

前言

QIAN YAN

本书立足于考生应用能力、实践能力和人文素质的培养,旨在规范和优化高考备考复习的单元、阶段、专题和综合模拟考试,并切实地解决新教材、新高考背景下高考复习中遇到的新问题。

领新标异,素质备考 新教材的内容是鲜活的,新高考的方向是综合的,二者的终极目标是素质培养。本书大量引入了与社会生产、生活实际相结合的新材料,提供了大量综合性原创试题,目的是通过训练提高能力,教会学生会思考,会做高考题。

高考提前,备考提速 从2003年起高考提前到六月份,这样,传统的复习进度安排就难以适应新高考的需要了。本书的基础综合过关版除改章节测试为单元测试外,同时大部分学科还把双综合复习中的知识专题前移至综合过关版中,加快了复习进度。本册双综合提升版语文、数学、英语三大主科分热点专题和综合模拟两部分编写,物理、化学、生物、政治、历史、地理六科按学科内综合热点专题、学科间交叉综合热点专题和综合模拟三部分编写,在强调综合复习的同时,体现复习过程的完整性。

两个版本,个性设计 目前,正值原人教版统编教材与试验修订教材新旧交替过渡时期,本套丛书数学、物理、化学、生物、历史、地理新旧版内容差异较大的各科均按两个版本编写,这就满足了使用不同教材读者的不同需求。

包罗信息,解读说明 本书编稿前期,经过充分调研,搜集、整理了大量2003年高考信息,并精准的反映贯彻于试题编制中。可以说本书不仅是最新高考信息的传递,而且是最新高考信息的运用。编稿后期,根据2003年各科考试说明有针对性的又对丛书进行了全面的加工再造。可以说本书不仅是2003年考试说明的诠释,而且是对2003年考试说明的解读。

学生靶场,教师讲坛 本套丛书摆脱了原《高中全程复习优化设计》“1+2”模式的束缚,采用“1+1”的模式编写而自成体系。其中的一个“1”是供学生各阶段检测复习效果用的评估卷,另一个“1”是与学生用书配套而供教师对学生用书训练题进行详细讲解的教师用书。学生用书是学生演习的靶场,教师用书是教师教授的讲坛。整套丛书练讲结合,功能齐备。

为了方便教师的备课与讲解,本书特设栏目如下:

[考点阐释]依据考试说明的要求,把本单元或专题的考点全部列出,以方便教师对本单元或专题高考考查要求有一个明确而完整的把握。

[试题点拨]说明每一套试题的整体设计思路和命题意图,具体指出本套试题的主要考点、热点的渗透情况,阐明本套试题的特点及通过本套试题测试应解决的主要问题等。



[试题全解]详细、全面地分析解析“优化训练”学生用书中的每一道试题,解析方法精妙,且灵动多变,力求高效指导教师的课堂讲授,全方位提高测试训练的效果。

[备选试题]在“优化训练”学生用书测试题之外,提供一些近年来典型的高考题、新编选的典型模拟题及社会热点问题的创新题等,以补充因“优化训练”学生用书题量所限而造成的题量不足或供教师在课堂上集中讲解选用。

如今的高考,可以说是高分的较量。本丛书试题设计科学、新颖,实用性强,注重创新精神和综合运用能力的培养,试题直击考场,是考生决胜高考并赢得高分的一把利刃。

编 者

2002 年 12 月

热点专题

热点专题一 函数的性质综合运用能力测试题	(001)
热点专题二 二次函数综合运用能力测试题	(008)
热点专题三 抽象函数综合运用能力测试题	(016)
热点专题四 等差数列与等比数列综合运用能力测试题	(022)
热点专题五 不等式综合运用能力测试题	(030)
热点专题六 三角形中的三角函数问题测试题	(037)
热点专题七 命题的判断测试题	(043)
热点专题八 求轨迹方程的综合测试题	(048)
热点专题九 立体几何综合运用能力测试题	(055)
热点专题十 解析几何综合运用能力测试题	(067)
热点专题十一 学科知识综合运用能力测试题	(074)
热点专题十二 数学应用能力测试题	(081)
热点专题十三 代数逻辑推理论证能力测试题	(090)
热点专题十四 数学探索能力测试题	(099)
热点专题十五 高考数学开放型试题解题策略测试题	(105)
热点专题十六 数学阅读理解测试题	(111)
热点专题十七 选择题、填空题解题策略测试题	(118)
热点专题十八 整理性思维能力测试题	(128)
热点专题十九 圆锥曲线中对称问题测试题	(136)

综合模拟测试

模拟试题(一)	(142)
模拟试题(二)	(147)
模拟试题(三)	(153)
模拟试题(四)	(159)
模拟试题(五)	(166)
模拟试题(六)	(170)
模拟试题(七)	(174)
模拟试题(八)	(178)

⇒3. 函数 $f(x) = \frac{\log_2(4-x^2)}{|x+3|-3}$ 是 ()

- A. 奇函数不是偶函数
B. 偶函数不是奇函数
C. 既是奇函数又是偶函数
D. 既不是奇函数又不是偶函数

解析: 函数定义域为 $\begin{cases} 4-x^2 > 0, \\ |x+3|-3 \neq 0. \end{cases}$
 $\therefore -2 < x < 2$ 且 $x \neq 0$. $f(x) = \frac{\log_2(4-x^2)}{x}$.

