

高中生

[人教B版]

GAOZHONGSHENGXUEXIZHIDAO

学习指导

丛书主编 杜贵忠
本册主编 苏文捷
本册副主编 刘子军 邢长艳
本册编者 王 勇 王成栋 刘新风

数学④

必修

辽宁师范大学出版社
· 大 连 ·

©杜贵忠 2007

图书在版编目(CIP)数据

高中生学习指导:人教B版.数学.必修4/杜贵忠
主编. —大连:辽宁师范大学出版社,2007.11
ISBN 978-7-81103-707-4

I.高... II.杜... III.数学课-高中-教学参考资料
IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第183762号

出 版 人:程培杰
责任编辑:赵 娜 王 琦
责任校对:吕英辉
封面设计:李小曼

出 版 者:辽宁师范大学出版社
地 址:大连市黄河路850号
邮 编:116029
营销电话:(0411)84206854 84215261 84259913(教材)
印 刷 者:沈阳全成广告印务有限公司
发 行 者:辽宁时代华育书业发展有限公司

幅面尺寸:210mm×285mm
印 张:8
字 数:240千字

出版时间:2007年12月第1版
印刷时间:2007年12月第1次印刷
书 号:ISBN 978-7-81103-707-4

定 价:11.50元

目 录

第一章 基本初等函数(II)

1.1 任意角的概念与弧度制	1
1.1.1 角的概念的推广	1
1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算	5
1.2 任意角的三角函数	7
1.2.1 三角函数的定义	7
1.2.2 单位圆与三角函数线	10
1.2.3 同角三角函数的基本关系式	12
1.2.4 诱导公式	17
1.3 三角函数的图象与性质	20
1.3.1 正弦函数的图象与性质	20
1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质	25
1.3.3 已知三角函数值求角	29
章末检测	30

第二章 平面向量

2.1 向量的线性运算	34
2.1.1 向量的概念	34
2.1.2 向量的加法	37
2.1.3 向量的减法	40
2.1.4 向量数乘	43
2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算	46
2.2 向量的分解与向量的坐标运算	48
2.2.1 平面向量基本定理	48
2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算	50
2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件	53
2.3 平面向量的数量积	55
2.3.1 向量数量积的物理背景与定义	55
2.3.2 向量数量积的运算律	55
2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式	58
2.4 向量的应用	61
2.4.1 向量在几何中的应用	61
2.4.2 向量在物理中的应用	64
章末检测	66

第三章 三角恒等变换	
3.1 和角公式	70
3.1.1 两角和与差的余弦	70
3.1.2 两角和与差的正弦	73
3.1.3 两角和与差的正切	76
3.2 倍角公式和半角公式	79
3.2.1 倍角公式	79
3.2.2 半角的正弦、余弦和正切	82
3.3 三角函数的积化和差与和差化积	85
章末检测	89
模块测试	92
参考答案	96

编写说明

为了适应普通高中课程改革和使用新教材的需要,切实提高高中教学质量,并努力实现减轻学生的课业负担,我们组织辽宁省部分示范性高中、重点高中的知名教师,按学科编写了高中教学辅助用书《高中生学习指导》丛书。目前,完成了语文、数学、英语(两个版本)、物理、化学、生物、思想政治、历史、地理等9个学科必修教材的配套用书,共37册,供高中教师、学生选用。

丛书体例:

《高中生学习指导》按教材的章节(或单元)顺序编排,包括以下几个部分:

目标导航和知识提要:对本章节的知识结构及要点进行归纳,让学生对本章节的知识结构有个清晰的了解。

典例探源:选择典型习题或示例,并对其进行规范的分析与解答,使学生掌握正确的解题思路。

学习提点:引导学生主动探究,给予学生正确的学习方法。

学海探骊:结合本课学习内容,有针对性地精选习题,体现习题的基础性、层次性、选择性。

章末检测:对本章内容进行测试,检验学生对本章知识的掌握情况。

模块测试:对本模块教学内容进行综合测试,考查学生对模块教学内容的掌握情况。

参考答案:对全书的学海探骊、章末检测及模块测试中的习题给出正确答案,对易错题进行思路点拨。

丛书特点:

与新教材紧密配合,与课程计划同步;体现课改理念,符合课程标准要求;体现教辅用书的科学性、基础性、层次性、选择性;引导学生主动探究学科知识,指导学生掌握正确的学习方法;精选习题,注意减轻学生的学习负担;充分体现名校、名师的教学经验,实现资源共享。

本册由东北育才学校编写,由苏文捷任本册主编,刘子军、邢长艳任本册副主编。

本套丛书的编写力求贴近学生学习的实际需要,有效提高学生自主学习的能力和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。希望老师和同学们能在使用过程中,提出宝贵的补充意见和修改建议,以使本套丛书在修订后更臻完善。

杜贵忠

第一章 基本初等函数(Ⅱ)

【目标导航】

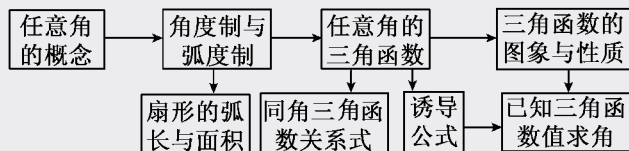
本章地位:三角函数是高中数学的重要内容之一,跨学科应用是它的鲜明特点.在解答立体几何、解析几何问题时,三角函数是常用工具,更是物理学科的基本工具.

本章内容:本章主要内容包括:三角函数的概念,用同角三角函数间的关系式和诱导公式求任意角的三角函数值,弧度制,三角函数的性质.

学习目标:1.初步掌握三角函数式的变形,化简,求值.

2.灵活运用三角函数的图象性质解答问题.

知识框架:



1.1 任意角的概念与弧度制

1.1.1 角的概念的推广

知识提要

1. 角的定义

一条射线绕着它的端点 O , 从起始位置 OA 旋转到终止位置 OB , 形成一个角 α , 点 O 是角的顶点, 射线 OA 、 OB 分别是角 α 的始边、终边.

