B\cap C=\varnothing$,$C\cap D=\varnothing$

[例 2]　(1) $B\subseteq A$;(2) $A\subseteq B$

[例 3]　$A\subsetneqq B$,$A\neq\varnothing$,$a\neq-3$ 且 $a\neq5$

[综合延伸]　$6+4-2=8$