

9. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数, 若 $|a| > |b|$, 则以下结论正确的是
- A. $f(a) - f(b) < 0$ B. $f(a) - f(b) > 0$ C. $f(a) + f(b) > 0$ D. $f(a) + f(b) < 0$
10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 2 为周期的偶函数, 已知 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上
- A. 是增函数, 且 $f(x) < 0$ B. 是增函数, 且 $f(x) > 0$
- C. 是减函数, 且 $f(x) < 0$ D. 是减函数, 且 $f(x) > 0$
11. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}), & x \leq 2\,006 \\ f(x-4), & x > 2\,006 \end{cases}$, 则 $f(2\,005) + f(2\,006) + f(2\,007) + f(2\,008)$ 等于
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $1 + \sqrt{3}$
12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 若对任 $x \in [t, t+2]$, 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是
- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$
- C. $(0, 2]$ D. $[-\sqrt{2}, -1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第Ⅱ卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

13. 设 $g(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0, \\ \ln x & x > 0, \end{cases}$ 则 $g[g(\frac{1}{2})] =$ _____.
14. 对于在区间 $[a, b]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对于任意 $x \in [a, b]$, 均有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是接近的, 若函数 $y = x^2 - 3x + 4$ 与函数 $y = 2x - 3$ 在区间 $[a, b]$ 上是接近的, 则该区间可以是_____.
15. 已知 $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & (x \leq 0), \\ f(x-1) + 1, & (x > 0), \end{cases}$ 则 $f(\frac{4}{3}) + f(-\frac{4}{3})$ 的值为_____.
16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-e, 0) \cup (0, e]$ 上的奇函数, 当 $x \in [-e, 0)$ 时, $f(x) = ax + \ln(-x)$, 则当 $x \in (0, e]$ 时, $f(x) =$ _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 设 $a > 0$ 且 $f(x) = x^2 - 2ax$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 均有 $f(x) < 4$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}} & x > 0, \end{cases}$ 如果 $f(x) > 1$, 求 x 的取值范围.

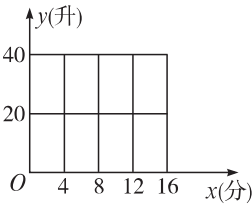
19. (本小题满分 12 分) 某种洗衣机在洗涤衣服时, 需经过进水、清洗、排水、脱水四个连续的过程. 假设进水时水量匀速增加, 清洗时水量保持不变. 已知进水时间为 4 分钟, 清洗时间为 12 分钟, 排水时间为 2 分钟, 脱水时间为 2 分钟. 洗衣机中的水量 y (升) 与时间 x (分钟) 之间的关系如下表所示:

x	0	2	4	16	16.5	17	18	...
y	0	20	40	40	29.5	20	2	...

请根据表中提供的信息解答下列问题:

(1) 试写出当 $x \in [0, 16]$ 时, y 关于 x 的函数解析式, 并画出该函数的图象;

(2) 根据排水阶段的 2 分钟点 (x, y) 的分布情况, 可选用 $y = \frac{a}{x} + b$ 或 $y = c(x - 20)^2 + d$ (其中 a, b, c, d 为常数), 作为在排水阶段的 2 分钟内水量 y 与时间 x 之间关系的模拟函数. 试分别求出这两个函数的解析式.



20. (本小题满分 12 分) 函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $f(x+4)=f(x)$ 成立. 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x)=-x^2+2x+1$.

(1) 当 $x \in [4k-2, 4k+2] (k \in \mathbf{Z})$ 时, 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求不等式 $f(x) > \frac{3}{2}$ 的解集.

21. (本小题满分 12 分) 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$.

(1) 若 $k=2$, 求方程 $f(x)=0$ 的解;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在 $(0,2)$ 上有两个解 x_1, x_2 , 求 k 的取值范围, 并证明 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4$.

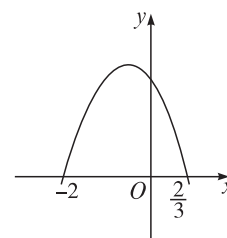
22. (本小题满分 12 分) 已知两个二次函数: $y=f(x)=ax^2+bx+1$ 与 $y=g(x)=a^2x^2+bx+1(a>0)$, 函数 $y=g(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点, 其交点横坐标分别为 $x_1, x_2(x_1<x_2)$.

(1) 试证: $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是单调函数;

(2) 当 $a > 1$ 时, 设 x_3, x_4 是方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两个实根, 且 $x_3 > x_4$, 试判断 x_1, x_2, x_3, x_4 的大小关系.

18. (本小题满分 12 分) 已知向量 $i=(1,0), j=(0,1)$, 且规定 $A_x^m = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1) (x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}^*, \text{且 } A_x^0 = 1)$, 若函数 $f(x) = aA_{x+1}^3 + 3bA_x^2 + 1 (a \neq 0, b \neq 0)$ 在 $x=1$ 时取得极值, 在 $x=2$ 处的切线的方向向量且为 $(b+5)i+5aj$.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 试证明方程 $f(x) = 6x - \frac{16}{3}$ 在区间 $(1, \frac{4}{3})$ 内有且仅有一根.