说明:在不引起混淆的前提下,“角 α ”或“ $\angle\alpha$ ”可以简记为 α . 掌握角的概念要注意角的三要素:顶点、始边、终边,角的大小可以是任意的.

2. 角的分类

(1)正角:按照逆时针方向旋转而成的角叫做正角;

(2)负角:按照顺时针方向旋转而成的角叫做负角;

(3)零角:当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,叫做零角.

说明:(1)零角的始边和终边重合;

(2)旋转生成的角,又叫做转角;

(3)各角和的旋转量等于各角旋转量的和.

3. 象限角

在直角坐标系中,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的非负轴重合,则

(1)象限角:角的终边(端点除外)在第几象限,就把这个角叫做第几象限角.

例如: 30° , 390° , -330° 角都是第一象限角; 300° , -60° 角是第四象限角.

(2)非象限角(也称象限间角、轴线角):角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限.

例如: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 角都是非象限角.

说明: 角的始边“与 x 轴的非负半轴重合”不能说成是“与 x 轴的正半轴重合”. 因为 x 轴的正半轴不包括原点, 就不完全包括角的始边, 角的始边是以角的顶点为端点的射线.

4. 终边相同的角的集合

所有与角 α 终边相同的角以及 α 本身组成一个集合, 这个集合可记为

$$S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

即任意一个与角 α 终边相同的角, 都可以表示成角 α 与周角的整数倍的和.

说明: 终边相同的角不一定相等, 相等的角终边一定相同.

典例探源

例 1 在 $-720^\circ \sim 720^\circ$ 之间, 写出与 60° 终边相同的角的集合 S .

【解】 与 60° 终边相同的角以及 60° 本身组成的集合为

$$\{\beta | \beta = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$$\text{令 } -720^\circ < 60^\circ + k \cdot 360^\circ < 720^\circ,$$

$$\text{得 } k = -2, -1, 0, 1,$$

$$\text{相应的 } \beta \text{ 为 } -660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ.$$

$$\text{从而 } S = \{-660^\circ, -300^\circ, 60^\circ, 420^\circ\}.$$

感悟: 与角 α 终边相同的角以及 α 本身可记为 $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 其中:

$$(1) k \in \mathbf{Z};$$

$$(2) \alpha \text{ 是任意角};$$

$$(3) k \cdot 360^\circ \text{ 与 } \alpha \text{ 之间用“+”连接, 如 } k \cdot 360^\circ - 30^\circ \text{ 应看做 } (-30^\circ) + k \cdot 360^\circ;$$

(4) 终边相同的角不一定相等, 但相等的角终边必相同, 终边相同的角有无数个, 它们彼此相差 360° 的整数倍;

(5) 检查两角 α_1, α_2 终边是否相同, 只需看 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{360^\circ}$ 是否为整数.

变式 1-1 把 $1\ 230^\circ, -3\ 290^\circ$ 写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ (其中 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$) 的形式.

【分析】 用所给角除以 360° , 将余数作 α .

【解】 $\because 1\ 230 \div 360 = 3 \text{ 余 } 150,$

$$\therefore 1\ 230^\circ = 3 \times 360^\circ + 150^\circ.$$

$$\because -3\ 290 \div 360 = -10 \text{ 余 } 310,$$

$$\therefore -3\ 290^\circ = -10 \times 360^\circ + 310^\circ.$$

注意: 当负角除以 360° 时, 为保证余数为正角, 试商时应使得到的负角的绝对值大于已知负

角的绝对值.

变式 1-2 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 中, 求出与下列各角终边相同的角, 并判定它们分别是第几象限的角.

$$(1) 909^\circ; (2) -503^\circ 36'.$$

【分析】 求解本题, 其关键在于正确得到 $\alpha + k \cdot 360^\circ (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbf{Z})$ 中 k 的值, 即用给出的角去除以 360° 所得到的整数部分.

【解】 (1) $\because 909^\circ = 189^\circ + 2 \times 360^\circ,$

$\therefore 189^\circ$ 即为所求的角, 它是第三象限角, 故 909° 也是第三象限角.

$$(2) \because -503^\circ 36' = 216^\circ 24' - 2 \times 360^\circ,$$

$\therefore 216^\circ 24'$ 即为所求的角, 它是第三象限角, 故 $-503^\circ 36'$ 也是第三象限角.

说明: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 中, 求终边与给定的角终边相同的角时, 若题中给定的角是负角, 在用式子 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 表示时, k 的值要比正常除法所得整数小一个单位才能使余数在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间, 故这里的 k 只能取 -2 , 而不能取 -1 , 若取 -1 , 则 $-503^\circ 36' = -143^\circ 36' - 360^\circ$, 这种形式对解本题并无作用, 因为 $-143^\circ 36'$ 不在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间.

例 2 用集合表示:

(1) 第三象限角的集合;

(2) 终边落在 y 轴右侧的角的集合.

【解】 (1) 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 中, 第三象限角的范围为 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, 而与每个角 α 终边相同的角可记为 $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故该范围中的每个角满足 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故第三象限角的集合为

$$\{\beta | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

拓展: 第一、二、四象限角的集合的表示法:

$$M = \{\beta | k \cdot 360^\circ < \beta < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$$

$$P = \{\beta | 90^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$$

$$Q = \{\beta | 270^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 360^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

说明: 区间角的集合的表示不唯一.

(2) 在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 中, y 轴右侧的角可记为 $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, 同样把该范围“旋转” $k \cdot 360^\circ$ 后, 得 $-90^\circ + k \cdot 360^\circ < \beta < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 故 y 轴右侧角的集合为

$$\{\beta | k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

说明: 一个角按顺、逆时针旋转 $k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 后与原来角终边重合, 同样一个“区间”内的角按

顺、逆时针旋转 $k \cdot 360^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 后, 所得“区间”仍与原区间重叠.

变式 2-1 分别写出:

- (1) 终边落在 y 轴负半轴上的角的集合;
- (2) 终边落在 x 轴上的角的集合;
- (3) 终边落在第一、三象限角平分线上的角的集合;
- (4) 终边落在第二、四象限角平分线上的角的集合.

