新世纪版中学学科同步训练 粤月悦丛书

主编　郭维亮
编者　张维谐　冯立明　王儒钲

ABC 高中数学

（一年级用）

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本丛书是根据全日制普通高级中学的教学大纲分学科编写而成的. 本丛书符合各学科的教学目的和要求.

本书是供高中二年级学生使用的代数分册,根据课本内容按章编写. 每一章分设“知识要点与学习水平”“典型例题”“练习”及“单元自测”.“知识要点与学习水平”归纳了对学生不同要求的知识点;“典型例题”使学生深入理解并灵活运用所学的知识;“练习”及“单元自测”帮助考察学生学习的效果并训练学生解决问题的能力. 另外,书中设有“阶段自测”及两个学期的期末自测. 书末附有答案.

责任编辑　周玉刚

新世纪版中学学科同步训练 ABC 丛书
高 中 数 学
(二年级用)
主编　郭维亮
编者　张维谐　冯立明　王儒钲
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路 450 号　邮政编码 200020)
新华书店上海发行所经销　　上海 XXXX 印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 XXX　字数 XXX 000
2002 年 6 月第 1 版　　2002 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—XXX 000
ISBN 7-5323-6533-6/G·1469
定价:XXX.XX 元

出版说明

《新世纪版中学学科同步训练ABC》丛书是以全日制普通高级中学语文、数学、英语、物理、化学教学大纲为依据分学科编写的学习辅导参考用书．它与当前的教学有一定的同步性，并符合以上五门学科的教学目的和要求，成为教师指导学生学习的极好助学手段．

本丛书的特点是用A、B、C三级训练方式，体现教材单元的知识坡度；体现学生学习过程的自我评价和循序渐进．

A级——面向全国各地区的学生．这一级训练的水平体现教育大纲中最基本的要求．

B级——用以提高学生综合应用知识的能力．这一级训练是体现培养能力和发展智力，体现大多数学生应达到的水平．

C级——配有适当比例的竞赛类、趣味类、智力训练等题目，以开拓学生的知识面，提高灵活解题的技巧和能力．

整套丛书训练题的设计特色，既体现知识体系，又符合学生实际水平与认知规律，重视直观性与操作性，书末均附有答案，可供学生在练习后进行自测检查．

上海科学技术出版社

2002年春

目录

第六章

不　等　式

6.1　不等式的性质

要点整理

1. $a>b \Leftrightarrow a-b$ ____ 0；$a=b \Leftrightarrow a-b$ ____ 0；$a<b \Leftrightarrow a-b$ ____ 0.

2. 要比较两个实数的大小，只要考察它们的________就可以了.

3. 不等式的性质有 5 个定理，其中定理 3 有一个推论，定理 4 有两个推论，它们是：

定理 1 ____.

定理 2 ____.

定理 3 ____.

推论____.

定理 4 ____.

推论 1 ____.

推论 2 ____.

定理 5 ____.

典型例题

例 1　已知 a,b 是不相等的正数，试比较 a^3+b^3 与 a^2b+ab^2 的大小.

解　$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)+b^2(b-a)$

$$=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b).$$

因为 a,b 是不相等的正数，所以 $(a-b)^2(a+b)>0$，即

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

点评　要比较两个实数 A,B 的大小，只要考察它们的差就可以了. 若 $A-B>0$，则 $A>B$ 若 $A-B=0$，则 $A=B$ 若 $A-B<0$，则 $A<B$. 在考察差 $A-B$ 的符号时，常需要将式子进行因式分解.

例 2　已知 $a>2$，$b>2$，试比较 $a+b$ 与 ab 的大小.

解　$ab-(a+b)=ab-a-b+1-1=(a-1)(b-1)-1$.

因为 $a>2$，$b>2$，所以 $a-1>1$，$b-1>1$，$(a-1)(b-1)>1$，从而 $(a-1)(b-1)-1>0$，即

$$ab>a+b.$$

点评　两个用式子表示的实数的大小，往往与式子中字母的取值有关，因此在确定差 $A-B$ 的符号时，要利用题目给出的字母的取值范围. 若题目没有给出字母取值范围的条件，则有时需要进行讨论.

例 3　已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，求 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

解 ∵ $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，∴ $-\pi<-\beta<-\frac{\pi}{2}$.

∵ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴ $0-\pi<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$，即 $-\pi<\alpha-\beta<0$.