答案: A

⇒4. 函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} (x \leq -\frac{1}{2})$ 的值域是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{7}{4}]$ B. $[-\frac{7}{4}, +\infty)$
C. $[\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}]$

解析: $\because y_1 = x^2$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上是减函数,
 $y_2 = \frac{1}{x}$ 在 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上是减函数,
 $\therefore y = x^2 + \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上是减函数,
 $y_{\min} = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$.

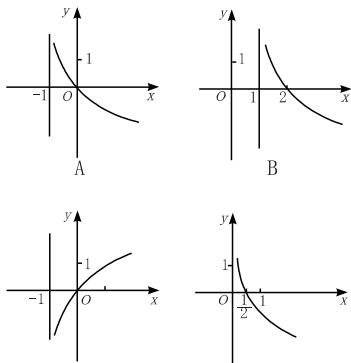
答案: B

⇒5. 已知 $f(x) = \log_a |x+1|$ 在 $(-1, 0)$ 上有 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ ()

- A. 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
B. 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减
C. 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增
D. 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减

解析: $\because -1 < x < 0 \therefore 0 < x+1 < 1$.
又 $f(x) > 0, \therefore 0 < a < 1$. 由函数图象知选 D.
答案: D

⇒6. 已知 $f(x) = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1), f^{-1}(2) < 0$, 则 $f^{-1}(x+1)$ 的图象是 ()



解析: $\because f(x) = a^x, \therefore f^{-1}(x) = \log_a x$
 $\therefore \log_a 2 < 0, \therefore 0 < a < 1$, 将 $f^{-1}(x) = \log_a x$ 的图象向左平移一个单位得到 $f^{-1}(x+1)$ 的图象.
答案: A

⇒7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & (x \geq 4), \\ f(x+3) & (x < 4). \end{cases}$ 则

$f(\log_2 3)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{23}{8}$ B. $\frac{1}{11}$ C. $\frac{1}{48}$ D. $\frac{1}{24}$

解析: $\because 1 < \log_2 3 < 2$
 $\therefore f(\log_2 3) = f(3 + \log_2 3) = f(\log_2 24)$.
 $\because 4 < \log_2 24 < 5$
 $\therefore f(\log_2 24) = (\frac{1}{2})^{\log_2 24} = \frac{1}{24}$.

答案: D

⇒8. 下列函数中, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是 ()

- A. $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ B. $y = -(x+1)^2$
C. $y = \frac{x}{1-x}$ D. $y = |x+1|$

解析: 利用数形结合及图象变换知选 A.
答案: A

⇒9. 下列函数: ① $y = x \cdot \sin x$ ② $y = \frac{2}{2^x-1} + 1$

③ $y = \begin{cases} 2^x & (x \leq 0) \\ \log_2 x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

④ $y = -x^2 + 2x + 1, x \in [-2, 2]$ 中, 其函数图象具有对称性的有 ()

- A. ①②③ B. ①③④
C. ②③④ D. ①②④

解析: 函数 $y = x \cdot \sin x$ 是偶函数; $y = \frac{2}{2^x-1} + 1 = \frac{2^x+1}{2^x-1}$. 由奇偶性定义知它是奇函数;
函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$ 关于直线 $y = x$ 对称 (因为是互为反函数). 而奇函数的图象关于原点对称. 偶函数图象关于 y 轴对称.
答案: A

⇒10. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+1)$ 且 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{f(a)}{a}, \frac{f(b)}{b}, \frac{f(c)}{c}$ 的大小关系是 ()

- A. $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b} > \frac{f(c)}{c}$
B. $\frac{f(c)}{c} > \frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a}$
C. $\frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a} > \frac{f(c)}{c}$
D. $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(c)}{c} > \frac{f(b)}{b}$

解析: 利用数形结合及 $\frac{f(a)}{a}$ 的几何意义是函数图象上一点 $(a, f(a))$ 与原点连线的斜率, 通过直线倾斜角的大小及正切函数的单调性故选 B.
答案: B

⇒11. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图甲所示, $y = g(x)$ 的图象如图乙所示, 则函数

解:(I)由 $e^x - 1 > 0$, 得

$x > 0$, 故函数的定义域为 $(0, +\infty)$.

(II)由 $0 < x_1 < x_2$, 得 $x_2 - x_1 > 0, e^{x_2} > e^{x_1} > 1$,

$\therefore e^{x_2} - 1 > e^{x_1} - 1 > 0$, 故 $\frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_1} - 1} > 1$. 从而

$$f(x_2) - f(x_1) = \ln(e^{x_2} - 1) - \ln(e^{x_1} - 1)$$

$$= \ln \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_1} - 1} > 0,$$

$\therefore$ 直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

$\Rightarrow$ 18. 设 $-1 < p < 1, f(x) = \log_a \frac{1+2x}{1-2x} +$

$$\log_a \frac{1-2x}{2x-p} \text{ (其中 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

(I)求 $f(x)$ 的定义域;

(II)求证 $f(x)$ 的图象与 x 轴无公共点.

