图书在版编目（CIP）数据

高中快车道·同步辅导训练 高二·数学·上册/马昌安主编．—北京：机械工业出版社，2003.7

ISBN 7-111-01057-4

Ⅰ．高… Ⅱ．马… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 055863 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：李卫东 责任编辑：任淑杰
封面设计：鞠 杨 责任印制：
印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷
890mm×1240mm 1/16·10.25 印张·358 千字
定价：13.00 元

内 容 特 色

正确处理听课与做课堂笔记的矛盾，是学生提高学习效率的诀窍之一。本丛书将名师摘记的课堂教学要点和心得荟萃成“课堂札记”，不但可以解除学生做课堂笔记之苦，而且有助于提高学生学习效率。

明确知识的重点、难点、高考热点和拓展考点空间，掌握规律、方法和技巧，是学生提高学习效率的又一诀窍。丛书“课堂札记”中的“要点与焦点”栏目，将知识要点、重点、难点、高考热点一目了然地展示出来；“拓展与点悟”栏目，围绕高考要求，拓展考点空间，揭示知识规律，点悟学习窍门；“举一反三”栏目，选解典型考题，指引解题思路，归纳解题方法，点拨解题技巧，总结解题规律，示范解题格式。以上栏目都以教学课时内容或节（课）内容为单位设置编写，它将使学生学习得快，把握得准，领悟得好，运用得巧。

丛书的“课后练习”分“基础题”、“综合题”和“创新（开放、探究）题”，“单元测试题”分“基本分题组”、“前茅分题组”和“状元分题组”，均体现新课程理念，强调联系现实生活、学生经验、实际应用，突出对学生开放性、探究性、创新精神和实践能力的培养，符合素质教育要求，紧跟高考新形势。

由于该丛书集独创性、科学性、适应性、实用性和高效性于一体，从而赢得了“黄金教辅”的美誉。

高中快车道·同步辅导训练编写组
2003 年 6 月

目　录

第六章　不　等　式

第 1 课时　6.1 不等式的性质(一)

课堂札记

学生补白

要点与焦点

不等式 → 比较两个实数的大小

同向不等式：如：$x>3$ 与 $a^2+1>2a-2$

异向不等式：如：$m>n$ 与 $x-1<2x-3$

比较法(高考热点)

作商比较(难点)

$B>0$ 且 $\frac{A}{B}\geq 1$ □ $A\geq B$

$B>0$ 且 $\frac{A}{B}\leq 1$ □ $A\leq B$

(多在证明题中出现)

作差比较(难点)

$a-b\geq 0$ □ $a\geq b$

$a-b\leq 0$ □ $a\leq b$

拓展与点悟

1. 比较法使用技巧是：作差(或作商)、通分相加、分解因式、配方、分子或分母有理化、对数运算等。

①假若是两个多项式比较大小，其模式是：作差→分组分解因式→配方→与 0 比较大小，如：当 $x\geqslant 1$ 时，比较 $2x^3+5x$ 与 $4x^2+3$ 的大小. 其比较方法是：$(2x^3+5x)-(4x^2+3)=2x^2(x-1)-2x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(2x^2-2x+3)=(x-1)[(x-1)^2+x^2+2]$ (*). 显然 $x-1\geqslant 0$，$(x-1)^2+x^2+2\geqslant 2>0$，则(*)$\geqslant 0$. 故 $2x^3+5x\geqslant 4x^2+3$.

②假若是两个无理式比较大小，其模式是：作差→分子有理化→分解因式→配方→与 0 比较 大小. 如：当 $x\leqslant -2$ 时，比较$\sqrt{2x^2-x}$与$\sqrt{x^2+x-2}$的大小. 其比较方法是：

$$\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{x^2+x-2}=\frac{(2x^2-x)-(x^2+x-2)}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$=\frac{x^2-2x+2}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{(x-1)^2+1}{\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}}>0.$$

故 $\sqrt{2x^2-x}>\sqrt{x^2+x-2}$.

③假若是两个对数式比较大小，其模式是：作差→对数运算→分解因式→配方→利用对数函数的单调性判断所得的差与 0 的大小(注：必要时对字母的取值范围进行分类讨论). 如：比较 $\log_a(x+1)$与 $\log_a x$ 的大小. 其比较方法是：$\log_a(x+1)-\log_a x=\log_a\frac{x+1}{x}=\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$. 显然 $x>0$，则 $1+\frac{1}{x}>1$，当 $a>1$ 时，$\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$，则 $\log_a(x+1)>\log_a x$. 当 $0<a<1$ 时，$\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)<0$，则 $\log_a(x+1)<\log_a x$.

④假若是两个分式比较大小，其模式是：作差(或作商)→通分相加→分解因式→配方→

与 0(或 1)比较大小.

