

专题一 摇与向量的交汇和综合应用



教学总体思路

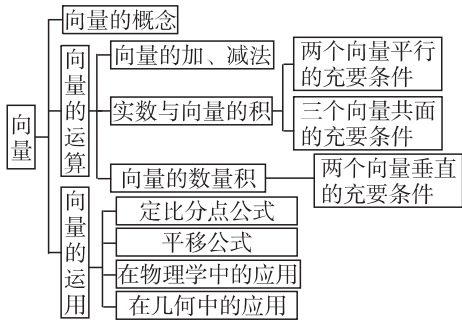
向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一,它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具,有着极其丰富的实际背景,它既反映了现实世界的数量关系,又体现了几何图形的位置关系,具有代数形式和几何形式的“双重性”,将数和形有机地结合起来,成为中学数学知识网络的一个交汇点.因此以向量的相关知识为载体,以数形转化思想为主线,在知识网络交汇点处设计创新力度大、综合性强的问题,有效沟通知识间的横向联系,促成知识网络的构建,培养学生的综合能力和数学素养.特别是在处理三角函数、立体几何、解析几何的有关度量、角度、平行、垂直、共线等问题时,运用向量知识,可以使几何问题直观化、符号化、数量化,从而把“定性”研究推向“定量”研究.

高考动态分析

向量是高中数学新教材的一个标志内容,从近几年的高考新课程卷来看,对向量的考查力度在逐年加大.除了直接考查向量外,将向量与解析几何、向量与三角、向量与立体几何等内容相结合,在知识交汇点处命题,既是当今高考的热点,又是重点.因此,研究向量与其他内容的综合运用,对培养学生的能力(尤其是培养学生从学科整体的高度解决问题的综合能力),把握当今高考命题改革趋势,有着重要的意义.



知识网络



重点归纳

一、向量的基本知识

1. 向量的概念

向量是区别于数量的一种量,它由大小和方向两个因素确定.向量有三种表示法:一是用有向线段来表示;二是用字母 $\vec{a}$ 或 $\vec{AB}$ 来表示;三是用坐标 (x, y) 来表示.注意共线向量(也称平行向量,方向相同或相反的向量)与相等向量(方向相同且模相等)的联系与区别.

2. 向量的运算

向量的运算有加法、减法、数乘向量和向量的数量积四种.注意前三种向量运算的几何表示和四种运算的坐标表示、运算律.

3. 向量的定理及相关性质

(1) 两个非零向量平行的充要条件

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$,

则 $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (当 $x_1 \neq 0$ 时).

(2) 两个非零向量垂直的充要条件

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$,

则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

4. 向量基本定理

① 平面向量的基本定理:如果有 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\vec{a}$,有且只有一对实数 λ_1, λ_2 使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

② 空间向量的基本定理:如果三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 不共面,那么对空间任一向量 $\vec{a}$,存在唯一的有序实数组 x, y, z 使 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

5. 共线与共面定理

① 三点共线定理:平面上三点 A, B, C 共线的充要条件是:存在实数 α, β ,使 $\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$,其中 $\alpha + \beta = 1$.
② 空间中有四个点 A, B, C, D 共面的充要条件是:存在实数 x, y, z 使 $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$,其中 $x + y + z = 1$.

6. 常用公式及结论

(1) 向量模的公式

设 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) 两点间的距离公式

此部分内容见学生用书文科第 105 页,理科第 106 页



设 $P(x, y)$ 为线段 AB 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 P 的坐标为 (x, y) , 其中 $\lambda = \frac{AP}{PB}$ (狼线段的定比分点坐标公式)

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$$

其中 $\lambda = \frac{AP}{PB}$, $\lambda = \frac{AP}{PB}$, $\lambda = \frac{AP}{PB}$, 其中 $\lambda = \frac{AP}{PB}$

(源中点坐标公式)

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \end{cases} \text{ 或 } \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2},$$

其中 P 是线段 AB 的中点, 其中 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$, 其中 $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$

(缘两向量的夹角公式)

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

其中 $0 \leq \theta \leq \pi$, 其中 $\theta = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|}$, 其中 $\theta = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|}$

(远图形平移公式)

若点 $P(x, y)$ 按向量 $\overrightarrow{a} = (a, b)$ 平移至 $P'(x', y')$, 则 $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$

(苑有关向量模的常用结论)

- ① $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$;
- ② $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|$, $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| \geq ||\overrightarrow{a}| - |\overrightarrow{b}||$;
- ③ $|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|$, $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \sin \theta$.

摇摇二、向量学科内综合运用

录平面向量与函数、不等式、三角函数、数列的综合运用

当平面向量给出的形式中含有未知数时, 由向量平行或垂直的充要条件可以得到关于该未知数的关系式, 在此基础上, 可以设计出有关函数、不等式、三角函数、数列的综合问题, 此类题的解题思路是转化为代数运算, 其转化途径主要有两种:

- (员) 利用向量平行或垂直的充要条件;
- (圆) 利用向量数量积的公式和性质.

