

主 编 金克勤

副主编 阮晓明 杨学才

编 委 陈群星 李柏青 蒋荣清 严永冬

方向东 郑鹏严 鲍德法 冯海容

黄 瑶 管西郎

前 言

加强数学应用知识的教学,是数学教育发展、改革的方向,它有助于改变目前中学数学教学中只重视定义、定理、推导、证明等抽象化和形式化的倾向,从而使数学成为与我们日常生活密切相关的工具.在数学教学中加强数学与实际生活的联系,注重学生应用意识和能力的提高,已成为广大数学教育工作者的共识.当前中学数学教材中,没有系统的关于数学应用知识的教学内容.中学数学应用的教学在平时也很少涉及.关于数学应用知识的参考资料较少,仅有的一些资料大多按问题分类,数学知识前后交叉,不与教材同步.

有鉴于此,编者总结了多年数学知识应用教学的经验,依据但不拘泥于数学教学大纲和教材,追踪近几年高考应用问题的动态,结合参加浙江省“九五”重点课题“数学建模理论、实践与浙江省中学数学教育改革”的研究实践,按现行中学数学教材编写了本书.

本书共分二十三讲,每一讲都对该讲中所涉及到的应用题类型、解题的思想方法和步骤作了归纳,配备了相应的例题和习题,可供中学师生按现行中学数学教材同步教学.由于编者水平有限,本书的不妥和错误之处在所难免,我们真诚地希望读者给予批评指正.

我们还要感谢西南交通大学出版社的领导,特别是苏宁编辑,没有他们的鼓励和帮助,没有他们的鼎力支持和辛勤劳动,这本书是不可能出版的.

编 者

2000 年 5 月

目 录

第 一 讲	数学应用题解法综述·····	1
第 二 讲	方程 ·····	15
第 三 讲	函数 ·····	24
第 四 讲	三角函数(一) ·····	36
第 五 讲	三角函数(二) ·····	44
第 六 讲	立体几何(一) ·····	52
第 七 讲	立体几何(二) ·····	62
第 八 讲	不等式(一) ·····	71
第 九 讲	不等式(二) ·····	82
第 十 讲	等差数列 ·····	92
第十一讲	等比数列·····	103
第十二讲	复数(一)·····	113
第十三讲	复数(二)·····	120
第十四讲	排列组合(一)·····	127
第十五讲	排列组合(二)·····	134
第十六讲	解析几何(一)·····	141
第十七讲	解析几何(二)·····	149
第十八讲	代数综合(一)·····	158
第十九讲	代数综合(二)·····	169

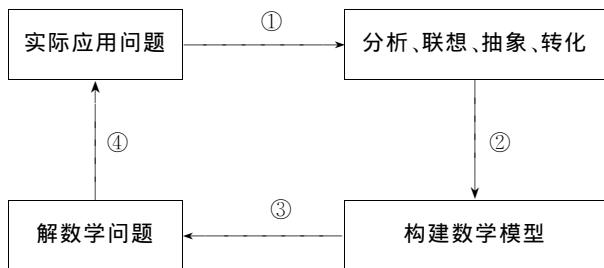
第二十讲	代数综合(三)·····	182
第二十一讲	立体几何综合·····	189
第二十二讲	解析几何综合·····	197
第二十三讲	中学数学建模·····	214
附录	历年来高考应用题选编·····	229
参考答案	·····	243

第一讲 数学应用题解法综述

数学的发展来源于社会实践、生活实际,它是人类实践经验的高度抽象的总结,它源于客观世界,服务于现实社会. 由于传统的中学数学教学,往往只强调数学的严密性、抽象性,只强调数学的公理体系和数学化的结果,而忽略了数学化的过程,因而学生缺乏应有的数学应用的训练. 随着社会的进步,数学渗入了社会的各个方面,得到了广泛的应用,直接为社会创造价值. 数学教育的目的就在于培养学生的数学意识和运用数学的能力,因此开展数学应用问题的教学研究是一项十分重要的工作. 中学数学应用问题的教学为学生提供了一个根据模拟客观现实而形成数学概念、构建数学模型、体现数学应用的一个舞台.

中学数学应用题的共同特点是有特定的生产、生活和社会活动等背景,按照某种规律,构成某种模型,尔后升华为数学问题. 应用问题的表现形式,常常不是以纯数学问题的模式反映出来. 因此,在数学应用题的解题过程中,首先需要通过审题,在实际的情景中去深刻理解、分析给出的问题,舍弃与解题无关的非本质的因素,并从宏观上抽象出问题的实质;其次,根据应用问题的特点,建立能够确切反映原问题实质的相应数学模型,将应用问题转化成数学问题;最后,解与应用问题对应的数学问题,并经过检验,给出应用问题的解.