⑤假若是两个幂式比较大小,其模式是:作商→指数运算→分解因式→配方→用指数函数的单调性判断所得的差与 1 的大小(注:必要时对字母的取值范围进行分类讨论).

2. 在判断差(或商)与 0(或 1)的大小时必须对字母的取值范围进行讨论.

学生补白

举一反三

【例 1】若 $1<K<3$,且 $S=3K^2-2K-2$, $T=2K^2+2K-5$,试比较 S 与 T 的大小.

分析:比较两个多项式的大小,一般使用作差比较法,作差→分解因式→配方→判断与 0 的大小.

解:∵ $1<K<3$,

∴ $K-1>0$, $K-3<0$,

∴ $(K-)(K-3)<0$,

又 $S-T=(3K^2-2K-2)-(2K^2+2K-5)$

$=K^2-4K+3$

$=(K-1)(K-3)<0$.

∴ $S<T$.

小结:1. 两个多项式比较大小是本节的基础内容,我们必须熟练掌握.

2. 多项式的运算涉及到初中的知识,如合并同类项、因式分解、提公因式、十字相乘法等.

3. 常用公式有:$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

【例 2】证明函数 $f(x)=-2x^3+5$ 在 R 上是减函数.

分析:证明单凋性,显然用单调性的定义.

证明:任取 x_1、x_2,且 $-\infty<x_1<x_2<\infty$,

$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1^3+5)-(-2x_2^3+5)$

$=-2x_1^3+2x_2^3$

$=2(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)$

$=2(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\dfrac{x_1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_1^2\right]$

∵ $x_2>x_1$, ∴ $x_2-x_1>0$,

又 $\left(x_2+\dfrac{x_1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}{x_1}^2>0$,

∴ $f(x_1)>f(x_2)$,

∴ $f(x)$在 R 上是减函数.

小结:用作差法证明函数 $f(x)$的单调性,在证明过程中要善于拆项配方,这是高考热点.

【例 3】已知 $a\leqslant0$,比较式子$\dfrac{1}{1+a}$与 $1-a$ 的值的大小.

分析:考虑到 $a\neq-1$,故必然对字母 a 分类讨论.

解:(1)当 $a=0$ 时,显然$\dfrac{1}{1+a}=1-a$.

(2)当 $-1<a<0$ 时,$a+1>0$.

∴ $\dfrac{1}{1+a}-(1-a)=\dfrac{a^2}{1+a}>0$.

(3)当 $a<-1$ 时,$a+1<0$.

∴ $\dfrac{1}{1+a}-(1-a)=\dfrac{a^2}{1+a}<0$.

∴ 当 $a=0$ 时,$\dfrac{1}{1+a}=1-a$;

当 $-1<a<0$ 时,$\dfrac{1}{1+a}>1-a$;

当 $a<-1$ 时,$\dfrac{1}{1+a}<1-a$

小结:当字母的范围未确定时,必须用分类的思想,对字母 a 的不同范围进行分类讨论.

【例 4】比较 4^{66} 与 6^{44} 的大小.

解：$\frac{4^{66}}{6^{44}}=\frac{2^{66}\times 2^{66}}{2^{44}\times 3^{44}}=\frac{2^{44}\times 2^{22}\times 2^{66}}{2^{44}\times 3^{44}}=\frac{2^{88}}{3^{44}}=\frac{4^{44}}{3^{44}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{44}>1$.

小结：幂的形式的式子比较大小，一般采用作商比较法，同时运用指数函数的单调性判断商与 1 的大小.

学生补白

课后练习

基 础 题

一. 选择题

1. 若 λ,μ 是实数，则 $\lambda>\mu>0$ 是 $\lambda^2>\mu^2$ 的(　　)条件.
   (A)充分不必要　　(B)必要不充分
   (C)充要　　(D)既非充分也非必要

2. 下列各实数中恒大于 0 的一个是　　(　　)
   (A) $|u|$　　(B) $\sqrt{u^2+v^2}$
   (C) $\log_{64}\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)$　　(D) $1+\sin u$

3. 设 $M=4a^2-a-1,N=2a^2+a-4$，则 M 与 N 关系是　　(　　)
   (A) $M>N$　(B) $M<N$　(C) $M=N$　(D) $M\geqslant N$

4. 已知 $a+b>0,b<0$，则 $a,b,-a,-b$ 的大小关系为　　(　　)
   (A) $a>b>-b>-a$　　(B) $a>-b>-a>b$
   (C) $a>-b>b>-a$　　(D) $a>b>-a>-b$

5. $f(a,b)=4a^2+b^2+4a-2b$ 的值与 -2 的大小关系是　　(　　)
   (A) $f(a,b)>-2$　　(B) $f(a,b)<-2$
   (C) $f(a,b)=-2$　　(D) $f(a,b)\geqslant -2$

二、填空题

6. 已知不等式：① $x+6.5>x+4$；② $-t<1-t^2$；③ $a^2>2ab-b^2$；④ $2x^2-x+1<0$；⑤ $\log_5(x^2+1)\geqslant 0$；⑥ $0.5^{-x}<0$，其中不等式________是绝对不等式；________是条件不等式；________是矛盾不等式.