(I)解:要使函数有意义,则

$$\begin{cases} \frac{1+2x}{1-2x} > 0, \\ \frac{1-2x}{2x-p} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{p}{2} < x < \frac{1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$

(II)证明:假设 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交,

$$\text{令 } f(x) = 0, \text{ 即 } \log_a \frac{1+2x}{1-2x} + \log_a \frac{1-2x}{2x-p} = 0,$$

$$\text{则 } \log_a \frac{1+2x}{2x-p} = 0,$$

$$\therefore \frac{1+2x}{2x-p} = 1, \text{ 将 } x = 0 \text{ 代入, 解之 } p = -1$$

与已知 $-1 < p < 1$ 相矛盾.

$\therefore f(x)$ 的图象与 x 轴无交点.

$\Rightarrow$ 19. 设 $f(x) = 2^x + \frac{a}{2^x} - 1$ (a 为实常数).

(I)当 $a < 0$ 时,用函数的单调性定义证明:
 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(II)当 $a = 0$ 时,若函数 $y = g(x)$ 的图象与
 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称,求函数
 $y = g(x)$ 的解析式;

(III)当 $a < 0$ 时,求关于 x 的方程 $f(x) = 0$
在实数集 $\mathbf{R}$ 上的解.

$$\text{解: (I) 设 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = (2^{x_1} + \frac{a}{2^{x_1}} - 1) - (2^{x_2} + \frac{a}{2^{x_2}} - 1) = (2^{x_1} - 2^{x_2}) \cdot$$

$$(1 - \frac{a}{2^{x_1+x_2}}).$$

$$\therefore x_1 < x_2, \therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0,$$

$$\text{又 } \because a < 0, \therefore 1 - \frac{a}{2^{x_1+x_2}} > 0.$$

$$\therefore \text{当 } a < 0 \text{ 时, } f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2).$$

$\therefore$ 当 $a < 0$ 时, $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

(II) 设 $P(x, y)$ 是函数 $y = g(x)$ 的图象上的一
点 $P(x, y)$ 关于直线 $x = 1$ 成对称的点为 $P'(x',$

$$y'), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1, \\ y = y', \end{cases} \therefore \begin{cases} x' = 2 - x, \\ y' = y. \end{cases}$$

由已知有 $y' = 2^{x'} - 1, \therefore y = 2^{2-x} - 1$, 即
 $g(x) = 2^{2-x} - 1$.

$$(III) \because f(x) = 0, \therefore 2^x + \frac{a}{2^x} - 1 = 0.$$

$$\text{令 } t = 2^x, \text{ 则 } t^2 - t + a = 0.$$

$$\therefore a < 0, \Delta = (-1)^2 - 4a = 1 - 4a > 0$$

$$\therefore t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

$$\therefore 2^x = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \text{ 或 } 2^x = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2},$$

$$\therefore \text{当 } a < 0 \text{ 时, } 1 < \sqrt{1-4a},$$

$$\therefore 2^x = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2} \text{ 没有实数解.}$$

$$\text{由 } 2^x = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$$

$$\text{解得: } x = \log_2 \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}.$$

$\Rightarrow$ 20. 已知函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($a > 1,$
 $x \geq 1$).

(I)求它的反函数 $f^{-1}(x)$, 并指出 $f^{-1}(x)$
的定义域;

(II)当 $1 < a < 2$ 时,证明 $f^{-1}(n) < \frac{2^n + 2^{-n}}{2}$
($n \in \mathbf{N}^*$).

(I)解: $x + \sqrt{x^2 - 1} = a^y, \sqrt{x^2 - 1} = a^y - x$
 x , 两边平方得 $x^2 - 1 = a^{2y} - 2a^y x + x^2$,

$$\text{解得, } x = \frac{a^y + a^{-y}}{2},$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$$

$$\therefore x \geq 1, \therefore x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1.$$

又 $\because a > 1, \therefore f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 的值
域为 $[0, +\infty)$.

$$\text{故 } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}), x \in [0, +\infty)$$

$$(II) \text{ 证明: } f^{-1}(n) = \frac{2^n + 2^{-n}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^n + a^{-n}) - \frac{1}{2}(2^n + 2^{-n})$$

$$= \frac{(a^n - 2^n)[(2a)^n - 1]}{2^{n+1}a^n}.$$

$$\therefore 1 < a < 2, \therefore a^n - 2^n < 0, (2a)^n - 1 > 0, a^n > 0, \text{ 则 } \frac{(a^n - 2^n)[(2a)^n - 1]}{2^{n+1}a^n} < 0,$$

$$\text{即 } f^{-1}(n) - \frac{2^n + 2^{-n}}{2} < 0,$$

$$\text{故 } f^{-1}(n) < \frac{2^n + 2^{-n}}{2} (n \in \mathbf{N}^*).$$

$\Rightarrow$ 21. 已知 $f(x) = \log_a(x+1)$, 点 p 是函数 $y = f(x)$ 的
图象上的任意一点, 点 P 关于原点的对称点 Q
的轨迹是函数 $y = g(x)$ 的图象.

(I) 当 $0 < a < 1$ 时, 解不等式 $2f(x) + g(x) \geq 0$;

(II) 当 $a > 1$ 时, $x \in [0, 1]$, 总有 $2f(x) + g(x) \geq m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

解: 设 Q 点坐标为 (x, y) , $\therefore P, Q$ 关于原点对称, $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-x, -y)$.