点评 为求 $\alpha-\beta$ 的取值范围，可先由 β 的取值范围求得 $-\beta$ 的取值范围（根据不等式的性质定理 4），再根据不等式的性质定理 3 的推论求得 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

例 4 选择题[*]：已知 $a<b<0$，则下列不等式中正确的是（ ）.

（A）$a^2<ab$ （B）$ab<b^2$ （C）$a^2<b^2$ （D）$a^3<b^3$

解 ∵ $a<b<0$， ∴ $-a>-b>0$.

根据定理 4 的推论 2，得

$$(-a)^3>(-b)^3,$$

即 $-a^3>-b^3$， ∴ $a^3<b^3$.

故应选 D.

点评 本例主要说明怎样运用定理 4 及其两个推论. 因为 $a<0$，$b<0$，所以不等式 $a<b$ 的两端分别乘以 a，b，应得 $a^2>ab$ 和 $ab>b^2$，因此（A），（B）都是错误的. 又因为 $a<b<0$，因此不能直接应用推论 2 得 $a^2<b^2$，而应由 $a<b<0$ 得 $-a>-b>0$ 后，再应用推论 2 得 $(-a)^2>(-b)^2$，即 $a^2>b^2$. 因此（C）也是错误的.

练习一（A 级）

1. 比较下列各组中两个代数式的值的大小：

（1）$(a+1)(a-4)$ 与 $(a+3)(a-6)$；

（2）$(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ 与 $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$；

（3）$\sqrt{y}+1$ 与 $\sqrt{y+1}$.

2. 已知 $a>b>0$，且 $c>0$. 比较 $\frac{a+c}{b+c}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的大小.

3. 选择题：

（1）下列命题中正确的是（ ）.

（A）若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$ （B）若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

（C）若 $a>b$，则 $a^2>b^2$ （D）若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

（2）已知 $a<b<0$，则（ ）.

（A）$a^2<b^2$ （B）$a^3<b^3$ （C）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ （D）$\frac{b}{a}>1$

（3）已知 $a>b$，$c>d$，则下列不等式中一定成立的是（ ）.

（A）$a-c>b-d$ （B）$a-c>d-b$ （C）$a-d>b-c$ （D）$a-d>c-b$

4. 若 $a<b<0$，则 a^4，b^4，a^3b，ab^3 按照从小到大的顺序排列，并用小于号连结，得 ________.

---

[*] 本书中的选择题，每个小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个结论是正确的，把你认为正确结论的代号写在题后的括号内，下同.

5. 已知 $2<a<10$，$3<b<6$，求 $a+b$，$a-b$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围.

6. (1) 由 $a<b$ 能否得出 $a^4<b^4$？为什么？

(2) 由 $a<b$ 能否得出 $a^5<b^5$？为什么？

7. 求证：(1) 如果 $a>b>0$，$x>y>0$，那么 $\frac{a}{y}>\frac{b}{x}$；

(2) 如果 $m>a>b>0$，那么 $\frac{a}{a-m}<\frac{b}{b-m}$.

6.2 算术平均数与几何平均数

要点整理

1. 我们称________为 a，b 的算术平均数，________为 a，b 的几何平均数.

2. 两个正数的算术平均数________它们的几何平均数. 如果 a，b 是正数，这个关系用式子表示为____________.

3. 不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是否相同？如不相同，写出不同之处？

4. 已知 x，y 都是正数.

(1) 如果积 xy 是定值 p，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最________值________；

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最________值________.

5. 由 $x^2+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x}$ 知，当 $x=1$ 时 $x^2=\frac{1}{x}$，这时 $x^2+\frac{1}{x}=2\sqrt{x}=2$，能不能得出“$x^2+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2”的结论？为什么？

典型例题

例　求周长为 l 的直角三角形面积的最大值.

解法一　设直角三角形两条直角边的长分别为 a，b，由已知，得

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=l,$$

则

$$\sqrt{a^2+b^2}=l-a-b,$$

$$a^2+b^2=l^2+a^2+b^2-2la-2lb+2ab,$$

$$(2l-2a)b=l^2-2la,$$

$$\therefore\quad b=\frac{l(l-2a)}{2(l-a)}.$$

直角三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\cdot\frac{l(l-2a)}{2(l-a)}=\frac{l}{4}\cdot\frac{la-2a^2}{l-a}=\frac{l}{4}\cdot\frac{2la-2a^2+l^2-la-l^2}{l-a}$$

$$=\frac{l}{4}\left(2a+l-\frac{l^2}{l-a}\right)=\frac{l}{4}\left\{3l-\left[2(l-a)+\frac{l^2}{l-a}\right]\right\}.$$

$$\because\quad l-a>0,\quad\therefore\quad 2(l-a)+\frac{l^2}{l-a}\geqslant 2\sqrt{2(l-a)\cdot\frac{l^2}{l-a}}=2\sqrt{2}l.$$

$\because\quad \frac{l}{4}>0$，$\quad\therefore\quad S\leqslant\frac{l}{4}(3l-2\sqrt{2}l)=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$.