【解】 (1) $\{\alpha | \alpha = -90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$

(2) $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$

(3) $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$

(4) $\{\alpha | \alpha = -45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$

变式 2-2 请用集合表示下列各角.

- (1) $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的角;
- (2) 第一象限角;
- (3) 锐角;
- (4) 小于 90° 的角.

【解】 (1) $\{\alpha | 0^\circ \leq \alpha < 90^\circ\}.$

(2) $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$

(3) $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}.$

(4) $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}.$

感悟: 第一象限角未必是锐角, 小于 90° 的角不一定是锐角, $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的角, 根据课本约定它包括 0° , 但不包含 90° .

变式 2-3 写出 $y = \pm x (x \geq 0)$ 所夹区域内的角的集合.

【解】 当 α 终边落在 $y = x (x \geq 0)$ 上时, 角的集合为 $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$

当 α 终边落在 $y = -x (x \geq 0)$ 上时, 角的集合为 $\{\alpha | \alpha = -45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\};$

所以, 按逆时针方向旋转所求集合为

$S = \{\alpha | -45^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$

例 3 若 α 是第二象限角, 则 $2\alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}$ 分别是第几象限角?

【解】 (1) $\because \alpha$ 是第二象限角

$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$

则 $k \cdot 720^\circ + 180^\circ < 2\alpha < k \cdot 720^\circ + 360^\circ,$

故 2α 是第三或第四象限角, 或角的终边在 y 轴的负半轴上.

(2) $\because k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ (k \in \mathbf{Z}),$

当 $k = 2n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot$

$360^\circ + 90^\circ,$ 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角.

当 $k = 2n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} <$

$n \cdot 360^\circ + 270^\circ,$ 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

(3) $\because k \cdot 120^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < k \cdot 120^\circ + 60^\circ,$

当 $k = 3n (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 30^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot$

$360^\circ + 60^\circ,$ 则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

当 $k = 3n + 1 (n \in \mathbf{Z})$ 时, $n \cdot 360^\circ + 150^\circ <$

$\frac{\alpha}{3} < n \cdot 360^\circ + 180^\circ,$ 则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角.

当 $k = 3n + 2$ 时, $n \cdot 360^\circ + 270^\circ < \frac{\alpha}{3} < n \cdot$

$360^\circ + 300^\circ,$ 则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限角.

综上所述, $\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第四象限角.

拓展: 依照(2)中的方法, 可得到以下规律: 当 α 分别是第一、二、三、四象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 顺次是第一或三、一或三、二或四、二或四象限角. 仿此, 还可进一步考虑 $\frac{\alpha}{3}$ 的情形, 有兴趣的读者不妨一试. 另外, 应注意, 在(1)中, 不可把 2α 角答成是第三或第四象限角, 因为终边在 y 轴负半轴上的角 $270^\circ + k \cdot 720^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 也是它的一个解, 而此角不属于任何象限.

变式 3 (2005 全国卷 III 理第 1 题, 文第 1 题) 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

C. 第二或第四象限

【解】 D

学习提点

判断一个角 α 是第几象限角时, 只要把 α 改写成 $\alpha' + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}, 0^\circ \leq \alpha' < 360^\circ$ 的形式, 那么 α' 在第几象限, α 就是第几象限角. 若角 α 与角 β 满足 $\alpha - \beta = (2k) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$, 则 α, β 终边相同; 若角 α 与 β 满足 $\alpha - \beta = (2k + 1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$,

则 α, β 终边互为反向延长线. 判断一个角所在象限或不同角之间的终边关系时, 可首先把它们化为 $\alpha' + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} (0^\circ \leq \alpha' < 360^\circ)$ 这种形式, 然后只要考查 α' 的相关问题即可. 另外, 数形结合思想、运动变化观点都是学习本课内容的重要思想方法.

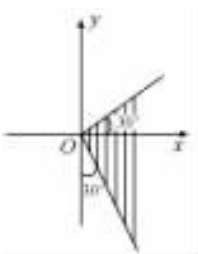
学海探骊

基础达标

1. 时针走过 3 小时 20 分, 则分针所转过的角的度数为 _____, 时针所转过的角的度数为 _____.
2. α 是 $180^\circ \sim 360^\circ$ 之间的一个角, 若 5α 与 α 有相同始边, 且又有相同终边, 则 $\alpha =$ _____.
3. 与 $-1\,778^\circ$ 的终边相同且绝对值最小的角是 _____.
4. 若角 α 与角 β 的终边重合, 则 α 与 β 的关系是 _____; 若角 α 与角 β 的终边在一条直线上, 则 α 与 β 的关系是 _____.
5. 设 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,
 $B = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,
 $C = \{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,
 $D = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 135^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,
 $E = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 45^\circ \text{ 或 } \alpha = k \cdot 360^\circ + 225^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

则相等的角的集合有 _____.

6. 若 α 是第四象限角, 则 $\pi - \alpha$ 是 ()
 A. 第一象限角 B. 第二象限角
 C. 第三象限角 D. 第四象限角
7. 如图, 终边落在阴影处 (包括边界) 的角的集合为 ()
 A. $\{\alpha | -60^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ\}$
 B. $\{\alpha | k \cdot 180^\circ - 60^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ - 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 60^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$



(第 7 题)

能力拓展

8. 已知 2α 的终边在 x 轴的上方, 那么 α 是第 _____ 象限角.
9. 给出下列命题:
 ① 30° 和 -30° 角的终边方向相反;
 ② -330° 和 -390° 角的终边相同;
 ③ 第一象限角和锐角终边相同;

④ $\alpha = (2k+1) \cdot 180^\circ$ 与 $\beta = (4k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$ 的终边相同;

⑤ 设 $M = \{x | x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,

$N = \{y | y = 90^\circ + k \cdot 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \subseteq N$.

其中所有正确命题的序号是 _____.