又点 P 在函数 $y = f(x)$ 的图象上,

$\therefore -y = \log_a(-x+1)$, 即 $y = -\log_a(1-x)$,

$\therefore g(x) = -\log_a(1-x)$.

(I) 由 $2f(x) + g(x) \geq 0$ 得 $2\log_a(1+x) \geq \log_a(1-x)$.

$$\therefore 0 < a < 1, \therefore \begin{cases} x+1 > 0, \\ 1-x > 0, \\ (x+1)^2 \leq 1-x. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ x < 1, \\ -3 \leq x \leq 0. \end{cases} \Rightarrow -1 < x \leq 0.$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | -1 < x \leq 0\}$.

(II) 由 $2f(x) + g(x) \geq m$, 得

$m \leq \log_a \frac{(1+x)^2}{1-x}$ 在 $a > 1$ 且 $x \in [0, 1]$ 时恒

成立. 记 $F(x) = \log_a \frac{(1+x)^2}{1-x}$, $x \in [0, 1]$,

则问题等价于 $m \leq [F(x)]_{\min}$.

$$\text{而 } \frac{(x+1)^2}{1-x} = \frac{x^2+2x+1}{1-x} = \frac{(1-x)^2-4(1-x)+4}{1-x} = (1-x) + \frac{4}{1-x} - 4$$

令 $t = 1-x$,

则 $t \in (0, 1]$, 则 $H(t) = t + \frac{4}{t} - 4$.

任取 $t_1, t_2 \in (0, 1]$, 且 $t_1 < t_2$,

则 $H(t_1) - H(t_2) = (t_1 + \frac{4}{t_1} - 4) - (t_2 + \frac{4}{t_2} - 4)$

$$= (t_1 - t_2)(1 - \frac{4}{t_1 t_2}) > 0.$$

$\therefore H(t) = t + \frac{4}{t} - 4$ 在 $t \in (0, 1]$ 上单调递减.

$\therefore H(t)$ 的最小值为 $H(1) = 1$, 又 $a > 1$

$\therefore F(x)_{\min} = 0$. 故 m 的取值范围为 $m \leq 0$.

$\Rightarrow 22$. 对于在区间 $[m, n]$ 上有意义的两个函数

$f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对于任意的 $x \in [m, n]$, 均有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$

在 $[m, n]$ 上是接近的, 否则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上是非接近的. 现有两个函数 $f_1(x)$

$= \log_a(x-3a)$ 与 $f_2(x) = \log_a \frac{1}{x-a}$ ($a > 0$ 且 $a \neq$

1), 给定区间 $[a+2, a+3]$.

(I) 若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2, a+3]$ 上都有意义, 求 a 的取值范围;

(II) 讨论 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在给定区间 $[a+2, a+3]$ 上是否接近.

解: (I) 依题意 $a > 0, a \neq 1, a+2-3a > 0$,

$a+2-a > 0, \therefore 0 < a < 1$.

(II) $|f_1(x) - f_2(x)| \leq 1$,

得 $-1 \leq \log_a(x^2 - 4ax + 3a^2) \leq 1$. (*)

$\therefore 0 < a < 1$, 又 $[a+2, a+3]$ 在 $x = 3a$ 的右侧,

$\therefore g(x) = \log_a(x^2 - 4ax + 3a^2)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上为减函数,

从而 $[g(x)]_{\max} = g(a+2) = \log_a(4-4a)$,

$[g(x)]_{\min} = g(a+3) = \log_a(9-6a)$.

于是 (*) 成立的充要条件是

$$\begin{cases} \log_a(4-4a) \leq 1, \\ \log_a(9-6a) \geq -1, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 4-4a \geq a, \\ 0 < 9-6a \leq \frac{1}{a}. \end{cases}$$

解此不等式组得 $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$.

故当 $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上是接近的;

当 $\frac{9-\sqrt{57}}{12} < a < 1$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上是非接近的.



备 选 试 题

1. (1) 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = x$, 若 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

A. $[1, 4]$ B. $[2, 8]$ C. $[4, 7]$ D. $[3, 7]$

解析: 令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$

$\therefore f(t) = t-3, \therefore f^{-1}(x) = x+3$

$\therefore 1 \leq x \leq 4, \therefore 4 \leq x+3 \leq 7$

$\therefore f(x)$ 的定义域是 $[4, 7]$.

答案: C

(2) 已知点 $(a, -1)$ 在函数 $y = \log_2 x$ 的图象上, 则函数 $y = x^a$ 的定义域为 ()

A. $\{x | x \geq 0\}$ B. $\{x | x > 0\}$

C. $\{x | x > 0 \text{ 或 } x < 0\}$ D. $\{x | x \in \mathbf{R}\}$

解析: $\therefore \log_2 a = -1$, 得 $a = \frac{1}{2}$

$\therefore y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

答案: A

(3) 函数 $f(x) = \log_a^x$ 的值域为 $(1, +\infty)$ 若 $a \in (0, 1)$, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x \in (1, +\infty)$ B. $x \in (0, 1)$

C. $x \in (a, +\infty)$ D. $x \in (0, a)$

解析: $\log_a x > 1, \therefore 0 < a < 1, \therefore 0 < x < a$.