当且仅当 $2(l-a)=\frac{l^2}{l-a}$，即 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$ 时，上式取等号，这时可求得 $b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$.

所以当 $a=b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$ 时，直角三角形面积有最大值$\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$.

解法二　设直角三角形两条直角边的长分别为 a，b，由已知，得

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=l.$$

$\because\quad a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}$，$\quad\therefore\quad 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}\leqslant a+b+\sqrt{a^2+b^2}=l.$

设直角三角形的面积为 S，则

$$2\sqrt{2S}+2\sqrt{S}\leqslant l.$$

$\therefore\quad \sqrt{S}\leqslant\frac{l}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}l$，$\quad S\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$.

当且仅当 $a=b$ 时上式取等号，这时 $2a+\sqrt{2}a=l$，$a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$.

即当 $a=b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$ 时，S 取最大值$\frac{3-2\sqrt{2}}{4}l^2$.

练习二（A 级）

1．选择题：

（1）已知 a，b 都是正数，且 $a\neq b$，则下列不等式中成立的是（　　）.

（A）$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$　　（B）$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$

（C）$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}>\sqrt{ab}$　　（D）$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\frac{2ab}{a+b}$

（2）已知 $0<a<1$，$0<b<1$，且 $a\neq b$，则下列各式中值最大的是（　　）.

（A）$2\sqrt{ab}$　　（B）$2ab$　　（C）$a+b$　　（D）a^2+b^2

2．已知 a，b 都是正数，且 $a\neq b$，设 $A=\frac{a+b}{2}$，$G=\sqrt{ab}$，$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，$H=\frac{2ab}{a+b}$，则 A，G，Q，H 按照从小到大的顺序排列为__________.

3．已知 a，b 都是正数，求证：$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant4$.

4．已知 a，b，c 都是正数，且 $a+b+c=1$．求证：$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant8abc$.

5．已知 $a>0$，n 是正整数，求证：$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)\geqslant2^n\cdot a^{\frac{n^2+n}{4}}$.

6．已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $12\tan\theta+27\cot\theta$ 的最小值.

7．求函数 $y=3-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}$的最大值及相应的 x 的值.

8．求函数 $y=\frac{1}{x}\left(6-\frac{1}{x}\right)\left(x>\frac{1}{6}\right)$的最大值及相应的 x 的值.

第六章　不　等　式

9. 若直角三角形的斜边长为定值 l,求这直角三角形面积的最大值.

6.3 不等式的证明

要点整理

1. 本章要求掌握的几种证明不等式的常用方法是________法,________法和________法.

2. 要证明 $a>b$,只要证明________要证明 $a<b$,只要证明________,这种证明不等式的方法通常叫做比较法.用比较法证明不等式的步骤是________、________、________.

3. 利用________和________推导出所要证明的不等式成立,这种证明方法通常叫做综合法.

4. 证明不等式时,有时可以从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的________条件,把证明不等式转化为判定这些________条件是否具备的问题,如果能肯定这些________条件都已具备,那么就可以断定原不等式成立.这种证明方法通常叫做分析法.

5. 我们常用________法探索证明的途径,然后用________法的形式写出证明过程,这是解决数学问题的一种重要思想方法.

典型例题

例 1 已知 $a>0$, $b>0$. 求证:$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b$.

证明 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-(a+b)=\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{ab}=\frac{a^2(a-b)-b^2(a-b)}{ab}$

$=\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{ab}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$.

$\because$ $a>0$, $b>0$, $\therefore$ $a+b>0$, $ab>0$, $(a-b)^2\geqslant 0$. $\therefore$ $\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geqslant 0$.

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-(a+b)\geqslant 0$, $\therefore$ $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b$.

例 2 求证:$a^2+b^2+6>2(2a+b)$.

证明 $\because$ $(a^2+b^2+6)-2(2a+b)=a^2+b^2+6-4a-2b$

$=(a-2)^2+(b-1)^2+1\geqslant 1>0$,

$\therefore$ $a^2+b^2+6>2(2a+b)$.