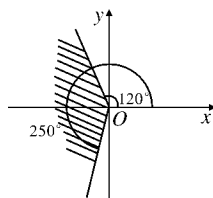
10. 经过 3 小时 35 分钟, 时针与分针转过的度数之差是 ()
 A. $1\,182.5^\circ$ B. $-1\,182.5^\circ$
 C. $1\,182.3^\circ$ D. $-1\,182.3^\circ$
11. 若两角 α, β 的终边关于原点对称, 那么 ()

- A. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
- B. $\alpha + \beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
- C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$
- D. $\alpha - \beta = -180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$

12. 设 $0^\circ < \beta < 360^\circ$, 且 5β 的终边与 x 轴非负半轴重合, 则这样的角最多有 ()
 A. 2 个 B. 3 个
 C. 4 个 D. 5 个

创新视点

13. 如图所示, 写出图中阴影部分 (包括边界) 的角的集合, 并指出 $-950^\circ 12'$ 是否是该集中的角.



(第 13 题)

14. 若角 α 的终边经过点 $P(-1, -\sqrt{3})$, 试写出角 α 的集合, 并求出集合中绝对值最小的角.

15. 写出终边在函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3} |x|$ 的图象上的角的集合 M , 并指出其中在 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 内的角.

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算

知识提要

1. 弧度角的概念

规定:我们把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角,记此角为1 rad.

练习:圆的半径为 r ,分别求圆弧长为 $2r$ 、 $3r$ 、 $\frac{r}{2}$ 的弧所对的圆心角.

说明:一个角的弧度由该角的大小来确定,与求比值时所取圆的半径的大小无关.

思考:什么是 π 弧度角?一个周角的弧度是多少?一个平角、直角的弧度分别是多少?

2. 弧度的推广及角的弧度数的计算

规定:正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零;角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$, (其中 r 是圆的半径, l 是以角 α 为圆心角时所对的弧长).

说明:我们用弧度制表示角的时候,“弧度”或rad经常省略,即只写一实数表示角的度数.

例如:当弧长 $l=4\pi r$ 且所对的圆心角表示角时,这个圆心角的弧度数是 $-|\alpha| = -\frac{l}{r} = -\frac{4\pi r}{r} = -4\pi$.

3. 角度与弧度的换算

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$$

4. 一些特殊角的度数与弧度数的对应表:

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

5. 弧长公式

由 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ (其中 l 表示 α 所对的弧长),

则弧长公式为 $l = |\alpha| \cdot r$.

6. 扇形面积公式

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{|\alpha|}{2\pi} = \pi r^2 \cdot \frac{r}{2\pi} = \frac{1}{2}lr.$$

说明:(1)弧度制下的公式要简洁得多;

(2)以上公式中的 α 必须是以弧度为单位的角.

7. 角度制与弧度制的比较

引进弧度制后,我们应将它与角度制进行比较,同学们应明确:

(1)弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度,角度制是以“度”为单位度量角的制度;

(2)1弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小,而 1° 是圆的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角(或该弧)的大小;

(3)不论是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径大小无关的定值.

典例探源

例1 用弧度制分别表示轴线角、象限角的集合.

(1)终边落在 x 轴的非正、非负半轴, y 轴的非正、非负半轴的角的集合;

(2)第一、二、三、四象限角的弧度表示.

【解】 (1)终边落在 x 轴的非正半轴的角的集合为 $\{\beta | \beta = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

终边落在 x 轴的非负半轴的角的集合为

$$\{\beta | \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边落在 y 轴的非正半轴的角的集合为

$$\{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边落在 y 轴的非负半轴的角的集合为

$$\{\beta | \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(2)第一象限角为 $\{\beta | 2k\pi < \beta < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

第二象限角为 $\{\beta | 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \beta < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

第三象限角为 $\{\beta | 2k\pi + \pi < \beta < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$;

第四象限角为 $\{\beta | 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \beta < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

变式1-1 将下列各角化为 $2k\pi + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 2\pi, k \in \mathbb{Z}$)的形式,并判断其所在象限.

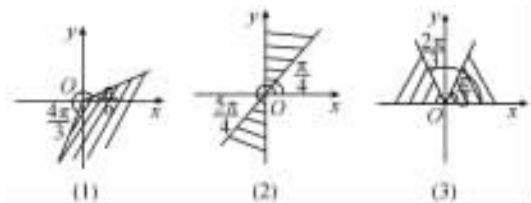
$$(1) \frac{19}{3}\pi; (2) -315^\circ.$$

【解】 (1) $\frac{19}{3}\pi = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$,所以此角为第一象限角.

(2) $-315^\circ = -\frac{7}{4}\pi = -2\pi + \frac{\pi}{4} = (-1) \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$,所以此角为第一象限角.

变式1-2 如图,用弧度制表示下列终边落在阴

影部分的角的集合(不包括边界).



(变式 1-2 图)

【解】 (1) 如图(1),按逆时针方向,在区间 $[-\pi, \pi)$ 上与角 $\frac{4}{3}\pi$ 终边相同的角为 $-\frac{2}{3}\pi$,故所求集合为

$$S = \left\{ \alpha \mid 2k\pi - \frac{2}{3}\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{1}{6}\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(2) 图(2)中第三象限部分可看成是由第一象限的阴影部分绕原点旋转 π 弧度而成的,故所求集合可表示为 $S = \left\{ \alpha \mid k\pi + \frac{\pi}{4} < \alpha < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

说明:当两区域的边界互为反向延长线时,只用“ $k\pi + \alpha < x < k\pi + \beta$ ”就可以表示.

(3) 所求集合为 $S = \left\{ \alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ \alpha \mid 2k\pi + \frac{2}{3}\pi < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$,如图(3)所示.

例 2 (1) 已知扇形 OAB 的圆心角 α 为 120° , 半径 $r=6$, 求弧长 AB 及扇形面积.

(2) 已知扇形周长为 20 cm, 当扇形的圆心角为多大时它有最大面积, 最大面积是多少?

【解】 (1) $\because 120^\circ = \frac{2\pi}{3}, \therefore S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 36 = 12\pi$.

(2) 设弧长为 l , 半径为 r , 由已知 $l+2r=20$, 所以 $l=20-2r, |\alpha| = \frac{l}{r} = \frac{20-2r}{r}$.