解应用题的思路与方法符合 RMI 原则:



解题基本步骤

由于中学数学应用题是一种经过加工的数学应用问题，因此解应用题的基本步骤如下：

1. 审题 阅读原题，读懂题意，深刻理解问题实际背景，领悟其数学实质，把“问题情景”翻译成数学语言，找出问题的主要关系（目标与条件的关系）。

2. 建模 将问题的主要关系抽象、归纳出它们的数量关系，建立符合实际的数学模型。

3. 求解 根据所建立模型，选择合适的数学方法，解出模型的数学结果。

4. 检验 根据求解数学模型所得到的结果，对结果进行检验、判断、修正，得出符合实际意义的答案。

解决数学应用问题有四忌：一忌望题生畏、畏难而退，二忌审题不细、关系不明，三忌主次不分、舍本求末，四忌量纲混乱、脱离实际。

建模的基本类型

1. 集合与映射 计数问题、编码问题、体育比赛场次问题等

2. 函数

(1) 一次函数:线性拟合、物资调配、仓库设置等;

(2) 二次函数:用料最省、造价最低、利润最大等问题;

(3) 幂函数:商品定价等问题;

(4) 指、对数函数:细胞分裂、种群繁殖,借贷款问题,非线性拟合和预测;

(5) 函数的单调性与极值:最优化问题(最大、最小,变化趋势).

3. 不等式 临界值的计算,变化范围的确定,最优化问题,简单的线性规划.

4. 等差数列 住房面积、产量、土地面积等增、减问题,运输路程问题.

5. 等比数列 人口增长、资产折旧、银行存贷利率、分期付款问题,生物种群的变化、股票等问题.

6. 三角函数 测量问题,位置确定问题,力学电学光学等问题.

7. 复数 距离计算、平面测量问题,平面位置确定问题.

8. 立体几何

(1) 直线与平面:测高与测长;

(2) 表面展开:下料问题,布线问题,包装材料问题,圆管或方管弯头的展开图;

(3) 面积与体积:容积、体积计算与最值问题.

9. 解析几何 油罐车、通风塔、拱型桥、喷泉系统等设计与计算,物体运行轨迹确定,声差定位,最优化问题,工件间接检测问题等.

10. 排列组合 编排问题,分配问题等.

建模的主要方法

1. 目标函数法

实际应用问题中的每一个关系都蕴含着数学的某种对应关系,分析这种对应关系的变化规律,将这些规律符号化、数量化,然后建立条件与目标函数关系式(目标函数),是解决函数型、数列型数学应用题的关键.

例 1 某地区上年度电价为 0.8 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$,年用电量为 a $\text{kW} \cdot \text{h}$,本年度计划将电价降到 0.55 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 至 0.75 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 之间,而用户期望电价为 0.4 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$,经测算下降电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价差价成反比(比例系数为 k),该地区电力成本价为 0.3 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$;

(1) 写出全年度电价下调后,电力部门的收益与实际电价的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$,当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益 y 比上年至少增长 20% .

分析 首先要全面而深刻地理解问题的含义,特别是理解特殊字词的含义以及它们之间的关系:

实际用电量 = 原用电量 + 新增用电量,

$$\text{新增用电量} = \frac{k}{\text{实际电价} - \text{用户期望电价}},$$

收益 = 实际用电量 $\times$ (实际电价 - 成本价).

这样我们就可以比较容易地建立起目标函数.

解

(1) 设本年度实际电价为 x 元/ $\text{kW} \cdot \text{h}$,根据题意,新增用电量为 $\frac{k}{x-0.4}$,实际用电量为 $a + \frac{k}{x-0.4}$,因此,电力部门的收益为

$$y = \left(a + \frac{k}{x-0.4} \right) (x-0.3),$$

故所求函数及定义域为:

$$y = \left(a + \frac{k}{x-0.4} \right) (x-0.3), \quad x \in [0.55, 0.75].$$

(2) 当 $k=0.2a$ 时, 电力部门的收益为 $\left(a + \frac{0.2a}{x-0.4} \right) (x-0.3)$, 比去年增长 20% 的收益为 $(1+20\%) \cdot a \cdot (0.8-0.3)$, 因此

$$\left(a + \frac{0.2a}{x-0.4} \right) (x-0.3) \geq (1+20\%) \cdot a \cdot (0.8-0.3),$$

且 $0.55 \leq x \leq 0.75$,

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & \begin{cases} \frac{(x-0.2)(x-0.3)}{(x-0.4)} \geq 0.6, \\ 0.55 \leq x \leq 0.75, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1.1x + 0.3 \geq 0, \\ 0.55 \leq x \leq 0.75, \end{cases} \\ & \Rightarrow 0.60 \leq x \leq 0.75. \end{aligned}$$

当电价最低定价为 0.60 元/kW·h 时, 仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%.