答案: D

(4) 函数 $f(x) = \log_2(2-a^x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 ()

A. $1 < a < 2$ B. $0 < a < 1$

C. $0 < a < 2$ 且 $a \neq 1$ D. $0 < a < 1$ 或 $a > 2$

解析: $\therefore f(x) = \log_2(2-a^x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是

备
课
札
记



单调递减,

$\therefore u(x) = 2 - a^x$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数且 $u(x) > 0$ 恒成立.

$\therefore a > 1$ 且 $u(1) > 0$

$\therefore 1 < a < 2$.

答案:A

(5) 已知函数 $y = f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上的解析式为

A. $f(x) = 1 - x$

B. $f(x) = 3 - x$

C. $f(x) = x - 3$

D. $f(x) = -x - 1$

解析: 当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < -x < 1$

$\therefore f(-x) = (-x) + 1$

又 $\because f(x)$ 是偶函数,

$\therefore f(-x) = f(x)$

$\therefore f(x) = -x + 1$ 又 $1 < x < 2$,

$\therefore -1 < x - 2 < 0$

$\therefore f(x - 2) = -(x - 2) + 1$ 而 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,

$\therefore f(x) = f(x - 2) \therefore f(x) = 3 - x$.

答案:B

2. (1) 函数 $y = \sqrt{x^2 - 1} (x \leq -1)$ 的反函数是

答案: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1} (x \geq 0)$.

(2) $f(x) = 1 + \log_2 x (x \geq 4)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域为

解析: 反函数的定义域就是原函数的值域.

答案: $[3, +\infty)$.

3. 已知函数 $f(x) = \log_2(x + 1)$. 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移一个单位, 再将图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 得到函数 $y = g(x)$ 的图象.

(I) 求 $y = g(x)$ 的解析式;

(II) 求函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的最大值.

解: (I) $y = f(x)$ 向左平移 1 个单位得到的函数为 $y = \log_2(x + 2)$, 该函数图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍, 则对应函数的解析式为 $y = 2\log_2(x + 2)$. $\therefore g(x) = 2\log_2(x + 2)$.

(II) $F(x) = \log_2(x + 1) - 2\log_2(x + 2)$

$= \log_2 \frac{x+1}{(x+2)^2} = \log_2 \frac{x+1}{(x+1)^2 + 2(x+1) + 1}$

令 $x + 1 = t > 0$, 则 $\frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{t}{t^2 + 2t + 1}$

$= \frac{1}{t + \frac{1}{t} + 2}$

$\therefore t + \frac{1}{t} \geq 2, \therefore t + \frac{1}{t} + 2 \geq 4$.

$\therefore \frac{x+1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$.

$\therefore F(x) \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$

$\therefore F(x)$ 的最大值为 -2.

4. 设函数 $f(x) = x + \frac{a}{x+1}, x \in [0, +\infty)$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(II) 当 $0 < a < 1$ 时, 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并写出 $f(x)$ 的最小值.

解: (I) $f(x) = x + \frac{a}{x+1} = x + \frac{2}{x+1}$

$= (x+1) + \frac{2}{x+1} - 1$.

$\therefore (x+1) + \frac{2}{x+1} \geq 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当且仅当 $x+1 = \sqrt{2}$ 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, $f(x)$ 有最小值 $2\sqrt{2} - 1$.

(II) 设 $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in [0, +\infty)$.

$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \frac{a}{x_2+1} - x_1 - \frac{a}{x_1+1}$

$= (x_2 - x_1) + \frac{a(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$= (x_2 - x_1) [1 - \frac{a}{(x_1+1)(x_2+1)}]$.

$\therefore x_1 + 1 \geq 1, x_2 + 1 > 1$

$\therefore (x_1+1)(x_2+1) > 1$ 又 $0 < a < 1$

$\therefore 0 < \frac{a}{(x_1+1)(x_2+1)} < 1$

又 $x_2 - x_1 > 0$

$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 有最小值 a .

5. 已知函数 $f(x) = m(x + \frac{1}{x})$ 的图象与函数 $h(x) = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{x}) + 2$ 的图象关于点 $A(0, 1)$ 对称.

(I) 求 m 的值;

(II) 若 $g(x) = f(x) + \frac{a}{4x}$, 且 $g(x)$ 在区间 $(0, 2]$ 上为减函数, 求实数 a 的取值范围;

(III) 在条件 (II) 下, 试证明曲线 $c_1: y = a^x$ 与曲线 $c_2: y = 12f(x+1) - 3x - 4$ 的交点不可能落在 y 轴的左侧.

解: (I) 在 $f(x)$ 的图象上任取一点 $M(x, y)$, 它关于点 $A(0, 1)$ 对称的点为 $M'(x_0, y_0)$

$\therefore M'(x_0, y_0)$ 在 $h(x)$ 的图象上,

$\therefore y_0 = h(x_0)$. 又 $x + x_0 = 0$ 且 $y_0 + y = 2$

$\therefore x_0 = -x, y_0 = 2 - y$,

$\therefore 2 - y = h(-x)$, 即 $2 - y = \frac{1}{4}(-x - \frac{1}{x}) + 2$

$\therefore y = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{x})$ 又 $f(x) = m(x + \frac{1}{x})$

$\therefore m = \frac{1}{4}$.

(II) $g(x) = \frac{1}{4}(x + \frac{1}{x}) + \frac{a}{4x}$

$= \frac{1}{4}(x + \frac{a+1}{x})$.