从而 $S = \frac{1}{2}|\alpha|r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{20-2r}{r} \cdot r^2 = -r^2 + 10r = -(r-5)^2 + 25$,

当 $r=5$ 时, S 最大, 最大值为 25, 这时 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{20-2r}{r} = 2$.

变式 2-1 如图, 扇形 OAB 的面积是 4 cm^2 , 它的周长是 8 cm, 求扇形的圆心角及弦 AB 的长.

(变式 2-1 图)

【解】 设扇形的弧长为 l , 半径为 r , 则有

$$\begin{cases} l+2r=8 \\ \frac{1}{2}lr=4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} l=4 \\ r=2 \end{cases}.$$

所以, 圆心角为 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{4}{2} = 2$, 弦长 $= 2 \times$

$$2\sin 1 = 4\sin 1.$$

变式 2-2 在扇形 AOB 中, $\angle AOB=90^\circ$, 弧长为 l , 则此扇形内切圆的面积为_____.

【解】 如图, 设扇形半径为 r , 内切圆半径为 x , 则由 $l = \frac{\pi}{2} \cdot r$,

$$\text{得 } r = \frac{2l}{\pi}.$$

$$\because r = x + \sqrt{2}x,$$

$$\therefore x = \frac{r}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)l}{\pi}.$$

$$\therefore S_{\odot O'} = \pi x^2 = \pi \frac{4(3-2\sqrt{2})}{\pi^2} l^2 = \frac{4(3-2\sqrt{2})}{\pi} l^2.$$

变式 2-3 已知两角的和为 1 弧度, 且两角的差为 1° , 求这两个角各是多少弧度.

【分析】 设两角的弧度数分别是 x, y , 通过列方程组, 就可以求出 x, y , 但要注意单位的统一.

【解】 设两角的弧度数分别是 x, y , 因为 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$,

$$\text{则依题意, 得 } \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{\pi}{180} \end{cases}, \text{解之得}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{360} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{360} \end{cases}.$$

即所求两角的弧度数分别为 $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{360}, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{360}$.

学海探骊

基础达标

1. 一条弦长等于半径的 $\frac{1}{2}$, 则此弦所对圆心角

()

- A. 等于 $\frac{\pi}{6}$ 弧度 B. 等于 $\frac{\pi}{3}$ 弧度
C. 等于 $\frac{1}{2}$ 弧度 D. 以上都不对

2. 把 -1485° 化为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbf{Z}, 0 \leq \alpha < 2\pi)$ 的形式是 ()

- A. $-8\pi + \frac{\pi}{4}$ B. $-8\pi - \frac{7}{4}\pi$
C. $-10\pi - \frac{\pi}{4}$ D. $-10\pi + \frac{7}{4}\pi$

3. 扇形的周长是 16, 圆心角是 2 弧度, 则扇形面

积是 ()

A. 16π B. 32π C. 64 D. 32

4. 3 弧度的角的终边在第_____象限, 7 弧度的角的终边在第_____象限.

能力拓展

5. 在半径为 r 的圆中, 扇形的周长等于半圆的长, 那么扇形的圆心角是多少度? 扇形的面积是多少?

6. 在直径为 10 cm 的滑轮上有一条弦, 其长为 6 cm, 且 P 为弦的中点, 滑轮以每秒 5 弧度的角速度旋转, 经过 5 s 后, P 点转过的弧长是多少?

创新视点

7. 扇形 AOB 的面积为 1 cm^2 , 它的周长为 4 cm, 求扇形圆心角的弧度数及弦长 AB 的长.

8. 一扇形周长是 32 cm, 扇形的圆心角为多少弧度时, 这个扇形的面积最大? 最大面积是多少?

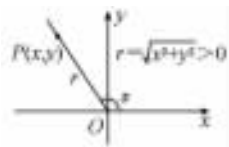
1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义

知识提要

1. 三角函数的定义

在直角坐标系中, 设 α 是一个任意角, α 终边上任意一点 P (除了原点) 的坐标为 (x, y) , 它与原点的距离为 $r(r = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$, 那么



- (1) $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦, 记作 $\sin\alpha$, 即 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$;
- (2) $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的余弦, 记作 $\cos\alpha$, 即 $\cos\alpha = \frac{x}{r}$;
- (3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切, 记作 $\tan\alpha$, 即 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$;
- (4) $\frac{x}{y}$ 叫做 α 的余切, 记作 $\cot\alpha$, 即 $\cot\alpha = \frac{x}{y}$;
- (5) $\frac{r}{x}$ 叫做 α 的正割, 记作 $\sec\alpha$, 即 $\sec\alpha = \frac{r}{x}$;
- (6) $\frac{r}{y}$ 叫做 α 的余割, 记作 $\csc\alpha$, 即 $\csc\alpha = \frac{r}{y}$.

说明: ① α 的始边与 x 轴的非负半轴重合, α 的终边没有表明 α 一定是正角或负角以及 α 的大

小, 只表明与 α 的终边相同的角所在的位置;

② 根据相似三角形的知识, 对于确定的角 α , 六个比值不随点 $P(x, y)$ 在 α 的终边上的位置的变化而改变大小;

③ 当 $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, α 的终边在 y 轴上, 终边上任意一点的横坐标 x 都等于 0, 所以 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ 与 $\sec\alpha = \frac{r}{x}$ 无意义; 同理, 当 $\alpha = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\cot\alpha = \frac{x}{y}$ 与 $\csc\alpha = \frac{r}{y}$ 无意义;

④ 除以上两种情况外, 对于确定的角 α , 比值 $\frac{y}{r}$ 、 $\frac{x}{r}$ 、 $\frac{y}{x}$ 、 $\frac{x}{y}$ 、 $\frac{r}{x}$ 、 $\frac{r}{y}$ 分别是一个确定的实数, 所以正弦、余弦、正切、余切、正割、余割是以角为自变量, 以比值为函数值的函数, 以上六种函数统称为三角函数.

