

- A. $f(a)-f(b)<0$ B. $f(a)-f(b)>0$ C. $f(a)+f(b)>0$ D. $f(a)+f(b)<0$
10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 2 为周期的偶函数, 已知 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上
- A. 是增函数, 且 $f(x) < 0$ B. 是增函数, 且 $f(x) > 0$
 C. 是减函数, 且 $f(x) < 0$ D. 是减函数, 且 $f(x) > 0$
11. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}), & x \leq 2\,006 \\ f(x-4), & x > 2\,006 \end{cases}$, 则 $f(2\,005) + f(2\,006) + f(2\,007) + f(2\,008)$ 等于
- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $1 + \sqrt{3}$
12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 若对任 $x \in [t, t+2]$, 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是
- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$
 C. $(0, 2]$ D. $[-\sqrt{2}, -1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

13. 设 $g(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0, \\ \ln x & x > 0, \end{cases}$ 则 $g[g(\frac{1}{2})] =$ _____.
14. 对于在区间 $[a, b]$ 上有意义的两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 如果对于任意 $x \in [a, b]$, 均有 $|f(x) - g(x)| \leq 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是接近的, 若函数 $y = x^2 - 3x + 4$ 与函数 $y = 2x - 3$ 在区间 $[a, b]$ 上是接近的, 则该区间可以是 _____.
15. 已知 $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & (x \leq 0), \\ f(x-1) + 1, & (x > 0), \end{cases}$ 则 $f(\frac{4}{3}) + f(-\frac{4}{3})$ 的值为 _____.
16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-e, 0) \cup (0, e]$ 上的奇函数, 当 $x \in [-e, 0)$ 时, $f(x) = ax + \ln(-x)$, 则当 $x \in (0, e]$ 时, $f(x) =$ _____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = -x^2 + 8x$, 求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值 $h(t)$.

18. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}} & x > 0, \end{cases}$ 如果 $f(x) > 1$, 求 x 的取值范围.

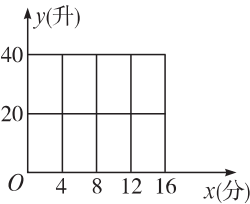
19. (本小题满分 12 分) 某种洗衣机在洗涤衣服时, 需经过进水、清洗、排水、脱水四个连续的过程. 假设进水时水量匀速增加, 清洗时水量保持不变. 已知进水时间为 4 分钟, 清洗时间为 12 分钟, 排水时间为 2 分钟, 脱水时间为 2 分钟. 洗衣机中的水量 y (升) 与时间 x (分钟) 之间的关系如下表所示:

x	0	2	4	16	16.5	17	18	...
y	0	20	40	40	29.5	20	2	...

请根据表中提供的信息解答下列问题:

(1) 试写出当 $x \in [0, 16]$ 时, y 关于 x 的函数解析式, 并画出该函数的图象;

(2) 根据排水阶段的 2 分钟点 (x, y) 的分布情况, 可选用 $y = \frac{a}{x} + b$ 或 $y = c(x - 20)^2 + d$ (其中 a, b, c, d 为常数), 作为在排水阶段的 2 分钟内水量 y 与时间 x 之间关系的模拟函数. 试分别求出这两个函数的解析式.



11. 设 $a > 0, f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为
- A. $[0, \frac{1}{a}]$ B. $[0, \frac{1}{2a}]$ C. $[0, |\frac{b}{2a}|]$ D. $[0, |\frac{b-1}{2a}|]$
12. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$. 对任意正数 a, b , 若 $a < b$, 则必有
- A. $af(b) \leq bf(a)$ B. $bf(a) \leq af(b)$ C. $af(a) \leq f(b)$ D. $bf(b) \leq f(a)$

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第Ⅱ卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