任取 $x_1, x_2 \in (0, 2]$ 且 $x_1 < x_2$.



$$\begin{aligned} \therefore g(x_2) - g(x_1) &= \frac{1}{4}(x_2 - x_1 + \frac{a+1}{x_2} - \frac{a+1}{x_1}) \\ &= \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(1 - \frac{a+1}{x_1 x_2}) = \frac{(x_2 - x_1)}{4x_1 x_2} [x_1 x_2 - (a+1)] \end{aligned}$$

$\therefore 0 < x_1 < x_2 \leq 2$ 且 $g(x)$ 为减函数

$$\therefore g(x_2) - g(x_1) < 0$$

$\therefore x_1 x_2 - (a+1) < 0$ 在 $x_1, x_2 \in (0, 2]$ 上恒成立,

$\therefore a > x_1 x_2 - 1$ 对 $x_1, x_2 \in (0, 2]$ 上恒成立.

$\therefore a$ 大于 $x_1 x_2 - 1$ 的最大值而 $x_1 x_2 - 1$ 在 $(0, 2]$ 上的最大值情况是小于 $4 - 1 = 3$,

$$\therefore a \geq 3.$$

(Ⅲ) $c_1: y = a^x$ $c_2: y = 12 \times \frac{1}{4}(x+1 + \frac{1}{x+1}) - 3x - 4 = -1 + \frac{3}{x+1}$. 由数形结合或反证法可证.



随感录

备课札记





$$g(2) < 0 \therefore 4a + 2b - 1 < 0$$

$$\therefore 2b < 1 - 4a \text{ 又 } a > 0$$

$$\therefore 1 - 4a < 1 \therefore 2b < 1 \therefore b < \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \begin{cases} b \geq -4a \\ 4a + 2b - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b \geq -4a \\ -4a > 2b - 1 \end{cases}$$

$$\therefore b \geq -4a > 2b - 1$$

$$\therefore 2b - 1 < b$$

$$\therefore b < 1 \text{ 又 } b < \frac{1}{2}$$

$$\therefore b < \frac{1}{2}.$$

⇒ 18. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$, (a, b 为常数, 且 $a \neq 0$) 满足条件 $f(-x+5) = f(x-3)$, 且方程 $f(x) = x$ 有两个相等的实根.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 是否存在实数 $m, n (m < n)$, 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[3m, 3n]$?

解: (I) 由 $f(5-x) = f(x-3)$ 知, 函数 $y = f(x)$ 的对称轴方程是 $x = 1$.

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a$$

①

又方程 $f(x) = x$ 有两个相等的实根,

$\therefore ax^2 + (b-1)x = 0$ 有两个等根,

$\therefore \Delta = 0$ 且 $a \neq 0$,

$$\therefore (b-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = 0$$

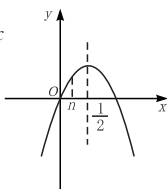
$$\therefore b = 1, \text{ 代入 ① 得 } a = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x.$$

$$(II) \because f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } (-\infty, \frac{1}{2}].$$



假设存在实数 m, n , 当定义域为 $[m, n]$ 时, 值域为 $[3m, 3n]$

$$\therefore 3n \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore n \leq \frac{1}{6}.$$

由二次函数图象知, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 内是增函数,

$\therefore$ 值域为 $[f(m), f(n)]$

$$\therefore \begin{cases} f(m) = 3m \\ f(n) = 3n \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2}m^2 + m = 3m \\ -\frac{1}{2}n^2 + n = 3n \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 + 4m = 0 \\ n^2 + 4n = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = 0 \text{ 或 } m = -4 \\ n = 0 \text{ 或 } n = -4 \end{cases}$$

$$\therefore m < n$$

$$\therefore m = -4, n = 0.$$

故存在实数 $m = -4, n = 0$. 使得 $f(x)$ 的定义域和值域分别是 $[-4, 0]$ 和 $[-12, 0]$.

⇒ 19. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象过点 $(-1, 0)$, 且

$$x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ 对一切实数 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立.}$$

成立.

(I) 求 $f(1)$;

(II) 求 $f(x)$ 的解析式;

(III) 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} > \frac{4n}{2n+4}$.

(I) 解: $\because x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ 恒成立,

$$\therefore 1 \leq f(1) \leq \frac{1}{2}(1^2 + 1)$$

$$\therefore f(1) = 1.$$

$$(II) \text{ 解: } \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}, a + c = \frac{1}{2}, \text{ 即 } c = \frac{1}{2} - a.$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a.$$

$$\therefore x \leq ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1) \text{ 恒成立.}$$

$$\therefore \begin{cases} ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a \geq 0 \\ (a - \frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{2}x - a \leq 0 \end{cases} \text{ 恒成立.}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \\ \Delta_1 = \frac{1}{4} - 4a(\frac{1}{2} - a) \leq 0 \\ \Delta_2 = \frac{1}{4} - 4 \cdot (-a) \cdot (a - \frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \\ (a - \frac{1}{4})^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore c = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

$$(III) \text{ 证明: } f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$$

$$\therefore f(n) = \frac{1}{4}(n+1)^2$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(n)} = \frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{(n+1)^2}$$

备
课
札
记



$$\therefore 0 < f(a) < 4\log_2 \frac{5}{3}$$

$$\therefore f(a) \text{ 的值域为 } (0, 4\log_2 \frac{5}{3}).$$

(Ⅲ) $f(a)$ 在 $a > 1$ 上是减函数.