2. 三角函数的定义域、值域

函 数	定 义 域	值 域
$y = \sin\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
$y = \cos\alpha$	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
$y = \tan\alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$	$\mathbf{R}$

3. 三角函数在各象限的符号

由三角函数的定义,以及各象限内点的坐标的符号,我们可以得知:

(1) 正弦值 $\frac{y}{r}$ 对于第一、二象限为正 ($y>0, r>0$), 对于第三、四象限为负 ($y<0, r>0$);

(2) 余弦值 $\frac{x}{r}$ 对于第一、四象限为正 ($x>0, r>0$), 对于第二、三象限为负 ($x<0, r>0$);

(3) 正切值 $\frac{y}{x}$ 对于第一、三象限为正 (x, y 同号), 对于第二、四象限为负 (x, y 异号).

以上结果如图所示:



典例探源

例 1 若角 α 的终边经过点 $P(-1, -\sqrt{3})$, 试求角 α 的六个三角函数值和角 α 的集合 A , 并求出集合 A 中绝对值最小的角.

【分析】 应先求出 x, y, r 的值.

【解】 如图所示. $\because x = -1,$

$$y = -\sqrt{3},$$

$$\therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2.$$

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3},$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = -2, \csc \alpha = \frac{r}{y} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{又 } \because \sin \angle POM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle POM = 60^\circ.$$

$$\therefore A = \{\alpha | \alpha = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

故 A 中绝对值最小的角是 -120° .

说明: 此例是典型的考查定义的题.

变式 1 已知角的终边过点 $(a, 2a) (a \neq 0)$, 求 α 的六个三角函数值.

【解】 因为过点 $(a, 2a) (a \neq 0)$, 所以 $r = \sqrt{5}|a|,$

$$x = a, y = 2a.$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{2a}{\sqrt{5}|a|} = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tan \alpha = 2, \cot \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\sec \alpha = \sqrt{5}, \csc \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{2a}{\sqrt{5}|a|} = \frac{2a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \tan \alpha = 2,$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{2}, \sec \alpha = -\sqrt{5}, \csc \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

说明: 若终边落在轴线上, 则可用定义求出三角函数值.

例 2 若 $\sin 2\alpha > 0$, 且 $\cos \alpha < 0$, 试确定 α 所在的象限.

【解】 $\because \sin 2\alpha > 0, \therefore 2\alpha$ 在第一或第二象限, 即 $2k\pi < 2\alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$\therefore k\pi < \alpha < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

当 k 为偶数时, 设 $k = 2m (m \in \mathbb{Z})$, 有

$$2m\pi < \alpha < 2m\pi + \frac{\pi}{2} (m \in \mathbb{Z});$$

当 k 为奇数时, 设 $k = 2m + 1 (m \in \mathbb{Z})$, 有

$$2m\pi + \pi < \alpha < 2m\pi + \frac{3\pi}{2} (m \in \mathbb{Z}).$$

$\therefore \alpha$ 为第一或第三象限的角.

又由 $\cos \alpha < 0$ 可知 α 在第二或第三象限.

综上所述, α 在第三象限.

变式 2 若 θ 是第二象限的角, 判断 $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin 2\theta)}$ 的符号.

【分析】 确定符号, 关键是确定每个因式的符号, 而要分析每个因式的符号, 关键看角所在象限.

【解】 $\because 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z}),$

$$\therefore -1 < \cos \theta < 0, 4k\pi + \pi < 2\theta < 4k\pi + 2\pi, -1 < \sin 2\theta < 0.$$

$$\therefore \sin(\cos \theta) < 0, \cos(\sin 2\theta) > 0.$$

$$\therefore \frac{\sin(\cos \theta)}{\cos(\sin 2\theta)} < 0.$$

例 3 若 α 是第二象限角, 且 $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -\cos \frac{\alpha}{2}$, 则

$\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

【解】 $\because \alpha$ 是第二象限角,

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 终边在第一或第三象限.

$$\text{又} \because \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -\cos \frac{\alpha}{2}, \therefore \cos \frac{\alpha}{2} \leq 0.$$

故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

学习提点

本节的重点是任意角三角函数的定义、终边相同的三角函数公式以及三角函数值符号的确定. 其中重点掌握三角函数的定义和终边相同的三角函数公式, 还应熟记特殊角的三角函数值.

学海探骊

基础达标

1. 给出下列各三角函数:

① $\sin(-1\ 000^\circ)$; ② $\cos(-2\ 200^\circ)$;

③ $\tan(-10^\circ)$; ④ $\sin \frac{7}{10}\pi \cos \pi \cot \frac{17}{9}\pi$.

其中符号为负的是 ()

A. ① B. ② C. ③ D. ④

2. 若 α 为第二象限角, 那么 $\sin 2\alpha, \cos \frac{\alpha}{2}, \sec 2\alpha,$

$\sec \frac{\alpha}{2}$ 中, 其值必为正的有 ()

A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 3 个

3. 若 $0 < a < 1, \frac{\pi}{2} < x < \pi$, 则 $\frac{\sqrt{(a-x)^2}}{x-a} - \frac{\cos x}{|\cos x|} +$

$\frac{|1-a^x|}{a^x-1}$ 的值是 ()

A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

4. 若 600° 角的终边上有一点 $(-4, a)$, 则 a 的值是 ()

A. $4\sqrt{3}$ B. $-4\sqrt{3}$
C. $\pm 4\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

5. 若 θ 是第三象限角, 且 $\cos \frac{\theta}{2} < 0$, 则 $\frac{\theta}{2}$ 是 ()

A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

6. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角, 那么 $\tan \alpha$

的值为 ()

A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

7. 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 则角 α 在 ()

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

8. 已知 $\sin \alpha \tan \alpha \geq 0$, 则 α 的取值范围是 _____.

9. 角 α 的终边上有一点 $P(m, 5)$, 且 $\cos \alpha = \frac{m}{13}$ ($m \neq 0$), 则 $\sin \alpha + \cos \alpha =$ _____.

10. 已知角 θ 的终边在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 则 $\sin \theta =$ _____, $\tan \theta =$ _____.

11. 设 $\theta \in (0, 2\pi)$, 点 $P(\sin \theta, \cos 2\theta)$ 在第三象限, 则角 θ 的取值范围是 _____.