19. (本小题满分 12 分) 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 的极小值为 -8 , 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0), (\frac{2}{3}, 0)$, 如图所示.



- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若对 $x \in [-3, 3]$ 都有 $f(x) \geq m^2 - 14m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分) 若函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - ax$ 的导数为奇函数.

(1) 试求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. (本小题满分 12 分) 已知抛物线 $C: y = x^2 + 4x + \frac{7}{2}$, 过 C 上一点 M , 且与 M 处的切线垂直的直线称为 C 在点 M 的法线.

(1) 若 C 在点 M 的法线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 求点 M 的坐标 (x_0, y_0) ;

(2) 设 $P(-2, a)$ 为 C 对称轴上的一点, 在 C 上是否存在点, 使得 C 在该点的法线通过点 P ? 若有, 求出这些点, 以及 C 在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ (a 为常数) 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 函数 $g(x) = \lambda f(x) + \sin x$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的减函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $g(x) \leq t^2 + \lambda t + 1$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 求 t 的取值范围;

(3) 讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)} = x^2 - 2ex + m$ 的根的个数.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)已知 $\tan 2\theta = 2\sqrt{2}$, 且 $0 < \theta < \pi$. 求 $\frac{\sin\theta + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} - 1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}\sin\omega x, \cos\omega x)$, $\mathbf{b} = (\cos\omega x, \cos\omega x)$, $\omega > 0$, 又函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω ;

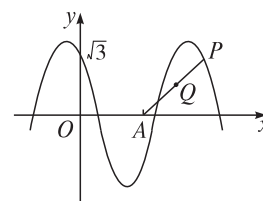
(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

19. (本小题满分 12 分)如图所示, 函数 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ ($x \in \mathbf{R}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象与 y 轴交于点 $(0, \sqrt{3})$, 且该函数的最小正周期为 π .

(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, 点 P 是该函数图象上一点, 点 $Q(x_0, y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 求 x_0 的值.



20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 2a\cos^2 x + b\sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

(1) 若 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$, 求 $f(x)$ 的增区间, 并求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时的 x 的值;

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$, 试问: 函数 $f(x)$ 的图象经过怎样的平移才能使所得图象对应的函数成为偶函数? 举出一种方法即可.

21. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{3} S_{\triangle ABC}$ (其中 $S_{\triangle ABC}$ 为 $\triangle ABC$ 的面积).

(1) 求 $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$;

(2) 若 $b=2$, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=3$, 求 a .

22. (本小题满分 12 分) 若 $a = (\sqrt{3}\cos\omega x, \sin\omega x)$, $b = (\sin\omega x, 0)$, 其中 $\omega > 0$, 记函数 $f(x) = (a+b) \cdot b + k$.

(1) 若 $f(x)$ 图象中相邻两条对称轴间的距离不小于 $\frac{\pi}{2}$, 求 ω 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 时, $f(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的解析式.

高中全程复习优化设计·数学热点预测专项检测卷(四)

几种常见的递推数列及其应用

时间:120 分钟 满分:150 分

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分,考试时间120分钟.

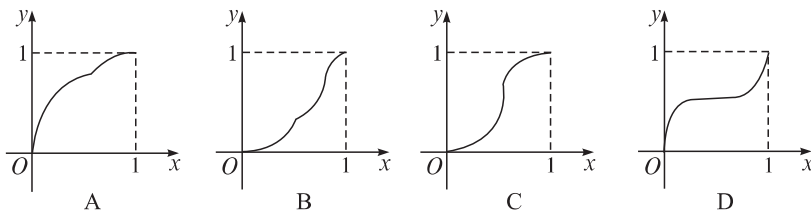
第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+3a_n}$, $a_1 = 2$, 则 a_4 等于
 A. $\frac{16}{5}$ B. $\frac{2}{19}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{8}{7}$
2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 a_{1000} 等于
 A. 5 B. -5 C. 1 D. -1
3. 若数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的首项为14, 前 n 项的和为 S_n , 点 (a_n, a_{n+1}) 在直线 $x - y - 2 = 0$ 上, 那么下列说法正确的是
 A. 当且仅当 $n=1$ 时, S_n 最小
 B. 当且仅当 $n=8$ 时, S_n 最大
 C. 当且仅当 $n=7$ 或 8 时, S_n 最大
 D. S_n 有最小值, 无最大值
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{an}{bn+1}$, 其中 a, b 均为正常数, 那么 a_n 与 a_{n+1} 的大小关系是
 A. $a_n > a_{n+1}$ B. $a_n < a_{n+1}$
 C. $a_n = a_{n+1}$ D. 与 n 的取值相关
5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n < \frac{1}{2}, \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} \leq a_n < 1, \end{cases}$ 若 $a_1 = \frac{6}{7}$, 则 a_9 等于
 A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{1}{7}$
6. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$ 是首项为1, 公比为3的等比数列, 则 a_n 等于
 A. $\frac{3^n + 1}{2}$ B. $\frac{3^n + 3}{2}$ C. $\frac{3^n - 1}{2}$ D. $\frac{3^n - 3}{2}$
7. 设函数 $f(x)$ 定义如下表, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = 5$, 且对任意的自然数均有 $x_{n+1} = f(x_n)$, 则 x_{2008} 等于