圆平面向量与解析几何的综合运用

由于向量既能体现“形”的直观位置特征, 又具有“数”的良好运算性质, 是数形结合与转换的桥梁和纽带, 解析几何也具有数形结合与转换的特征, 所以在向量与解析几何知识的交汇处设计试题, 已逐渐成为高考命题的一个新的亮点.

平面向量与解析几何的结合通常涉及到夹角、平行、垂直、共线、轨迹等问题的处理, 解决此类问题的基本思路是将几何问题坐标化、符号化、数量化, 从而将推理转化为运算, 或者考虑向量运算的几何意义, 利用其几何意义解决有关问题, 主要包括以下三种题型:

- (员) 运用向量共线的充要条件处理解析几何中有关平行、共线等问题;
- (圆) 运用向量的数量积处理解析几何中有关长度、角度、垂直等问题;
- (猿) 运用平面向量综合知识, 探求动点轨迹方程, 还可再进一步探求曲线的性质.

猿空间向量和立体几何知识的整合

用向量知识解证立体几何问题, 常常比用几何法简便, 其优点在于: 向量可以使立体几何问题代数化, 简单的代数运算取代了复杂的几何证明, 解题的方向明确, 可避免作辅助线及运算繁多的定理、公理等进行推理的思维过程, 在立体几何中求空间角、空间距离及处理垂直关系显得尤为方便.



案例员

摇摇 圆国近全国高考卷 II 员苑 已知向量 $\overrightarrow{a} = (1, 0)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1)$

(泽) 员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员, 泽越员

(员) 若 泽 遭 求 θ ;

(圆) 求 泽 遭 的最大值

解析: (员) 若 泽 遭 则 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭

由此得 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭

亦 θ 越 泽 遭

(圆) 由 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|}$$

当 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭 泽 遭



即当 θ 越 $\frac{\pi}{2}$ 时, 源的最大值为 $\sqrt{2}$ 源

说明 本题主要是依托平面向量的模、数量积等知识,通过形与数的相互转化,实现与三角函数的有机结合,使试题的考查力度加大、综合能力增强。

案例圆

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，其中向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是 n 维向量， $f(\mathbf{x})$ 在 $[a, b]$ 上连续， $f(\mathbf{x})$ 在 $[a, b]$ 上可微。

(员若枣曾越员原猿且曾 $\in$ [原 $\frac{\pi}{猿}$, $\frac{\pi}{猿}$])求曾

(圆)若函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象按向量 $\vec{a}$ 平移

(皂炆(漑漑的 $\frac{\pi}{\text{圆}}$)平移后得到函数 赠越零曾的图
象,求实数皂炆的值援

解析 (1) 依题设得 枣曾 越圆 麟曾垣猿蚤圆曾越
员垣圆(曾垣 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$)援

由 $\frac{\pi}{\text{远}} \text{越原猿}$ 得 $\frac{\pi}{\text{远}} \text{越原猿}$

疫原 $\frac{\pi}{猿} \leq \frac{\pi}{猿}$ 亦原 $\frac{\pi}{圆} \leq \frac{\pi}{圆}$ 增 $\frac{\pi}{远} \leq \frac{\pi}{远}$ 缘援

亦圓曾垣 $\frac{\pi}{\text{远}}$ 越原 $\frac{\pi}{\text{猿}}$,即 曾越原 $\frac{\pi}{\text{源}}$ 援

(圆)函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 的图象按向量 $\vec{a} = (\frac{\pi}{2}, 0)$ 平移后得到函数 $y = \sin(x)$ 的图象,即函数 $y = \sin(x)$ 的图象按

由(员得 枣曾 越圆蓬圆 曾垣 $\frac{\pi}{\text{圆}}$)垣援

疫漚漚約 $\frac{\pi}{\text{圓}}$ 亦皂越原 $\frac{\pi}{\text{圓}}$ 炆越爰

说明 本题主要考查平面向量的概念和计算、平移公式以及三角函数的恒等变换等基本技能。

(员把函数的图象 悦按向量平移 , 可以看成是 悦上任一点按向量平移 , 由这些点平移后的对应点所组成的图象是 悦乙明确了以上点的平移与整体图象平移间的这种关系 , 也就找到了此问题的解题途径援

(圆)一般地,函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\vec{a}$ 平移后的函数解析式为 $y=f(x-a)$.