点评 以上两例都是应用比较法进行证明的.用比较法证明不等式的步骤是:作差、变形、判断符号.其中变形是关键."变形"指的是将差变形,变形的目的是为了判断符号,变形的方法一般是分解因式(如例1)或配方(如例2).

例 3 已知 a,b,c 是不全相等的正数.

求证:$ab+bc+ca>a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$.

证明 $\because$ $ab+ca\geqslant 2\sqrt{ab\cdot ca}=2a\sqrt{bc}$, $ab+bc\geqslant 2\sqrt{ab\cdot bc}=2b\sqrt{ca}$,

$bc+ca\geqslant 2\sqrt{bc\cdot ca}=2c\sqrt{ab}$.

因为 a,b,c 不全相等,所以 ab,bc,ca 也不全等,从而以上三式不能全取等号,

$\therefore\quad 2(ab+bc+ca)>2(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})$,

即
$$ab+bc+ca>a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

点评　本例是用综合法进行证明的．用综合法证明不等式是由已知的不等式出发，利用不等式的性质推导出要证明的不等式成立的方法．用综合法证明不等式的关键是根据要证明的不等式的结构特点选择已知的不等式作为证明的起点．

例4　已知 $a>b>0$. 求证：$a-b<\sqrt{a^2-b^2}$.

证明　$\because\quad a>b>0$，$\therefore\quad a-b$ 和 $\sqrt{a^2-b^2}$ 都是正数．

为了证明 $a-b<\sqrt{a^2-b^2}$，只需证明 $(a-b)^2<a^2-b^2$.

展开，得　$a^2-2ab+b^2<a^2-b^2$.

即
$$b^2<ab.$$

$\because\quad a>b>0$，只需证明　$b<a$.

因为 $b<a$ 成立，所以 $(a-b)^2<a^2-b^2$，

即证明了　$a-b<\sqrt{a^2-b^2}$.

点评　用分析法证明不等式，就是从要求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，再分析能使这个充分条件成立的充分条件．…照此递推上去，一直推出一个已成立的不等式(这个不等式就是用综合法证明不等式时的起点)．由于这个不等式成立，可知要证明的不等式成立．

本例中，由已知不等式 $a>b>0$ 成立，推得了要证明的不等式成立．如果我们用综合法证明这个不等式成立，$a>b>0$ 便是起点．将上述证明过程从后向前写出来，便是综合法的证明．证法如下：

证明　$\because\quad a>b>0$，$\therefore\quad b^2<ab$，$2b^2<2ab$.

不等式两边都加上 $a^2-2ab-b^2$，得

$$a^2-2ab+b^2<a^2-b^2,$$

即
$$(a-b)^2<a^2-b^2.$$

$\because\quad a>b>0$，$\therefore\quad a-b>0$，$a^2-b^2>0$.　$\therefore\quad a-b<\sqrt{a^2-b^2}$.

对同一题，可以有不同的分析方法，从而有不同的证明方法．以上题为例：

证明　$\because\quad a>b>0$，$\therefore\quad a-b$ 和 a^2-b^2 都是正数，且 $\sqrt{a^2-b^2}$ 也是正数，要证明 $a-b<\sqrt{a^2-b^2}$，

即要证明　$\sqrt{(a-b)^2}<\sqrt{(a-b)(a+b)}$，只需证明　$\sqrt{a-b}<\sqrt{a+b}$.

即
$$a-b<a+b.\quad 0<b.$$

因为 $0<b$ 成立，所以 $a-b<\sqrt{a^2-b^2}$ 成立．

根据以上分析，此不等式的证明还可用综合法证明如下：

证明　$\because\quad a>b>0$，$\therefore\quad -b<b$，$a-b<a+b$.

$\therefore\quad a-b>0$，$\therefore\quad (a-b)^2<(a+b)(a-b)$.

即
$$(a-b)^2<a^2-b^2.\quad \therefore\quad a-b<\sqrt{a^2-b^2}.$$

练习三（A级）

1. 求证：$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.
2. 求证：$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2$.
3. 已知 $a>b$. 求证：$a^3-b^3>ab(a-b)$.
4. 求证：$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.
5. 求证：$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

6. 求证:(1) $2\sqrt{5}-\sqrt{6}>2$;(2) $\sqrt{5}+\sqrt{7}>3+\sqrt{3}$.