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 5
8. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-2} - 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$, 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 x 项, 最小项为第 y 项, 则 $x+y$ 等于
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
9. 一给定函数 $y = f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则该函数的图象是



10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_2=10, S_5=55$, 则过点 $P(n, a_n)$ 和 $Q(n+2, a_{n+2}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 的直线的一个方向向量的坐标可能是
- A. $(2, \frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, -2)$ C. $(-\frac{1}{2}, -1)$ D. $(-1, -1)$
11. 数列 $\{a_n\}$ 中, 相邻两项 a_n, a_{n+1} 是函数 $y=x^2+3nx+b_n$ 的两个零点, 已知 $a_{10}=-17$, 则 b_{51} 的值为
- A. 5 800 B. 5 840 C. 5 860 D. 6 000
12. 已知 $f(1,1)=1, f(m,n) \in \mathbf{N}^* (m,n \in \mathbf{N}^*)$, 且对任意 $m,n \in \mathbf{N}^*$ 都有 ① $f(m,n+1)=f(m,n)+2$; ② $f(m+1,1)=2f(m,1)$. 则 $f(2\ 007, 2\ 008)$ 的值为
- A. $2^{2\ 006}+2\ 007$ B. $2^{2\ 007}+2\ 007$ C. $2^{2\ 006}+4\ 014$ D. $2^{2\ 007}+4\ 014$

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第Ⅱ卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3(n \geq 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$ _____.
14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=a_n+2n$, 那么 $a_{2\ 008}$ 的值是_____.
15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=\frac{na_n}{n+1-a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 99 项和等于_____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=n^2 a_n$, 有 $a_1=\frac{2\ 009}{2}$, 则 $a_{2\ 008}=$ _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知一次函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x-y=0$ 对称的图象为 C , 且 $f[f(1)]=-1$. 若点 $(n, \frac{a_{n+1}}{a_n}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在曲线 C 上, 并有 $a_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}=1 (n \geq 2)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式及曲线 C 的方程;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (本小题满分 12 分) 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, \frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+1}{1-a_n} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 1)$.

- (1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列;
- (2) 求数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n ;
- (3) 设 $f_n(x) = S_n x^{2n+1}, b_n = f'_n(2)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分) 从原点出发的某质点 M , 按向量 $a=(0,1)$ 移动的概率为 $\frac{2}{3}$, 按向量 $b=(0,2)$ 移动的概率为 $\frac{1}{3}$,

设点 M 可达到点 $(0,n) (n=1,2,3,\dots)$ 的概率为 P_n .

- (1) 求 P_1 和 P_2 的值;
- (2) 求证: $P_{n+2} - P_{n+1} = -\frac{1}{3}(P_{n+1} - P_n)$;
- (3) 求 P_n 的表达式.

20. (本小题满分 12 分) $\triangle OBC$ 的三个顶点的坐标分别为 $O(0,0), B(1,0), C(0,2)$, 设 P_1 为线段 BC 的中点, P_2 为线段 CO 的中点, P_3 为线段 OP_1 的中点, 对于每一个正整数 n, P_{n+3} 为线段 $P_n P_{n+1}$ 的中点, 令 P_n 的坐标为 (x_n, y_n) ,

$$a_n = \frac{1}{2}y_n + y_{n+1} + y_{n+2}.$$

- (1) 求 a_1, a_2, a_3 及 a_n ;
- (2) 证明 $y_{n+4} = 1 - \frac{1}{4}y_n, n \in \mathbf{N}^*$;
- (3) 若记 $b_n = y_{4n+4} - y_{4n}, n \in \mathbf{N}^*$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列.

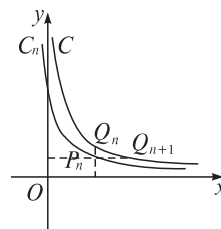
21. (本小题满分 12 分) 如图所示, 已知曲线 $C: y = \frac{1}{x}$, $C_n: y = \frac{1}{x+2^{-n}} (n \in \mathbb{N}^*)$. 从 C 上的点

$Q_n(x_n, y_n)$ 作 x 轴的垂线, 交 C_n 于点 P_n , 再从点 P_n 作 y 轴的垂线, 交 C 于点 $Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$,

(1) 求 Q_1, Q_2 的坐标;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 记数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n < \frac{1}{3}$.



22. (本小题满分 12 分) 容器中有浓度为 5% 的盐水溶液 4 kg, 第一次操作如下: 将容器中加入浓度为 1% 的盐水溶液 1 kg, 混合均匀得到浓度为 $a_1\%$ 的盐水溶液; 第二次操作如下: 再将容器中的溶液倒出 1 kg, 再加入浓度为 1% 的盐水溶液 1 kg, 混合均匀得到浓度为 $a_2\%$ 的盐水溶液. 如此反复进行下去, 设第 n 次 ($n \in \mathbb{N}^*$) 操作后得到的溶液浓度为 $a_n\%$, 求 a_n 的表达式.