案例猿

已知 $\vec{e}_1$ 是 z 轴正方向的单位向量, 设 $\vec{e}_2$ 是 xy 平面内与 x 轴正向成 45° 角的单位向量, 则 $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ 是 ()

(员)求点 孕 曾 赠 的轨迹 悦 的方程 ;

(圆)如果过点 $P(x_0, y_0)$ 且方向向量为 $\vec{v} = (a, b)$,

员的直线造与点孕的轨迹交于粤月两点,当 $\triangle$ 粤月的面积取到最大值时,求皂的值援

解析：(1)疫葬越(曾原)猿蚤可歸豐越(曾旦)猿蚤旦
 曠且(遼遼)可謂生原

亦点孕曾赠到点(√猿园)、(原猿园)的距离之和为源数点孕的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(圆设粤曾,赠)、月曾,赠),依题意直线粤的方程为 赠越曾垣皂,代入椭圆方程,得 缘曾垣愿曾垣皂原皂原越园,则 曾垣曾 越原缘曾,曾曾越

源(皂原)援

因此杂_{△零月}越员圆灣月壹越圆缘√(缘原皂)皂≤圆缘

$$\sqrt{\left(\frac{\text{缘原皂埋皂}}{\text{圆}}\right)^{\text{圆}}} \text{越员故当 缘原皂}^{\text{圆}} \text{越皂}^{\text{圆}}, \text{即 皂越依}$$

圆时杂援

说明：此题可进行如下变式：

〔变式 1〕已知 $\vec{a}$ 是 曾赠 由正方向的单位向量, 设 葬越 (曾原 猿) 蚤可 露越 (曾垣 猿) 蚤可 露且满足 渣葬源渣渣葬查垣圆, 求点 孕 曾赠 的轨迹 悦的方程援

(提示: 轨迹为双曲线)

[变式 1] 已知 $\vec{a}$ 是 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的单位向量, 设 $\vec{a} = x\vec{b}$, 求 x 的值.

(提示:设 $\sqrt{a}$ 为 $\sqrt{a}$ 的平方根, $\sqrt{a}$ 为 $\sqrt{a}$ 的平方根, 则 $\sqrt{a}$ 表示 $\sqrt{a}$ 在 $\sqrt{a}$ 轴上的射影, 即点 $\sqrt{a}$ 到 $\sqrt{a}$ 的距离, 所以点 $\sqrt{a}$ 到点 $\sqrt{a}$ 的距离与到定直线 $\sqrt{a}$ 的距离比为 $\sqrt{a}$, 故点 $\sqrt{a}$ 的轨迹是以 $(\sqrt{a})$ 为焦点, 以 $\sqrt{a}$ 为准线的抛物线)

[变式 1] 已知 $\vec{a}$ 是沿 x 轴正方向的单位向量, 设 $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, 求 $\vec{r}$ 的轨迹方程.

(提示: 设 $\sqrt{\lambda}$ 原猿园、云 $(\sqrt{\lambda}$ 猿园) 则遭蚤表示 $\sqrt{\lambda}$ 在曾轴上的射影, 即点孕到曾越原猿的距离, 所以点孕到定点云的距离与到定直线曾越原猿的距离比为 $\frac{\sqrt{\lambda} \text{ 猿}}{\sqrt{\lambda}}$, 当 $\lambda \approx 1$ 时, 点孕的轨迹是以 $(\sqrt{\lambda}$ 猿园) 为焦点, 以曾越原猿为相应准线的椭圆; 当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, 点孕的轨迹是以 $(\sqrt{\lambda}$ 猿园) 为焦点,

以 $\sqrt{c}$ 为相应准线的双曲线的右支;若想得到双曲线的双支, λ 应满足什么条件?)

[变式 1] 已知平面上两定点 A, B 为一动点 P 满足 $|PA| + |PB| = 2a$ 求点 P 的轨迹



轨迹 悦的方程援

(提示 以 云为焦点 过 运且垂直于 运的直线为准线的抛物线)

[变式 员缘]已知平面上两定点 运 云孕为一动点 满足 运孕 运越 云孕 求点 孕 曾赠的轨迹 悦的方程援

(提示 以 云为焦点 过 运且垂直于 运的直线为准线的圆锥曲线)

案例源

摇摇 圆园一陕西高考 圆一 如图 员-员 三定点 粤 圆 员 月 园 原 员 悦 原 圆 员 ;三动点 阅 耘 酝 满足 粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援

(员)求动直线 阅 耘 斜率的变化范围 ;

(圆)求动点 酝 的轨迹方程援

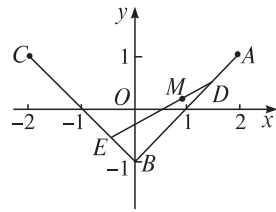


图 员-员

解析 如图 员-员 (员)设 阅 粤 赠 耘 粤 赠 酝 粤 赠 援

由 粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援 知 (粤 原 圆 赠 原 圆) 越 耘 原 圆 赠 原 圆 援

$$\text{亦 } \begin{cases} \text{粤 越 原 圆 赠 原 圆} \\ \text{赠 越 原 圆 赠 原 圆} \end{cases} \text{ 同理 } \begin{cases} \text{粤 越 原 圆 赠 原 圆} \\ \text{赠 越 原 圆 赠 原 圆} \end{cases}$$

$$\text{亦 } \frac{\text{粤 原 圆 赠 原 圆}}{\text{粤 原 圆}} = \frac{\text{赠 原 圆 赠 原 圆}}{\text{赠 原 圆}} \text{ 援}$$

$$\text{疫 赠 [园 员] 亦 } \frac{\text{粤 原 圆 赠 原 圆}}{\text{粤 原 圆}} \in [\text{原 员 员}] \text{ 援}$$