证明: 设 $a_2 > a_1 > 1$, $\frac{(a_2+4)^2}{a_2(a_2+8)} - \frac{(a_1+4)^2}{a_1(a_1+8)}$

$$= 1 + \frac{16}{a_2^2+8a_2} - 1 - \frac{16}{a_1^2+8a_1}$$

$$= \frac{16}{a_2^2+8a_2} - \frac{16}{a_1^2+8a_1}$$

$$= \frac{16(a_1^2+8a_1-a_2^2-8a_2)}{(a_1^2+8a_1)(a_2^2+8a_2)}$$

$$= \frac{16(a_1-a_2)(a_1+a_2+8)}{(a_1^2+8a_1)(a_2^2+8a_2)} < 0.$$

$$\therefore \frac{(a_2+4)^2}{a_2(a_2+8)} < \frac{(a_1+4)^2}{a_1(a_1+8)}$$

$$\therefore f(a_2) < f(a_1).$$

(Ⅳ) 解: $\because S > 2$

$$\therefore 2\log_2 \frac{(a+4)^2}{a(a+8)} > 2,$$

$$\therefore \frac{(a+4)^2}{a(a+8)} > 2$$

$$\therefore a^2+8a < 16(a > 1)$$

$$\therefore a^2+8a-16 < 0$$

$$\therefore 1 < a < 4(\sqrt{2}-1).$$

故 a 的取值范围为 $(1, 4(\sqrt{2}-1))$

备 选 试 题

一、研究二次函数性质

1. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 + |x-a| + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的奇偶性;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 的最小值.

解法一: (Ⅰ) 当 $a=0$ 时, $f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(a) = a^2 + 1$, $f(-a) = a^2 + 2|a| + 1$. 显然 $f(-a) \neq f(a)$ 且 $f(-a) \neq -f(a)$, 则 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(Ⅱ) (i) 当 $x \leq a$ 时, $f(x) = x^2 - x + a + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + a + \frac{3}{4}$.

若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递减, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(a) = a^2 + 1$;

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = a + \frac{3}{4}$.

(ii) 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 + x - a + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - a + \frac{3}{4}$.

若 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值

为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - a$;

若 $a > -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 $f(a) = a^2 + 1$.

综上所述, 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值是 $\frac{3}{4} - a$; 当 $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值是 $a^2 + 1$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值是 $\frac{3}{4} + a$.

解法二: (Ⅰ) 当 $a=0$ 时, $f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1 = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(1) = 2 + |1-a|$, $f(-1) = 2 + |1+a|$, 显然 $f(-1) \neq f(1)$, 则 $f(x)$ 不是偶函数; 又 $f(0) = |a| + 1 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 也不是奇函数. 故当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(Ⅱ) 同解法一

解法三: (Ⅰ) $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$
 $\Leftrightarrow |x+a| = |x-a| \Leftrightarrow |x+a|^2 = |x-a|^2 \Leftrightarrow 2ax = -2ax \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0$.

$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+1) + |x-a| + |x+a| = 0$, 而这显然是不可能的.

综上所述, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 为偶函数; 当 $a \neq 0$ 时, $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(Ⅱ) 设 $t = x - a (t \in \mathbf{R})$, 则 $g(t) = f(x) = (t+a)^2 + |t| + 1$.

(i) 当 $t \geq 0$ 时, $g(t) = (t+a)^2 + t + 1 = (t + \frac{2a+1}{2})^2 - a + \frac{3}{4}$.

若 $-\frac{2a+1}{2} < 0$, 即 $a > -\frac{1}{2}$, 则 $g(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $g(0) = a^2 + 1$;

若 $-\frac{2a+1}{2} \geq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则 $g(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上最小值为 $g(-\frac{2a+1}{2}) = \frac{3}{4} - a$.

(ii) 当 $t \leq 0$ 时, $g(t) = (t+a)^2 - t + 1 = (t + \frac{2a-1}{2})^2 + a + \frac{3}{4}$.

若 $-\frac{2a-1}{2} < 0$, 即 $a > \frac{1}{2}$, 则 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最小值为 $g(-\frac{2a-1}{2}) = \frac{3}{4} + a$;

若 $-\frac{2a-1}{2} \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 从而 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最小值为 $g(0) = a^2 + 1$.

综上所述, 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4} - a$; 当 $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $a^2 + 1$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{4} + a$.

错思误解: 在高考阅卷中, 发现考生对本题的

备
课
札
记



解答有如下几种错误:

(I) 错解一: $\because f(x) = x^2 + |x-a| + 1, f(-x) = x^2 + |x+a| + 1, -f(x) = -x^2 - |x-a| - 1,$
 $\therefore f(-x) \neq f(x), \text{且 } f(-x) \neq -f(x).$
 $\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数.

错解二: 当 $x > a$ 时, $f(x) = x^2 + x - a + 1,$
 $f(-x) = x^2 - x - a + 1, -f(x) = -x^2 - x + a - 1,$
 $\therefore f(-x) \neq f(x), \text{且 } f(-x) \neq -f(x).$
 $\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数.