创新视点

12. 设 θ 分别是第二、三、四象限角, 则点 $P(\sin \theta, \cos \theta)$ 分别第 _____、_____、_____ 象限.

13. 函数 $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{\cos x}{|\cos x|} + \frac{|\tan x|}{\tan x} + \frac{\cot x}{|\cot x|}$ 的值域为 _____.

能力拓展

14. 角 α 终边上的点 P 与点 $A(a, b)$ 关于 x 轴对称 ($a \neq 0, b \neq 0$), 角 β 终边上的点 Q 与点 A 关于直线 $y = x$ 对称, 求 $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} + \frac{1}{\cos \alpha \sin \beta}$ 的值.

15. 若角 θ 的终边落在直线 $15x = 8y$ 上, 试求 $\log_2 |\sec \alpha - \tan \alpha|$ 的值.

反思提升

化简 $\frac{\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

1.2.2 单位圆与三角函数线

知识提要

当角的终边上一点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ 时, 有三角函数正弦、余弦、正切值的几何表示——三角函数线.

1. 单位圆

圆心在原点 O , 半径等于单位长的圆叫做单位圆.

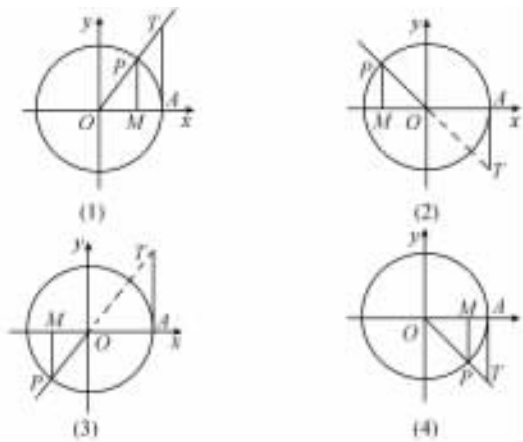
2. 有向线段

坐标轴是规定了方向的直线, 那么与之平行的线段亦可规定方向.

规定: 与坐标轴方向一致时为正, 与坐标轴方向相反时为负.

3. 三角函数线的定义

设任意角 α 的顶点在原点 O , 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边与单位圆相交于点 $P(x, y)$, 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M ; 过点 $A(1, 0)$ 作单位圆的切线, 它与角 α 的终边或其反向延长线交于点 T .



由四个图看出:

当角 α 的终边不在坐标轴上时, 有向线段 $OM = x$, $MP = y$, 于是有

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = MP,$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = OM,$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT.$$

我们就分别称有向线段 MP 、 OM 、 AT 为正弦线、余弦线、正切线.

说明:

(1) 三条有向线段的位置: 正弦线是 α 的终边与单位圆的交点到 x 轴的垂直线段; 余弦线在 x 轴上; 正切线在过单位圆与 x 轴正方向的交点的切线上. 三条有向线段中两条在单位圆内, 一条在

单位圆外;

(2) 三条有向线段的方向: 正弦线由垂足指向 α 的终边与单位圆的交点, 余弦线由原点指向垂足, 正切线由切点指向切线与 α 的终边的交点;

(3) 三条有向线段的正负: 三条有向线段凡与 x 轴或 y 轴同向的为正值, 与 x 轴或 y 轴反向的为负值;

(4) 三条有向线段的书写: 有向线段的起点字母在前, 终点字母在后.

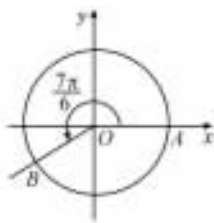
典例探源

例 1 求 $\frac{7\pi}{6}$ 的正弦、余弦和正切值.

【解】 如图, 在直角坐标系中, 作 $\angle AOB = \frac{7\pi}{6}$, 则 $\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为

$B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, 故由三角函数定义得 $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{6} =$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



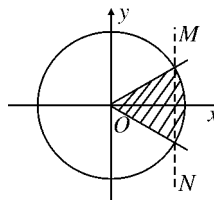
(例 1 解图)

例 2 解不等式 $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】 先在 x 轴上找到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 作 x 轴的垂线, 交单位圆于 M, N 两点, 则以射线 OM, ON 为终边的

角的集合即为方程 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

的解集, 而劣弧 MN 对应的角 (阴影部分) 即为不等式 $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集, 如图所示.



(例 2 图)

【解】 终边 OM, ON 对应的角为 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 故不等式 $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集

为 $(2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}), k \in \mathbf{Z}$.

感悟: 解不等式时, 要注意终边上角的取舍. 在 x 轴下方的角在书写时往往用负角表示比较方便.

变式 2 利用单位圆写出符合下列条件的角 x 的取值范围.

- (1) $\sin x < -\frac{1}{2}$; (2) $\cos x > \frac{1}{2}$;
(3) $0 < x < \pi$, $\sin x > \frac{1}{2}$, 且 $\cos x < \frac{1}{2}$;
(4) $|\cos x| \leq \frac{1}{2}$; (5) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, 且 $\tan x \leq -1$.

【解】 (1) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(2) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(3) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$.

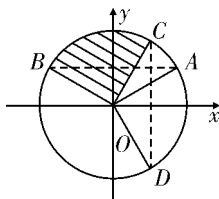
(4) $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

(5) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

例 3 求函数 $y = \lg(2\sin x - 1) + \sqrt{1 - 2\cos x}$ 的定义域.

【解】 由题意得 $\begin{cases} 2\sin x - 1 > 0 \\ 1 - 2\cos x \geq 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 同样以例 1 与



(例 3 解图)

例 2 的方法确定终边(如图),得到劣弧 ACB 和优弧 CBD 的公共部分对应角的范围是 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right), k \in \mathbf{Z}$, 即函数的定义域为

$\left[2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right), k \in \mathbf{Z}$.

感悟: 首先要把不等式变为基本型(最简单的三角不等式), 对于三角不等式组应分别确定区域, 取其公共部分, 有些同学易将答案写成 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 因此在没有确定角范围的情况下, 不能忘记将角加以推广.