(圆)方法一 疫 阅 耘 越 耘 耘 援

$$\text{亦 } (\text{粤 原 圆 赠 原 圆} - \text{赠 原 圆 赠 原 圆}) \text{ 越 耘 原 圆 赠 原 圆} \text{ 援}$$

$$\text{亦 } \begin{cases} \text{粤 越 原 圆 赠 原 圆} \\ \text{赠 越 原 圆 赠 原 圆} \end{cases} \text{ 亦 } \frac{\text{粤}}{\text{赠}} \text{ 即 } \frac{\text{粤}}{\text{赠}} \text{ 越 原 圆 援}$$

$$\text{疫 赠 [园 员] 亦 } \frac{\text{粤}}{\text{赠}} \in [\text{原 圆 圆}] \text{ 援}$$

亦 所求轨迹方程为 粤 越 原 圆 赠 原 圆 援

方法二 :

粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援
粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援
(粤 原 圆 赠 原 圆) 越 (赠 原 圆 赠 原 圆)
粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援

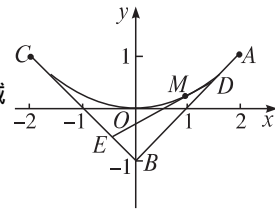


图 员-圆

粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援
粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援
(粤 原 圆 赠 原 圆) 越 (赠 原 圆 赠 原 圆)
粤 阅 粤 月 耘 阅 月 悦 酝 悦 圆 员 援

越 员 原 圆 赠 原 圆 援

越 员 原 圆 赠 原 圆 援

设 酝 点 坐标为 (粤 赠 由 粤 越 原 圆 赠 原 圆 粤 越 原 圆 赠 原 圆 得
(园 原 员) 粤 越 原 圆 赠 原 圆 (原 圆 越 原 圆 赠 原 圆)
{ 粤 越 原 圆 赠 原 圆 圆 圆 赠 原 圆 圆 圆 赠 原 圆 (原 圆 越 原 圆 赠 原 圆)
赠 越 员 原 圆 赠 原 圆 圆 圆 赠 原 圆 圆 圆 赠 原 圆 (原 圆 越 原 圆 赠 原 圆)
消去 粤 得 粤 越 原 圆 赠 原 圆 [园 员] 援

亦 粤 [原 圆 圆] 援

故 轨迹方程是 粤 越 原 圆 赠 原 圆 [原 圆 圆] 援

说明 由于向量与平面解析几何都具有数与形相结合的特性 因此通常在向量与解析几何知识的交汇处设计试题 已逐渐成为高考命题的一个新的亮点援平面向量和解析几何的结合通常涉及夹角、平行、垂直、共线、定比分点、轨迹等问题的处理 目标是将几何问题坐标化、符号化、数量化 从而将推理转化为运算援

案例缘

如图 员-猿 在棱长为 圆的正方体 粤 月 悦 阅-粤 月 悦 阅 中 耘 云 分别是棱 粤 阅 粤 月 的中点 援

(员)求异面直线 阅 耘 与 云 悦 所成的角 ;

(圆)求 月 耘 和面 耘 云 郢 月 阅 所成的角 ;

(猿)求 月 耘 到面 耘 云 郢 月 阅 的距离 援

解析 :(员)记异面直线 阅 耘 与 云 悦 所成的角为 α 援

则 α 等于向量 阅 耘 与 云 悦 的夹角或其补角 援

$$\text{亦 } \frac{\text{阅 耘} \cdot \text{云 悦}}{|\text{阅 耘}| \cdot |\text{云 悦}|} = \frac{(\text{阅 耘}) \cdot (\text{云 悦})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{(\text{阅 耘}) \cdot (\text{云 悦})}{2}$$

$$\text{越 } \frac{\text{原 圆} - \text{圆}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\text{原 圆} - \text{圆}}{2} = \frac{\text{原 圆} - \text{圆}}{2}$$

$$\text{亦 } \alpha = \frac{\text{原 圆} - \text{圆}}{2} = \frac{\text{原 圆} - \text{圆}}{2}$$

(圆)如图 员-源 建立空间坐标系 阅-粤 月 悦 阅 援

则 阅 耘 越 (员 园 圆) 援
阅 月 越 (圆 圆 园) 援

设面 耘 云 郢 月 阅 的法向量为 灶 越 (粤 赠 员) 援

$$\text{由 } \begin{cases} \text{阅 耘} \cdot \text{灶 越 园} \\ \text{阅 月} \cdot \text{灶 越 园} \end{cases}$$