例 2 现有流量均为 $300 \text{ m}^3/\text{s}$ 的两条河流 A、B, 它们的含沙量分别为 $2 \text{ kg}/\text{m}^3$ 和 $0.2 \text{ kg}/\text{m}^3$, 汇合于某处后, 不断混合. 假设从汇合处开始, 沿岸设有若干观测点. 两股水流经相邻两个观测点的过程中, 其混合效果相当于两股水流在 1 秒钟内交换 100 m^3 的水量, 即从 A 股流入 B 股 100 m^3 水, 经混合后, 又从 B 股流入 A 股 100 m^3 水并混合. 问: 从第几个观测点开始, 两股河水的含沙量之差小于 $0.01 \text{ kg}/\text{m}^3$ (不考虑泥沙沉淀)?

注 设含沙量为 $a \text{ kg}/\text{m}^3$ 、 $b \text{ kg}/\text{m}^3$ 的两股水流在单位时间内流过的水量分别为 $p \text{ m}^3$ 、 $q \text{ m}^3$, 则其混合后的含沙量为 $\frac{ap+bq}{p+q} \text{ kg}/\text{m}^3$.

分析 本问题涉及河水泥沙含量平均减少和含沙量在某个确定范围内的问题,因此可以考虑建立数列模型和不等式模型,首先应建立 A 、 B 两股河水经过各个观测点后的含沙量的目标函数(数列是一种特殊的函数).对于数列而言,有时这种函数会以隐函数的形式出现,亦即以数列的递推关系出现.

解 设在第 n 个观测点处 A 股水流含沙量为 $a_n \text{ kg/m}^3$, B 股水流含沙量为 $b_n \text{ kg/m}^3$, $n=1, 2, \dots$. 显然, $a_1=2, b_1=0.2$, 根据题目中所给出的河水混合后含沙量的计算公式(数学模型),有

$$b_n = \frac{300b_{n-1} + 100a_{n-1}}{300 + 100} = \frac{1}{4}(3b_{n-1} + a_{n-1}),$$

$$a_n = \frac{200a_{n-1} + 100b_{n-1}}{200 + 100} = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_n)$$

$$= \frac{1}{4}(3a_{n-1} + b_{n-1}),$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}), \text{ 且 } a_1 - b_1 = 1.8,$$

故 $\{a_n - b_n\}$ 是以 1.8 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, $a_n - b_n =$

$\frac{1.8}{2^{n-1}}$. 由题目要求得

$$\frac{1.8}{2^{n-1}} < 10^{-2}, \text{ 即 } 2^{n-1} > 180,$$

故 $n-1 \geq 8, n \geq 9$.

因此,从第 9 个观测点开始,两股水流的含沙量之差小于 0.01 kg/m^3 .

2. 图形分析法

图形分析法是通过将问题几何化,经过对几何图形的分析,确定问题的数学模型,而后将问题予以解决的方法.这种方法

在应用问题的解决过程中也是经常采用的.

例 3 有一个车间接到一批生产任务,需要加工 6 000 个 A 型零件和 2 000 个 B 型零件. 这个车间有 214 名工人,他们每一人加工 5 个 A 型零件的时间可以加工 3 个 B 型零件. 将这些工人分成两组,两组同时工作,每组加工一种型号的零件,为了在最短的时间内完成这批任务,应怎样分组?

分析 所谓完成任务是指两组都完成任务,显然要建立工人的人数与工作时间的函数关系.

解 设加工 A 型零件的一组工人人数为 x ,在单位时间内一个工人加工 A 型零件数为 $5k$,则另一组工人的人数为 $214-x$,在单位时间内一个工人加工 B 型零件数为 $3k$.

加工 A 型零件所需的时间为:

$$t_A(x) = \frac{6\,000}{5kx};$$

加工 B 型零件所需的时间为:

$$t_B(x) = \frac{2\,000}{3k(214-x)},$$

所以,完成整个任务的时间为

$$t(x) = \max\{t_A(x), t_B(x)\} = \frac{2\,000}{k} \cdot f(x),$$

其中 $f(x) = \max\left\{\frac{3}{5x}, \frac{1}{3(214-x)}\right\}$.