例 4 求证: 当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

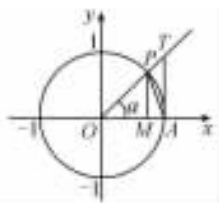
【分析】 这是三角函数的经典问题, 体现了角及其正弦、正切的关系. 直接化简不容易解决问题, 考虑角 α , $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ 的几何意义, 用三角函数线法会很轻松地完成证明.

【解】 如图所示,

$\because \sin \alpha = MP, \tan \alpha = AT,$

$S_{\triangle AOP} < S_{\text{扇形} OPA} < S_{\triangle OAT},$

又 $\because S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} OA \cdot MP =$



(例 4 解图)

$\frac{1}{2} MP = \frac{1}{2} \sin \alpha,$

$S_{\text{扇形} OPA} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot OA^2 = \frac{1}{2} \alpha,$

$S_{\triangle OAT} = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} AT = \frac{1}{2} \tan \alpha,$

$\therefore \frac{1}{2} \sin \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \tan \alpha, \therefore \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha.$

感悟: 此题巧妙地利用三角函数线和三角形、扇形的面积公式证明了结论, 很值得我们学习. 对于“当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ ”这个结论, 是我们在三角函数判断中常用的结论.

学习提点

1. 作三角函数线时要注意以下几点:

(1) 位置 (2) 方向 (3) 正负

2. 三角函数线的应用

(1) 利用单位圆定义三角函数求三角函数值;

(2) 利用单位圆中的三角函数线解三角函数方程与三角不等式;

(3) 利用单位圆中的三角函数线求函数定义域;

(4) 利用单位圆中的三角函数线比较三角函数数值的大小.

学海探骊

基础达标

1. 满足 $\tan \alpha \geq \cot \alpha$ 的角 α 的一个取值范围是

()

A. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$

B. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. 设角 α 是第四象限角, 则 $\tan \alpha$ 和 $\sin \alpha$ 的大小关系是

()

A. $\sin \alpha > \tan \alpha$

B. $\sin \alpha < \tan \alpha$

C. $\sin \alpha \geq \tan \alpha$

D. 不确定

3. 已知 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 在单位圆中角 θ 的正弦线、余弦线、正切线分别是 a 、 b 、 c , 则它们的大小关系是

()

A. $a > b > c$

B. $c > a > b$

C. $c > b > a$

D. $b > c > a$

4. 下列命题中为真命题的是

()

A. 三角形的内角必是第一象限角或第二象限角

B. 角 α 的终边在 x 轴上时, 角 α 的正弦线、正切线分别变成一个点

C. 终边在第二象限的角是钝角

D. 终边相同的角必然相等

5. 下列四个命题中, 不正确命题的个数是 ()

① α 一定时, 单位圆中的正弦线一定;

②单位圆中, 有相同正弦线的角相等;

③ α 和 $\alpha + \pi$ 有相同的正切线;

④具有相同正切线的两个角终边在同一直线上.

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

6. 已知 MP 、 OM 、 AT 分别是 75° 角的正弦线、余弦线、正切线, 则一定有 ()

A. $MP < OM < AT$

B. $OM < AT < MP$

C. $AT < OM < MP$

D. $OM < MP < AT$

7. 若 α 为锐角, 则 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 与 1 的大小关系是 ()

A. 大于

B. 小于

C. 等于

D. 不确定

8. 已知角 α 的余弦线是单位长度的有向线段, 那么角 α 的终边 ()

A. 在 x 轴上

B. 在 y 轴上

C. 在直线 $y=x$ 上

D. 在直线 $y=-x$ 上

9. 已知角 α 余弦线长度不大于角 α 的正弦线长度, 那么角 α 的终边落在第一象限内的范围是 ()

A. $(0, \frac{\pi}{4}]$

B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

C. $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$

D. $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}], k \in \mathbb{Z}$

10. 若 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 则下列不等式中成立的是 ()

A. $\sin\theta > \cos\theta > \tan\theta$

B. $\cos\theta > \tan\theta > \sin\theta$

C. $\tan\theta > \sin\theta > \cos\theta$

D. $\sin\theta > \tan\theta > \cos\theta$

11. 函数 $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{\cos x} + \frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域是 ()

A. $\{1\}$

B. $\{1, 3\}$

C. $\{-1\}$

D. $\{-1, 3\}$

12. 依据三角函数线, 作出如下四个判断:

① $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{6}$; ② $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4}$;

③ $\tan \frac{\pi}{8} > \tan \frac{3\pi}{8}$; ④ $\sin \frac{3\pi}{5} > \sin \frac{4\pi}{5}$.

其中判断正确的有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

13. 试作出角 $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ 的正弦线、余弦线、正切线.

能力拓展

14. $x \in (0, \pi)$, 则使 $\sin x \geq \cos x$ 成立的 x 的变化区间是_____.

15. 用三角函数线比较 $\sin 1$ 与 $\cos 1$ 的大小, 结果是_____.

16. 当 $\alpha \in [0, \pi]$ 时, $|\sin \alpha| \leq |\cos \alpha|$ 的解集为_____.

17. 函数 $y = \frac{1}{\tan \alpha} \left(-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \text{ 且 } \alpha \neq 0 \right)$ 的值域为_____.

创新视点

18. 利用三角函数线, 写出满足下列条件的角 x 的集合.

(1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\cos x \leq \frac{1}{2}$; (3) $\tan x \geq -1$;

(4) $\sin x > -\frac{1}{2}$ 且 $\cos x > \frac{1}{2}$.

反思提升

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos \alpha$, $\cos(\sin \alpha)$, $\sin(\cos \alpha)$ 的大小关系是 ()

A. $\cos \alpha < \cos(\sin \alpha) < \sin(\cos \alpha)$

B. $\cos(\sin \alpha) < \cos \alpha < \sin(\cos \alpha)$

C. $\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha < \cos(\sin \alpha)$

D. $\cos(\sin \alpha) < \sin(\cos \alpha) < \cos \alpha$

1.2.3 同角三角函数的基本关系式

知识提要

1. 同角三角函数关系式

(1) 平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

(2) 商数关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.