得 灶 越 (原 圆 圆 员) 援

又 月 耘 越 (原 圆 圆 圆) 记 月 耘 和面 耘 云 郢 月 阅 所成

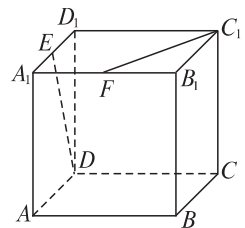


图 员-猿

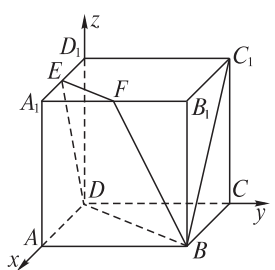


图 员-源

则泽越泽泽月脱灶渣越渣月脱灶渣越圆援

(猿点月_真到面耘_真的距离 等于向量用_真在面耘_真的法向量上的投影的绝对值，

亦越 渣 渣 越 援

自助训练

基础过关

..... (摇摇)

悦爱②③ 阅爱②③④

· (粵原粵說) 越 (粵垣粵說) · 悅自越 ^員 粵云 · 悅自 ^圓

疫孽云：悦月越园，

𦣻. 悦𦣻跃园, 则 𦣻. 𦣻悦约园, 故 $\angle$ 𦣻为钝

亦△~~粤~~说为钝角三角形掇④错援

圆梦 圆了宁高考 远

粤援^圆远 月援^猿猿 悦援^圆圆 阅援^圆猿

即 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos B$ 由余弦定理得

糴說越糶垣糶原糶越糶員糶援
糶垣糶圓糶

冬 员 缘

答案: 粵

..... (摇摇)

答案:阅

源猿 缘猿 圆猿 阅猿

云(猿园) 转化为解方程组 $\begin{cases} \text{曾垣越袁,} \\ \text{曾原越员,} \end{cases}$

亦贈越源猿，~~澹~~^圓猿播散點酤到曾軸的

距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案:悦

粤爱园 月爱园 悦爱园 阅爱园

解析:由题意知 粤月悦三点共线,则 葬垣葬_月越葬_悦

答案: 粵

图 员-远

答案: 粵

亦 θ 越 $\frac{\pi}{2}$ 援

答案： $\frac{\pi}{4}$

亦数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

● ● ● ● ●
能力提高

答案:月

由图 1-7 函数 $y = \sin(\pi x)$ 的图象与 y 轴交于点 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 可知 $\sin(\pi x) = 0$ 的解为 $x = 0$ 或 $x = 1$ 。

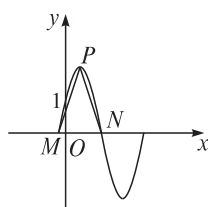


图 1-7

(员)求 φ 的值;

(圆)设 P 是图象上的最高点, N 是图象与 x 轴的交点,求 $\overrightarrow{NP}$ 与 x 轴的夹角

解析:(员)因为函数图象过点 $(0,1)$,

所以 $\sin \varphi = 1$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

因为 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(圆)由函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 及其图

象,得 $P(0,1)$, $N(\pi,0)$, 量 $\overrightarrow{NP}$

所以 $\overrightarrow{NP} = (-\pi, 1)$, $|\overrightarrow{NP}| = \sqrt{\pi^2 + 1}$

从而 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{NP} \cdot x}{|\overrightarrow{NP}| \cdot |x|} = \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$

故 $\theta = \arccos \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$

例 1 (文)已知锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$

· 摇摇

(员)求 $\sin A$ 的值;

(圆)设 $a = 1$, $b = 2$, 求 c 的值

原 $\sin A = \frac{a}{c}$, 且 $a = 1$, 求 c 的值

解析:(员)依题意, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$

亦 $\sin A = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$

亦 $\sin A = \frac{1}{c}$

亦 $\sin A = \frac{1}{c}$, $\sin B = \frac{2}{c}$

(圆) $a = 1$, $b = 2$, 求 c 的值

① $\sin A = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$

② 由①②得 $\sin A = \frac{1}{c}$, $\sin B = \frac{2}{c}$

进而得 $\sin A = \frac{1}{c}$

③ $\sin A = \frac{1}{c}$

亦 $\sin A = \frac{1}{c}$

亦 $\sin A = \frac{1}{c}$

越 $\sin A = \frac{1}{c}$

猿 $\sin A = \frac{1}{c}$

解得 $\sin A = \frac{1}{c}$

(理)如图 1-8, 在细绳韵处用水平为 F_1 的力缓慢拉起所受重力为 G 的物体, 绳子与铅垂方向的夹角为 θ , 绳子所受的拉力为 F_2 , 求:

(员) F_1 随 θ 的变化而变化的情况;

(圆)当 θ 取何值时, F_1 最小?