当 $x < a$ 时, $f(x) = x^2 - x + a + 1, f(-x) = x^2 + x + a + 1, -f(x) = -x^2 - x - a - 1,$
 $\therefore f(-x) \neq f(x), \text{且 } f(-x) \neq -f(x).$
 $\therefore f(x)$ 也是非奇非偶函数.

当 $x = a$ 时, $f(x) = a^2 + 1$ 为偶函数.

(II) 错解: 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 + x - a + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} - a,$ 所以当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{3}{4} - a;$

当 $x < a$ 时, $f(x) = x^2 - x + a + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} + a,$ 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = \frac{3}{4} + a.$

解题回顾: ① 上述基本解法是根据标准答案整理的, 第(II)小题的两种分类“ $x \leq a$ ”和“ $x \geq a$ ”在 $x = a$ 处有重复. 另外, 在原标准答案中, 曾出现有“ $f(\frac{1}{2}) \leq f(a)$ ”和“ $f(-\frac{1}{2}) \leq f(a)$ ”, 似乎不必要, 且有误导作用.

② 对于第(I)小题, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 为偶函数是显然的; 当 $a \neq 0$ 时, 基本解法应用特殊值法判定 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 而解法三执果索因, 似乎更符合一般学生的思维特点.

③ 严格地讲, 第(II)小题在求 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值的过程中, 在区间 $(-\infty, a]$ 和 $[a, +\infty)$ 上得到的都是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的极小值.

联想与激活: 设函数 $f(x) = x^2 + |x-2| - 1, x \in \mathbf{R}.$

(I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 求函数 $f(x)$ 的最小值.

基本解法: (I) $f(2) = 3, f(-2) = 7.$

由于 $f(-2) \neq f(2), f(-2) \neq -f(2),$

故 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(II) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x \geq 2, \\ x^2 - x + 1, & x < 2. \end{cases}$

由于 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上的最小值为 $f(2) = 3,$ 在 $(-\infty, 2)$ 内的最小值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的最小值为 $\frac{3}{4}.$

二、二次函数与二次方程、二次不等式综合

2. 已知函数 $f(x) = \log_a 10(a-x), g(x) = \log_a (20-5x^2),$ 不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集中含且仅含一个整数 1, 求实数 a 的取值范围.

剖析: 先考虑有意义的 x 取值范围:

$\begin{cases} 20-5x^2 > 0 \\ a-x > 0 \end{cases}$. 由第一式知整数 $x \in \{-1, 0, 1\},$

又由题设 $x=1$ 满足条件, 代入第二式, 知 $a > 1,$ 故不等式即 $0 < 10(a-x) < 20-5x^2.$ 若 $x=0$ 也满足条件, 则有 $a < 2,$ 故 $a \geq 2$ (此时 $x=-1$ 也不符合条件). $x=1$ 时应有 $10(a-1) < 15, a < 2.5.$

故 $a \in [2, \frac{5}{2}).$

解题回顾: 本题关键是正确建立不等式或不等式组, 然后求解. 但一定要注意对数函数要有意义, 同时要深刻理解整数 1.

联想与激活: (I) 如果不等式 $\log_a (2 - \frac{x^2}{2}) >$

$\log_a (a-x)$ 只有一个正整数解 $x=1,$ 试确定实数 a 的取值范围.

(II) 已知 $f(x) = \cos^2 x + 2m \sin x - 2m - 2,$ 其中 $x \in [0, \pi]$ 若 $f(x)$ 恒为负值, 求 m 的范围.

(III) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 如果不等式组 $\begin{cases} f(1+kx-x^2) > f(k+2) \\ f(3kx-1) > f(1+kx-x^2) \end{cases}$ 对任何 $x \in [0, 1]$ 都成立, 求 k 的取值范围.

解答与提示: (I) 由 $x=1$ 是 $\log_a (2 - \frac{x^2}{2}) >$

$\log_a (a-x)$ 的解可知 $\log_a \frac{3}{2} > \log_a (a-1),$

则 $1 < a < \frac{5}{2}$ ①

当 $1 < a < \frac{5}{2}$ 时,

由 $\log_a (2 - \frac{x^2}{2}) > \log_a (a-x),$

得 $2 - \frac{x^2}{2} > a - x > 0,$

解得 $1 - \sqrt{5-2a} < x < 1 + \sqrt{5-2a},$

且 $x < a.$ 由于不等式只有一个正整数解 $x=1,$

则 $0 \leq 1 - \sqrt{5-2a} < 1$

且 $1 < 1 + \sqrt{5-2a} \leq 2.$

解得 $a \geq 2$ ②

结合 ①、② 两式可知实数 a 的取值范围是 $[2, \frac{5}{2}).$

(II) 当 $\sin x = 1$ 时, $f(x) = -2 < 0$ 恒成立. 考虑 $0 \leq \sin x < 1$ 时, 由 $f(x) < 0$ 恒成立得

$2m > \frac{2 - \cos^2 x}{\sin x - 1}$ 恒成立.

由 $2m > \frac{2 - \cos^2 x}{\sin x - 1} = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin x - 1}$

$= \sin x + 1 + \frac{2}{\sin x - 1}$

$= -[(1 - \sin x) + \frac{2}{1 - \sin x}] + 2,$

令 $t = 1 - \sin x \quad (0 < t \leq 1),$

则 $2m > -(t + \frac{2}{t}) + 2.$