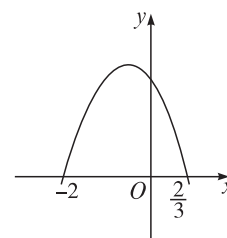
13. 若函数 $y = f(x)$ 的图象在 $x = 4$ 处的切线方程是 $y = -2x + 9$, 则 $f(4) - f'(4)$ 等于_____.
14. 已知函数 $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a 为常数), 直线 l 与函数 $f(x), g(x)$ 的图象都相切, 且 l 与函数 $f(x)$ 图象的切点的横坐标为 1, 则 a 的值为_____.
15. 若方程 $3x^4 - 4mx^3 + 1 = 0$ 没有实数根, 则实数 m 的取值范围是_____.
16. 已知在某海滨城市附近的海面上形成一台风, 据气象部门监测知其中心位于城市南偏东 45° 方向 300 km 的海面上, 若已知台风侵袭的范围为圆形区域, 且台风最外一圈的半径的变化率为定值 20 km/h, 则在 3 小时末台风侵袭的面积的变化率为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.
- (1) 求曲线在点 $P(2, 4)$ 处的切线方程;
- (2) 求曲线过点 $P(2, 4)$ 的切线方程.

18. (本小题满分 12 分) 已知向量 $i=(1,0), j=(0,1)$, 且规定 $A_x^m = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1) (x \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}^*, \text{且 } A_x^0 = 1)$, 若函数 $f(x) = aA_{x+1}^3 + 3bA_x^2 + 1 (a \neq 0, b \neq 0)$ 在 $x=1$ 时取得极值, 在 $x=2$ 处的切线的方向向量且为 $(b+5)i+5aj$.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 试证明方程 $f(x) = 6x - \frac{16}{3}$ 在区间 $(1, \frac{4}{3})$ 内有且仅有一根.

19. (本小题满分 12 分) 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 的极小值为 -8 , 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0), (\frac{2}{3}, 0)$, 如图所示.



- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若对 $x \in [-3, 3]$ 都有 $f(x) \geq m^2 - 14m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分) 函数 $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1 (x \geqslant 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 已知 $0 \leq y < x$, 求证: $e^{x-y} - 1 > \ln(x+1) - \ln(y+1)$.

21. (本小题满分 12 分) 已知抛物线 $C: y = x^2 + 4x + \frac{7}{2}$, 过 C 上一点 M , 且与 M 处的切线垂直的直线称为 C 在点 M 的法线.

(1) 若 C 在点 M 的法线的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 求点 M 的坐标 (x_0, y_0) ;

(2) 设 $P(-2, a)$ 为 C 对称轴上的一点, 在 C 上是否存在点, 使得 C 在该点的法线通过点 P ? 若有, 求出这些点, 以及 C 在这些点的法线方程; 若没有, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ (a 为常数) 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 函数 $g(x) = \lambda f(x) + \sin x$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的减函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $g(x) \leq t^2 + \lambda t + 1$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立, 求 t 的取值范围;

(3) 讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)} = x^2 - 2ex + m$ 的根的个数.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)已知 $a = (\cos 2\alpha, \sin \alpha)$, $b = (1, 2\sin \alpha - 1)$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $a \cdot b = \frac{2}{5}$.

求 $\frac{5\sqrt{2}\sin 2\alpha - 4\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)已知向量 $a = (\sqrt{3}\sin \omega x, \cos \omega x)$, $b = (\cos \omega x, \cos \omega x)$, $\omega > 0$, 又函数 $f(x) = a \cdot b$, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω ;

(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

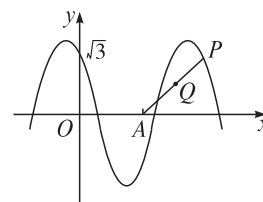
19. (本小题满分 12 分)如图, 函数 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ ($x \in \mathbf{R}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象与 y 轴交于点

$(0, \sqrt{3})$, 且在该点处切线的斜率为 -2 .