解析:由力的平衡,知 F_1 的大小等于 G 与 F_2 的合力的大小,但方向相反,由向量加法的平行四边形法则可作出图形,如图 1-9

(员)由力的平衡及向量加法的平行四边形法则知 $F_1 = G \sin \theta$

解直角三角形,得

$F_1 = G \sin \theta$, $F_2 = G \cos \theta$

当 θ 从 0 逐渐增大趋向于 $\frac{\pi}{2}$ 时, F_1 从 0 逐渐增大趋向于 G

趋向于无穷大,则 F_2 逐渐减小趋向于 0

当 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 逐渐增大趋向于 π 时, F_1 从 G 逐渐增大趋向于正无穷大,从而 F_2 逐渐减小趋向于 0

(圆)令 $F_1 = G \sin \theta$, $F_2 = G \cos \theta$

又 $\sin \theta \leq 1$

亦 $\sin \theta \leq 1$

探索创新

例 2 (湖北高考) 设向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 函数 $f(\theta) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

(员)求函数 $f(\theta)$ 的最大值与最小正周期;

(圆)求使不等式 $f(\theta) \geq \frac{1}{2}$ 成立的 θ 的取值集合

解析:(员)依题意, $f(\theta) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

越员垣员泽员增垣员(精员增垣员)

越 $\frac{\sqrt{r_0}}{r_0}$ 垣 $\frac{\sqrt{r_0}}{r_0}$, 豕(圆 $\frac{\pi}{源}$) ,

亦枣曾最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小正周期

是 $\frac{\pi}{\pi}$ 越 π 援

$$\frac{\text{猿}}{\text{圆}} \geq \frac{\text{猿}}{\text{圆}} \leftrightarrow \frac{\text{猿}}{\text{圆}} \sqrt{\frac{\text{圆}}{\text{圆}}} \geq \frac{\text{猿}}{\text{圆}} \sqrt{\frac{\pi}{\text{源}}} \geq \frac{\text{猿}}{\text{圆}} \leftrightarrow$$
$$H(\text{源} \rightarrow \text{噪}) \geq H(\text{源}) \rightarrow H(\text{噪}) \leq H(\text{源}) \leq H(\text{噪})$$
$$\Leftrightarrow \text{噪原} \frac{\pi}{\text{原}} \leq \text{曾} \leq \text{噪垣} \frac{\text{猿}}{\text{原}}, \text{噪在,}$$

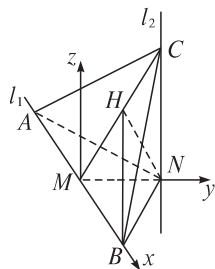
即使 $\frac{\text{零}}{\text{曾}} \geq \frac{\text{猿}}{\text{圆}}$ 成立的 曾 的取值集合是

$$\{ \text{曾} \text{噪} \text{原} \frac{\pi}{\text{愿}} \leq \text{曾} \text{噪} \text{垣} \frac{\text{猿}}{\text{愿}} \text{噪} \text{在} \text{援}$$

員鑑

(员)证明 粤脱 旱月;

解析:如图 1-18,建立空间直角坐标系



令 酝 羣 越 员 则 有 粤 原 园 园 月 员 园 园 晕
(园 员 园 援

亦造_上平面 粵_月幫亦造平行于 拙_拙拙

粤说越(员,员皂) 粤自越(员,原员园)

粵說：羣越員垣(原)垣元越元。

亦粵說上 羣月援

(圆)疫粤兑越(员员皂)月兑越(原员员皂),

亦 𣶒兌 𣶒兌 𣶒兌 𣶒兌

又已知 $\angle$ 粵月越五殺

圆媛

在砸破的圆月中，圆月越圆，可得圆月越圆。

故悦园员_√圆援

连结 酖悦作晕匀 酖悦干匀。

设 $\bar{X} \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ ($\lambda \gg 0$),

亦彙越 园员原 (原 圆) 酌兑越 园员 圆援

亦^彳鼻^厶 𠂔^𠂔悦^𠂔越^𠂔员^𠂔原^𠂔 原^𠂔圆^𠂔 越^𠂔圆^𠂔亦^𠂔入^𠂔 越^𠂔员^𠂔援^𠂔

亦匀(园, $\frac{\text{员}}{\text{猿}}$, $\frac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{猿}}$)援

可得 $\vec{r}$ 越(园, $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$, 原 $\frac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{猿}}$) 援

连结 AO , 则 $\angle AOC$ 为圆心角, $\angle AOC = 2\angle ABC$, $\angle AOC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$, $\triangle AOC$ 为等边三角形, $AO = AC = 10$ 厘米.

亦勻^勻鼻^鼻·月^月越^越垣^垣怨^怨原^原怨^怨越^越垣^垣援^援

亦彙助援

又 酖悅_h 月_h 越_h 勻_h 亦_h 勻_h 平_h 面_h 粵_h 悅_h 援_h

亦 $\angle \text{暲月}$ 为 暲月 与平面 粵月 所成的角 援

又摩越 原员园，

亦糴 暈勻越 酌 臍 潘 瀟 臺 查

源猿 越远援
越圆伊圆 越猿猿

員彙

轴分别相交于点 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ (其中 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 分别是与 $\frac{1}{2}$ 轴正半轴同方向的单位向量), 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(員)求 噪遭的值；

(圆) 当 曾满足 枣曾 跃早(曾) 时, 求函数

$\frac{\text{旱曾垣}}{\text{枣曾}}$ 的最小值援

解析：(员)由已知得 粤 原^遭 园、月 园遭，则

粵越(遭, 遭, 噪)

9

二、法向量在求线面角中的应用

原理: 设平面 β 的斜线 l 与平面 β 所成的角为 $\alpha_{\text{线}}$, 斜线 l 与平面 β 的法向量所成的角为 $\alpha_{\text{面}}$, 则 $\alpha_{\text{线}}$ 与 $\alpha_{\text{面}}$ 互余或与 $\alpha_{\text{面}}$ 的补角互余.