7. 已知 $a\geqslant 1$. 求证:$\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}<2\sqrt{a}$.

6.4 不等式的解法举例

要点整理

1. 当 $a>0$ 时,不等式 $ax+b>0$ 的解集是________;当 $a<0$ 时,不等式 $ax+b>0$ 的解集是________.

2. 填表

	$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集	$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集
$b^2-4ac>0$		
$b^2-4ac=0$		
$b^2-4ac<0$		

3. 已知 $a>0$,则

$|x|>a\Leftrightarrow$________________________________;

$|x|<a\Leftrightarrow$________________________________.

4. 若不等式 $f_1(x)>0$ 的解集是 A,$f_2(x)>0$ 的解集是 B. 则不等式组 $\begin{cases} f_1(x)>0, \\ f_2(x)>0 \end{cases}$ 的解集是________.

5. 不等式 $(x+1)(x-2)(x+3)<0$ 的解集是________;不等式 $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3}\geqslant 0$ 的解集是________.

6. 不等式 $\sqrt{2x-1}+1>0$ 的解集是________;不等式 $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}>0$ 的解集是________.

典型例题

例 1 解不等式:$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

解 原不等式可化为 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}<0$.

分别令 $x-1=0$,$x-2=0$,$x-3=0$,$x+1=0$,得 $x=1$,$x=2$,$x=3$,$x=-1$. 把 x 的这些值标在数轴上,如图 6-1 所示;这四个数对应的点把数轴分成了五个区

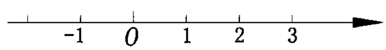

图 6-1

间,在最右边的区间上 $x>3$,从而各因式的值的符号皆为正,故分式 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ 的值的符号为正;在右边的第二个区间上,$2<x<3$,从而 $x-3$ 的符号为负,其余三个因式的值的符号皆为正. 故分式 $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ 的值的符号为负. 依次类推,每向左移动一个区间,分

整理,得 $\sqrt{2x-3}>1$.

两边平方,得 $2x-3>1$.

解不等式,得 $\{x|x>2\}$. ②

①和②的交集就是原不等式的解集,即

$$\left\{x\,|\,x\geqslant\frac{3}{2}\right\}\cap\{x|x>2\}=\{x|x>2\}.$$

例 5 解不等式: $\sqrt{2x+3}<x$.

分析 不等式左边是非负数,因此 $x\leqslant 0$ 时不等式一定不能成立. 而 $x>0$ 时,两边可以平方.

解 原不等式等价于 $\begin{cases}x>0,\\2x+3\geqslant 0,\\2x+3<x^2.\end{cases}$

解不等式组,得

$$\{x|x>3\}.$$

例 6 解不等式: $\sqrt{3x-2}>x-2$.

分析 不等式的左边是非负数,因此当 $x-2<0$ 时,能使 $\sqrt{3x-2}$有意义的值都能使原不等式成立;而当 $x-2\geqslant 0$ 时,不等式两边可以平方.

解 原不等式可以化为

$$\begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\x-2<0;\end{cases}\qquad ①$$

或

$$\begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\x-2\geqslant 0,\\3x-2>(x-2)^2.\end{cases}\qquad ②$$

解不等式组①,得

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}\leqslant x<2\right\}.$$

解不等式组②,得

$$\{x|2\leqslant x<6\}.$$

①和②的解集的并集就是原不等式的解集,即

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}\leqslant x<2\right\}\cup\{x|2\leqslant x<6\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}\leqslant x<6\right\}.$$

点评 以上四例均是解无理不等式. 解无理不等式要注意以下几点:(1) 要使每个根式都有意义. 如果是二次根式,那么它的被开方式应不小于零;(2) 无理不等式一般要通过平方化为有理不等式来解. 必须确认不等号两边的式子的值均不小于零时,才能将不等号两边的式子进行平方,并且保持不等号不改变方向. 如例 4,原不等式 $\sqrt{2x+5}-2<\sqrt{2x-3}$的右边一定是非负的,但左边不能保证是非负的,因此不能直接平方. 变形成为 $\sqrt{2x+5}<\sqrt{2x-3}+2$ 以后,不等号两边均为非负,这时可将两边平方,得 $2x+5<(\sqrt{2x-3}+2)^2$;(3) 如果不能保证不等式两边均为非负,这时要分不同的情况来解,如例 5 和例 6.

例 7 解不等式: $2^{x^2-2x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$.