这样,现在将问题转化为求自然数 $x (1 \leq x \leq 213)$,使得函数 $f(x)$ 取最小值.

如何求 $f(x)$ 的最小值? 作出 $f_1(x) = \frac{3}{5x}$, $f_2(x) = \frac{1}{3(214-x)}$ 的图像.

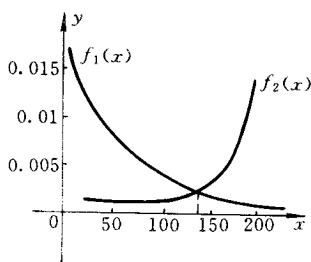
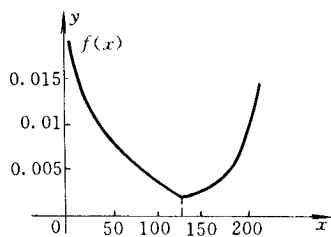


图 1-1

从函数图像 1-1 可知:在区间 $[1, 213]$ 上, $\frac{3}{5x}$ 为减函数, $\frac{1}{3(214-x)}$ 为增函数,故 $f(x)$ 的最小值在方程 $\frac{3}{5x} = \frac{1}{3(214-x)}$ 的解 $x_0 = 137 \frac{4}{7}$ 取到,因 $x_0 = 137 \frac{4}{7}$ 不是整数,且 $f(137) < f(138)$,所以,加工 A 型零件组的人数是 137,另一组人数为 77.

例 4 饮食店供应早点有馒头、肉包子、煎饼等. 每天能卖出 50 斤面粉的早点,每斤面粉能做各种早点的数量和售价如表 1.

表 1

	只/斤	元/只	(毛利)元/10 千克
馒 头	12	0.2	24
肉包子	20	0.3	60
煎 饼	10	0.5	50

由于顾客口味不同,近 10 天各种早点的用粉量记录如表 2.

表 2

时 间(天)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
包子用粉(斤)	16	18	17	22	20	17	19	22	19	20
馒头用粉(斤)	20	17	21	18	19	19	20	17	19	18
煎饼用粉(斤)	14	15	12	10	11	15	11	11	12	12

根据上述条件,如何安排各品种早点数量才能获得最大收益?

分析 先确定每天各种早点用粉量的范围,并写出收益函数,利用函数图像求解.

解 设每天做包子用去 x 斤粉,做馒头用去 y 斤粉,则做煎饼用去了 $[50-(x+y)]$ 斤粉,毛利 P 可按下式计算:

$$60x + 24y + 50[50 - (x + y)] = P, \quad (1)$$

上式可变形为

$$y = (5/13)x + (2\,500 - P)/26, \quad (2)$$

且 $16 \leq x \leq 22, \quad 17 \leq y \leq 21$.

P 取常数,(2)式表示一族斜率为 $5/13$ 的平行直线,它们的纵截距为 $y_0 = (2\,500 - P)/26$. 我们要求 P 最大,即是求这纵截距最小. 如图 1-2 所示: $16 \leq x \leq 22, 17 \leq y \leq 21$ 构成一矩形区域,当直线过点 $(22, 17)$ 时纵截距最小.

将 $x=22, y=17$ 代入(1),可得

$$P = 2\,278, \text{ 即 } P = 227.8(\text{元}).$$

例 5 某矿石基地 A 和冶炼厂 B 在铁路 MN 的两侧, A 距铁路 a km, B 距铁路 b km. 在铁路上要建造两座火车

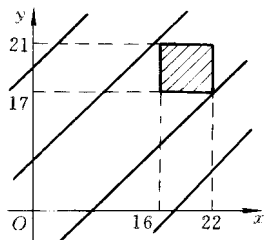


图 1-2

站 C 和 D , A 地矿石先用汽车由公路运到 C , 然后用火车运到 D , 再用汽车运到 B , 如图 1-3 所示. 设 AB 在铁路 MN 上的投影 A_1B_1 长 $L\text{km}$ (L 很大). 若汽车速度为 $u\text{ km/h}$, 火车速度为 $v\text{ km/h}$, 这里 $u < v$. 为使运输矿石时间最短, 火车站 C 、 D 应建在什么地方? 对于给出的结论请作一个简要的分析.

分析 这是一个最优化问题, 建立函数模型或不等式模型予以解决, 但由于问题中, 车站 C 、 D 的位置的可变动性, 如果我们直接给出目标函数, 虽然数学模型是能够建立起来, 可是由于中学生数学知识的局限, 数学模型的解决将是非常困难的. 见图 1-3, 分析图形, 我们暂不考虑车站 D , 先求从 A 经 C 到 B_1 所需时间的最小值, 如果这个最小值与 B_1 的位置无关, 即两站设置互不影响, 那么, 我们就可以建立较为简单的数学模型了.