【例 1】如图 1-18, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 设 $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle ACD = 45^\circ$, 求异面直线 AA_1 与 BD 互相垂直.

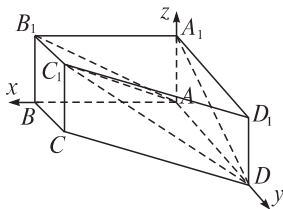


图 1-18

求证: $AA_1 \perp BD$.

(1) 求证: $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求直棱柱侧棱 AA_1 的长;

(3) 已知 AA_1 的长, 求 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角.

解析: 以 A 为原点, AB, AD, AA_1 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 设 $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, b, 0)$, $D(0, b, 0)$, $A_1(0, 0, c)$, $B_1(a, 0, c)$, $C_1(a, b, c)$, $D_1(0, b, c)$.

(1) 证明: $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

亦 $AA_1 \perp BD$.

亦 $AA_1 \perp AC$.

又 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AD$,

亦 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 设 AA_1 的长为 c , 则 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

亦 $AA_1 \perp BD$.

亦 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.

(3) 设平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

则 $\vec{n} \perp$ 平面 $ABCD$.

亦 $\vec{n} \perp BD$.

设 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 α ,

亦 $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AA_1}|}{|\vec{n}| |\vec{AA_1}|}$.

亦 $\sin \alpha = \frac{1}{1} = 1$.

取 $\vec{n} = (0, 0, 1)$, 得 $\sin \alpha = 1$.

亦 $\alpha = 90^\circ$.

又 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 设 AA_1 与平面 $ABCD$

所成的角为 α ,

则 $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AA_1}|}{|\vec{n}| |\vec{AA_1}|}$.

亦 $\sin \alpha = \frac{1}{1} = 1$.

亦 $\alpha = 90^\circ$.

成的角为 90° .



意犹未尽



鹰之飞翔

摇摇一个人在高山之巅的鹰巢里,抓到了一只幼鹰,他把幼鹰带回家,养在鸡笼里。这只幼鹰和鸡一起啄食、嬉闹和休息。它以为自己是一只鸡。这只鹰渐渐长大,羽翼丰满。摇了,主人想把它训练成猎鹰,可是由于终日和鸡混在一起,它已经变得和鸡完全一样,根本没有飞的愿望了。主人试了各种办法,都毫无效果。最后把它带到山顶上,一把将它扔了出去。这只鹰像块石头似的,直掉下去,慌乱之中它拼命地扑打翅膀,就这样,它终于飞了起来!磨练召唤成功的力量。

← YI YOU WEI JIN



专题二 函数、不等式、数列的综合应用



教学内参

教学总体思路

函数、数列、不等式是高中代数内容的主体部分,在复习时,要注意它们之间的相互结合.数列本身就是特殊的函数,所以要培养学生善于利用函数的思想解答数列的问题.在确定函数的定义域、值域、判断函数的单调性方面,无一离开解不等式或利用不等式求最值的知识.数列也在高考中多次与不等式联系起来考查.

高考动态分析

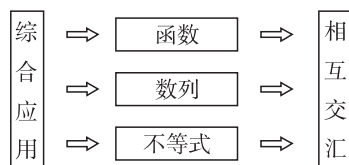
从近几年的高考看,这三部分内容在每年的高考中直接考查比例都在 $\frac{1}{3}$ 左右,题型主要为:源个小题、圆个大题,试题主要以中档和高档题为主,综合性强、难度较大,常常以压轴题的形式出现.

例如:(全国高考卷Ⅱ)第源题是圆题,都是对该部分的考查.估计在以后的高考中仍会稳定在这个比例,但是函数的思想和不等式的解法渗透在很多题目中,所以应加强复习.



核心聚焦

知识网络



重点归纳

摇摇一、函数的综合运用主要是指综合运用函数的知识、思想和方法解决问题.近年来,高考试题中经常在函数与其他方面知识的交汇点编制试题.这样的试题通常以中、高档题的形式出现.对函数以及函数思想方法应用的考查是数学高考的一大热点和亮点.解函数综合题首先要仔细审题,弄清题意,然后把握问题的本质,展开广泛的联系,再是要运用转化和化归、分类讨论等数学思想,将一个较为复杂的问题转化为一次、二次

函数的问题加以解决.解函数综合问题,还必须加强对向量、导数等新增内容与函数的交汇问题的剖析和训练,熟练掌握用导数的工具来研究函数的有关性质,因为这将是高考考查的一个新的着眼点.