(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, 点 P 是该函数图象上一点, 点 $Q(x_0, y_0)$ 是 PA 的中点, 当 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 求 x_0 的值.



20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 2a\cos^2 x + b\sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

(1) 若 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$, 求 $f(x)$ 的增区间, 并求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时的 x 的值;

(2) 若 $x \in \mathbf{R}$, 试问: 函数 $f(x)$ 的图象经过怎样的平移才能使所得图象对应的函数成为偶函数? 举出一种方法即可.

21. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{3} S_{\triangle ABC}$ (其中 $S_{\triangle ABC}$ 为 $\triangle ABC$ 的面积).

(1) 求 $\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A$;

(2) 若 $b=2$, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=3$, 求 a .

22. (本小题满分 12 分) 若 $a = (\sqrt{3}\cos\omega x, \sin\omega x)$, $b = (\sin\omega x, 0)$, 其中 $\omega > 0$, 记函数 $f(x) = (a+b) \cdot b + k$.

(1) 若 $f(x)$ 图象中相邻两条对称轴间的距离不小于 $\frac{\pi}{2}$, 求 ω 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 时, $f(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的解析式.

高中全程复习优化设计·数学热点预测专项检测卷(四)

几种常见的递推数列及其应用

时间:120 分钟 满分:150 分

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2, a_2=1, a_n>0, \frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{a_{n+1}^2} (n \geq 2)$, 则 a_6 等于

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=5, a_{n+2}=a_{n+1}-a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_{1\,000}$ 等于

- A. 5 B. -5 C. 1 D. -1

3. 若数列 $\{a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的首项为14, 前 n 项的和为 S_n , 点 (a_n, a_{n+1}) 在直线 $x-y-2=0$ 上, 那么下列说法正确的是

- A. 当且仅当 $n=1$ 时, S_n 最小
B. 当且仅当 $n=8$ 时, S_n 最大
C. 当且仅当 $n=7$ 或 8 时, S_n 最大
D. S_n 有最小值, 无最大值

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{an}{bn+1}$, 其中 a, b 均为正常数, 那么 a_n 与 a_{n+1} 的大小关系是

- A. $a_n > a_{n+1}$ B. $a_n < a_{n+1}$
C. $a_n = a_{n+1}$ D. 与 n 的取值相关

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 a_{56} 的值为

- A. 0 B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1, a_2-a_1, a_3-a_2, \dots, a_n-a_{n-1}, \dots$ 是首项为1, 公比为3的等比数列, 则 a_n 等于

- A. $\frac{3^n+1}{2}$ B. $\frac{3^n+3}{2}$ C. $\frac{3^n-1}{2}$ D. $\frac{3^n-3}{2}$

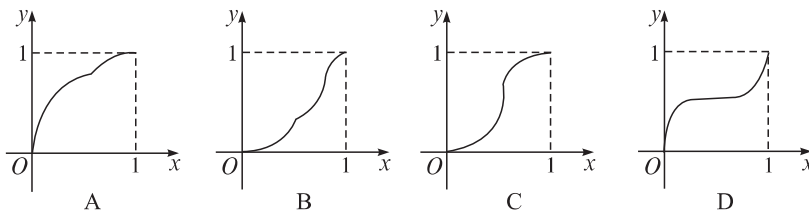
7. 设函数 $f(x)$ 定义如下表, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=5$, 且对任意的自然数 n 均有 $x_{n+1}=f(x_n)$, 则 $x_{2\,008}$ 等于

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 5

8. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=5 \cdot (\frac{2}{5})^{2n-2}-4 \cdot (\frac{2}{5})^{n-1}$, 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第 x 项, 最小项为第 y 项, 则 $x+y$ 等于