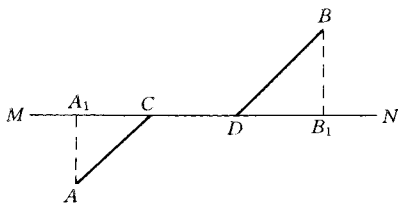


图 1-3

解 设 $A_1C = x$, 则 $AC = \sqrt{x^2 + a^2}$, 从 A 经 C 到 B_1 所需时间 t 的目标函数是

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{L - x}{v}, \quad (0 < x < L). \quad (1)$$

把(1)化归为关于 x 的二次方程:

$$\frac{u^2 - v^2}{u^2 v^2} x^2 + 2 \cdot \frac{1}{v} \left(t - \frac{L}{v} \right) x + \left(t - \frac{L}{v} \right)^2 - \frac{a^2}{u^2} = 0, \quad (2)$$

由 $\Delta \geq 0$, 得 $\left(t - \frac{L}{v}\right)^2 \geq \frac{v^2 - u^2}{u^2 v^2} a^2$,

由实际意义知 $t - \frac{L}{v} > 0$,

因此 $t_{\min} = \frac{L}{v} + \frac{a}{uv} \sqrt{v^2 - u^2}$,

代入(2)得 $x = \frac{au}{\sqrt{v^2 - u^2}}$,

即 C 站距离 A_1 为 $\frac{au}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ 千米. 由于它确实与 L 无关, 因此

这个模型建立是正确的, 类比得 D 站距离 B 为 $\frac{bu}{\sqrt{v^2 - u^2}}$. 由于

L 很大, 因此, L 必满足条件 $L > \frac{(a+b)u}{\sqrt{v^2 - u^2}}$.

简析 根据计算所得的结果知, L 必满足条件 $L > \frac{(a+b)u}{\sqrt{v^2 - u^2}}$, 当 $L \leq A_1C + DB_1$ 即 $L < \frac{(a+b)u}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ 时, 建造两个火车站已没有必要了.

另解 本题也可利用三角函数建立数学模型, 设

$$\angle ACA_1 = \alpha, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

则 $AC = \frac{a}{\sin \alpha}$, $A_1C = a \cot \alpha$, $B_1C = L - a \cot \alpha$,

得到时间 t 的目标函数

$$t = \frac{av - a \cos \alpha}{uv \sin \alpha} + \frac{L}{v} = \frac{a}{v} \left(\frac{\frac{v}{u} - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{L}{v},$$

设 $t_1 = \frac{\frac{v}{u} - \cos \alpha}{\sin \alpha}$,

$$t_1 \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{v}{u},$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{v}{u \sqrt{1+t_1^2}} \leq 1, \quad \left(\varphi = \arctan \frac{1}{t_1} \right),$$

得

$$t_1 \geq \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u},$$

因此

$$t_{\min} = \frac{L}{v} + \frac{a}{uv} \sqrt{v^2 - u^2},$$

此时

$$A_1 C = a \cot \alpha = a \tan \varphi = \frac{au}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

即 C 站距离 A_1 为 $\frac{au}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ km. 同理得 D 站距离 B 为 $\frac{bu}{\sqrt{v^2 - u^2}}$ km.

3. 数量分析法

应用问题的解决反映在数学模型上是一些量之间的某种关系(特别是相等或不等),抓住这些量之间的相互关系是关键,建立数学模型是解决数学应用问题的重要方法之一.

例 6 在一个很大的湖岸边(可视湖岸为直线)停放着一只小船. 由于缆绳突然断开,小船被风刮跑,其方向与河岸成 15° 角,速度为 2.5 km/h. 同时岸上有一人,从同一地点开始追赶小船,已知他在岸上跑的速度为 4 km/h,在水中游的速度为 2 km/h. 问此人能否追上小船?小船能被人追上的最大速度可为多少?

分析 由于人在水中游的速度小于船被风刮跑的速度,人只有先沿岸跑一段路程后再游水追赶船,这样才有可能追上. 所以问题不是同一直线上的追及问题,而是当人沿岸跑的轨迹和人在水里游的轨迹以及船在水中行驶的轨迹组成一个封闭的三角形时,人才能追上小船. 由于人在岸上跑所用的时间与人在水中游所用时间之和等于船在水中行驶所用的时间,因此三