分析　$\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$可以化为$2^{-3(x-1)}$，故原不等式可化为$2^{x^2-2x-3}<2^{-3(x-1)}$．不等号两边都是以2为底数的幂．由于以2为底数的指数函数是增函数，可知当且仅当$x^2-2x-3<-3(x-1)$时原不等式成立，故不等式$x^2-2x-3<-3(x-1)$的解集就是原不等式的解集．

解　原不等式可化为

$$2^{x^2-2x-3}<2^{-3(x-1)}. \quad ①$$

因为①式中所含的以$2(2\in(1,+\infty))$为底数的指数函数是增函数，所以①式成立当且仅当

$$x^2-2x-3<-3(x-1) \quad ②$$

成立．将②式整理，得

$$x^2+x-6<0.$$

解不等式，得

$$\{x\mid -3<x<2\}.$$

所以原不等式的解集是　$\{x\mid -3<x<2\}$.

例8　解不等式：$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+10)$.

分析　首先要使每个对数有意义，它们的真数必须都大于零，即

$$x-4>0, \quad ①$$

$$x+1>0, \quad ②$$

$$2x+10>0. \quad ③$$

另外原不等式可以化为

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-4)(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+10).$$

由于以$\frac{1}{3}$为底数的对数函数是减函数，可知当且仅当

$$(x-4)(x+1)<2x+10 \quad ④$$

时原不等式成立．因此①，②，③，④组成的不等式组的解集就是原不等式的解集．

解　因为真数应该是正数，所以未知数应满足

$$x-4>0,\quad x+1>0,\quad 2x+10>0.$$

另一方面，因为不等式中所含的以$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\in(0,1)\right)$为底数的对数函数是减函数，所以原不等式当且仅当$(x-4)(x+1)<2x+10$时成立．

因此原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases} x-4>0, & ① \\ x+1>0, & ② \\ 2x+10>0, & ③ \\ (x-4)(x+1)<2x+10. & ④ \end{cases}$$

解不等式①，得　$\{x\mid x>4\}$．解不等式②，得　$\{x\mid x>-1\}$．解不等式③，得　$\{x\mid x>-5\}$．解不等式④，得　$\{x\mid -2<x<7\}$.

所以原不等式的解集是

$$\{x\mid x>4\}\cap\{x\mid x>-1\}\cap\{x\mid x>-5\}\cap\{x\mid -2<x<7\}=\{x\mid 4<x<7\}.$$

点评　解指数不等式和对数不等式都是要应用指数函数和对数函数的单调性．因此一般要首先将不等式化成不等号两边是相同底数的函数．另外，解对数不等式时，还要注意真数必须大于零．

练习四（A 级）

1. 解下列不等式：

(1) $x^2-8x+15>0$；　(2) $x^2-2x-3\leqslant 0$；

(3) $x^2-6x+9\geqslant 0$；　(4) $x^2+4x+5\leqslant 0$；

(5) $6x+12<x^2+2x$；　(6) $18+3x-x^2>0$.

2. 解下列不等式：

(1) $(x^2-5x+4)(x^2+2x-8)<0$；　(2) $\dfrac{2x-x^2-x^3}{x^2-8x+12}>0$；

(3) $\dfrac{x-1}{x^2-7x+12}<\dfrac{1}{2}$；　(4) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-2}<2$.

3. 解下列不等式：

(1) $\sqrt{4x-1}<3$；　(2) $\sqrt{5-2x+x^2}>2$；

(3) $\sqrt{4x-5}-\sqrt{2x+1}<0$；　(4) $\sqrt{x^2+3}<\sqrt{1-3x}$.

6.5　含有绝对值的不等式

要点整理

1. 含有绝对值的不等式的性质定理是____________________.

它的两个推论是：

推论 1 ______________________________.

推论 2 ______________________________.

2. $|a+b|=|a|+|b|$成立的条件是____________，$|a-b|=|a|+|b|$成立的条件是____________，$|a+b|=|a|-|b|$成立的条件是____________.

3. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$成立的理由是________________.

典型例题

例　求证：$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2(x\neq 0)$.

证法一　$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant 4\Leftrightarrow x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 4$

$$\Leftrightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}\geqslant 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geqslant 0.$$

因为$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\geqslant 0$成立，所以$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$成立.

证法二　当 $x>0$ 时，$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$.　①

当 $x<0$ 时，$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(-x)+\dfrac{1}{-x}\geqslant 2$.　②

由①，②知，当 $x\neq 0$ 时，$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geqslant 2$.