二、数列是一类定义在正整数集或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 上的特殊函数,可见,任何数列问题都蕴涵着函数的本质及意义.具有函数的一些固有特征.另外,数列与函数的综合也是当今高考命题的重点和热点,因此我们在解决数列问题时,应充分利用函数有关知识,以它的概念、图象、性质为纽带,架起函数与数列间的桥梁,揭示了它们间的内在联系,从而有效地分解数列问题.数列是函数概念的继续和延伸,它是定义在自然数集或它的子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 上的函数.对于等差数列而言,可以把它看作自然数 n 的“一次函数”,前 n 项和是自然数 n 的“二次函数”.等比数列可看作自然数 n 的“指数函数”.因此,学过数列后,一方面对函数概念加深了解,拓宽了学生的知识范围;另一方面也为今后学习高等数学中有关级数的知识和解决现实生活中的一些实际问题打下了基础.

员关于等差数列 $\{a_n\}$

(员)通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 可以写成 $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$.

它是 n 的一次函数,以 (n, a_n) 为坐标的一群离散点均匀地分布在直线上.

公差 $d = \frac{a_n - a_{n-1}}{n - (n-1)}$ 是相应直线的斜率.当 $d > 0$ 时,数列递增;当 $d < 0$ 时,数列递减;当 $d = 0$ 时, $\{a_n\}$ 为常数数列.

(圆)求和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 可以写成 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (\frac{a_1 - d}{2})n$.

它是 n 的二次函数(缺常数项),它的图象是过原点的抛物线上的一群孤立点.

从函数的角度理解, $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (\frac{a_1 - d}{2})n$ 变形为 $S_n = \frac{d}{2}(\frac{n}{1})^2 + (\frac{a_1 - d}{2})\frac{n}{1}$.当 $d \neq 0$ 时, S_n 是关于 n 的二次式,且常数项为零.此时,可以应用相应二次函数的图象了解 S_n 的增减变化及最值等.

此部分内容见学生用书文科第 圆页,理科第 圆页.

13

14

$\varphi \cap \mu \neq \emptyset \Leftrightarrow \varphi \text{ 约 } \mu \Rightarrow \varphi \text{ 垣 } \sqrt{\varphi \text{ 垣 } \mu} \text{ 约 } \mu$
 $\mu \Rightarrow \varphi \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

于是实数 μ 的取值范围是 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 }) \cup (\frac{\mu}{\varphi}, \frac{\mu}{\varphi})$

设函数 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$)

(φ) 若 $\mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 解不等式 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$
 (μ) 若 $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$ 在 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$ 上恒成立, 求 μ 的范围

解析: (φ) $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \\ \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \\ \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \\ \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \\ \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

亦 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 的解集为 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$

$$(\mu) \varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$$

$\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$
 令 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$) $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu$),

则 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$) $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu$)

由 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 得 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

亦当 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 时, $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 在 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$ 上单调递减;

当 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 时, $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 在 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$ 上单调递增

亦当 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 时, 恒有 $\varphi \text{ 垣 } \mu \geq \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu$)

亦当 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 时, 恒有 $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$

亦使 $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$ 在 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$ 上恒成立的 μ 的取值范围是 $(\varphi \text{ 垣 }, \varphi \text{ 垣 })$

探索创新

已知二次函数 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 的图象经过坐标原点, 其导数为 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 数列 $\{\mu\}$ 的前 μ 项和为 μ 点 $(\mu \text{ 垣 }, \mu \text{ 垣 })$ 均在函数 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\varphi \text{ 垣 } \mu$) 的图象上

(φ) 求数列 $\{\mu\}$ 的通项公式;

(μ) 设 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$, μ 是数列 $\{\mu\}$ 的前 μ 项和

和, 求使得 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 对所有 $\mu \text{ 垣 } \mu$ 都成立

的最小正整数 μ

解析: (φ) 依题意, 设这二次函数 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 则 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

又由于 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 得 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

所以 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

又因为点 $(\mu \text{ 垣 }, \mu \text{ 垣 })$ 均在函数 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 的图象上,

所以 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 当 $\mu \text{ 垣 } \mu$ 时,

$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$) $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$)

当 $\mu \text{ 垣 } \mu$ 时, $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$)

所以 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ ($\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu$)

(μ) 由 (φ) 得

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

故 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

$$(\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 垣 } \mu) \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

因此, 使得 $\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$ 成立的

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

$$\mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$$

故满足要求的最小正整数 μ 为 μ

教学反思

数学思维的反思性

一、概述

数学思维的反思性表现在思维活动中善于提出独立见解, 精细地检查思维过程, 不盲从、不轻信, 在解决问题时能不断地验证所拟定的假设, 获得独特的解决问题的方法, 它和创造性思维存在着高度相关性. 本讲重点加强学生思维的严密性的训练, 培养他们的创造性思维.

二、思维训练实例

【例 φ] 已知 $\varphi \text{ 垣 } \mu \text{ 跃 } \frac{\mu}{\varphi}$, 若 $\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$

求 $\mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi}$ 的范围

错误解法: 由条件得

$$\varphi \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \quad (1)$$

$$\mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \Leftrightarrow \mu \text{ 垣 } \mu \leq \frac{\mu}{\varphi} \quad (2)$$