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

9. 一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则该函数的图象是

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_2=10, S_5=55$, 则过点 $P(n, a_n)$ 和 $Q(n+2, a_{n+2}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 的直线的一个方向向量的坐标可能是
- A. $(2, \frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, -2)$ C. $(-\frac{1}{2}, -1)$ D. $(-1, -1)$
11. 数列 $\{a_n\}$ 中, 相邻两项 a_n, a_{n+1} 是函数 $y=x^2+3nx+b_n$ 的两个零点, 已知 $a_{10}=-17$, 则 b_{51} 的值为
- A. 5 800 B. 5 840 C. 5 860 D. 6 000
12. 已知 $f(1,1)=1, f(m,n) \in \mathbf{N}^* (m,n \in \mathbf{N}^*)$, 且对任意 $m,n \in \mathbf{N}^*$ 都有 ① $f(m,n+1)=f(m,n)+2$; ② $f(m+1,1)=2f(m,1)$. 则 $f(2\ 007, 2\ 008)$ 的值为
- A. $2^{2\ 006}+2\ 007$ B. $2^{2\ 007}+2\ 007$ C. $2^{2\ 006}+4\ 014$ D. $2^{2\ 007}+4\ 014$

答 题 栏

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第Ⅱ卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上)

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3(n \geq 1)$, 则该数列的通项 $a_n=$ _____.
14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0, a_{n+1}=a_n+2n$, 那么 $a_{2\ 008}$ 的值是_____.
15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=\frac{na_n}{n+1-a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 99 项和等于_____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=n^2 a_n$, 有 $a_1=\frac{2\ 009}{2}$, 则 $a_{2\ 008}=$ _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知一次函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x-y=0$ 对称的图象为 C , 且 $f[f(1)]=-1$. 若点 $(n, \frac{a_{n+1}}{a_n}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在曲线 C 上, 并有 $a_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}=1 (n \geq 2)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式及曲线 C 的方程;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对任意正整数 n 都有 $2S_n = (n+2)a_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $T_n = \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+2}}$, 且 $T_n < m$ 恒成立, 求 m 的最小值.

19. (本小题满分 12 分) 从原点出发的某质点 M , 按向量 $a = (0, 1)$ 移动的概率为 $\frac{2}{3}$, 按向量 $b = (0, 2)$ 移动的概率为 $\frac{1}{3}$,

设点 M 可达到点 $(0, n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) 的概率为 P_n .

(1) 求 P_1 和 P_2 的值;

(2) 求证: $P_{n+2} - P_{n+1} = -\frac{1}{3}(P_{n+1} - P_n)$;

(3) 求 P_n 的表达式.

20. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \in (0, 1)$, $a_n = \frac{3 - a_{n-1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \cdots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \sqrt{3 - 2a_n}$, 证明 $b_n < b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.

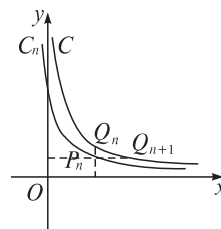
21. (本小题满分 12 分) 如图所示, 已知曲线 $C: y = \frac{1}{x}$, $C_n: y = \frac{1}{x+2^{-n}} (n \in \mathbb{N}^*)$. 从 C 上的点

$Q_n(x_n, y_n)$ 作 x 轴的垂线, 交 C_n 于点 P_n , 再从点 P_n 作 y 轴的垂线, 交 C 于点 $Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$,

(1) 求 Q_1, Q_2 的坐标;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 记数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n < \frac{1}{3}$.



22. (本小题满分 12 分) 容器中有浓度为 5% 的盐水溶液 4 kg, 第一次操作如下: 将容器中加入浓度为 1% 的盐水溶液 1 kg, 混合均匀得到浓度为 $a_1\%$ 的盐水溶液; 第二次操作如下: 再将容器中的溶液倒出 1 kg, 再加入浓度为 1% 的盐水溶液 1 kg, 混合均匀得到浓度为 $a_2\%$ 的盐水溶液. 如此反复进行下去, 设第 n 次 ($n \in \mathbb{N}^*$) 操作后得到的溶液浓度为 $a_n\%$, 求 a_n 的表达式.