7. 若 $f(x)=x+b$，则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$________$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

8. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$________$x-4$.

9. 12^{16} ________ 16^{12}.

综 合 题

三、解答题

10. 若 $f(x,y)=x^4+y^4,g(x,y)=x^3y+xy^3$，求证 $f(x,y)$ 的值不小于 $g(x,y)$ 的值.

11. 若 $a\geqslant 2$，试比较 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a-1}-\sqrt{a-2}$ 的大小.

12. 若 $k>0,t>0$，比较 k^kt^t 与 $(kt)^{\frac{k+t}{2}}$ 的大小.

13. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $x_1,x_2\in R$，且 $x_1\neq x_2$，试研究式子 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 与 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 的大小关系.

创 新 题

14. 设满足函数 $f(x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}$ 的 x 的值的集合为 S，在 S 中定义一种运算△，使得 $x\triangle y=\frac{x+y}{1+xy}$；若 $x\in S,y\in S$，那么 $x\triangle y\in S$.

15. 设 p：$a>0$ 且 $b>a+c$；q：方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根；求证：q 是 p 的必要条件.

第 2 课时　6.1 不等式的性质(二)

课堂札记

学生补白

要点与焦点

不等式的性质

- 性质 1.(对称性):$a>b \Leftrightarrow b<a$
- 性质 2.(传递性):$a>b$ 且 $b>c \Rightarrow a>c$
- 性质 3.(可加性):$a>b \Rightarrow a+c>b+c$,同向不等式可以相加,不等号不改变方向,即 $a>b$ 且 $c>d \Rightarrow a+c>b+d$(重点、热点)
- 性质 4.(可乘性):$a>b$ 且 $c>0 \Rightarrow ac>bc$;$a>b$ 且 $c<0 \Rightarrow ac<bc$. 两边都大于 0 的两个同向不等式可以相乘,不等号方向不变. 即 $a>b>0$. 且 $c>d>0 \Rightarrow ac>bd$(难点,高考热点)

(多在选择、填空、证明题中出现)

拓展与点悟

1. 不等式的性质主要在不等式的等价变形过程中运用. 要想对不等式实施正确变形,首先必须掌握不等式的性质的成立条件. 如“性质 2”只能 $a>b$ 且 $b>c$ 时才有 $a>c$,不能 $a>b$ 且 $b<c$ 时有 $a>c$.

2. 不等式可乘性在证明不等式和解分式不等式中最易出错,原因是两边同乘以或同除以某一个数(或式子)时,没有意识去考虑所乘或所除的数是大于 0,等于 0,或小于 0. 不等号是否要改变方向. 显然若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$ 或 $a(x+5)>b(x+5)$都是错误的,因为 c^2 可能为 0,$(x+5)$可正,可负,也可能为 0.

3. 只有同向不等式才能相加或相乘,但不能相减或相除;异向不等式,不可以相加、相减或相乘;同时只有两个同向不等式两端都大于 0 的两个不等式才能相乘,不等式两端不大于 0 时必须先化成两端都大于 0,才能相乘. 显然 $a>b$ 且 $x>y$,则有 $ax>by$ 是错误的.

4. 一端大于 0、另一端小于 0 的不等式相加或相乘只能视具体情况而定.

举一反三

【例 1】若 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,则下面恒成立的不等式是(　　).

(A)$ac>bc$　　(B)$ab>ac$

(C)$a|b|>|b|c$　　(D)$ab>bc$

分析:由于 $a+b+c=0$,则 a、b、c 中必然有正有负,由 $a>b>c$ 知,则 $a>0$,$c<0$,b 可正可负,也可能为 0.

解法一:$\because$ $a+b+c=0$,且 $a>b>c$,则 $a>0$,$c<0$,又 $b>c$,$\therefore$ $ab>ac$. 故选 B.

解法二:特殊值法加排除法.

取 $a=1$,$b=0$,$c=-1$,易得 B 正确.

小结:解不等式的选择题或填空题,有三种方法:直接法、特殊值法、排除法,如果根据题目的条件能恰当选取字母所取的特殊值,再用上排除法,往往起到事半功倍的效果,比直接法来得快.

【例 2】若 $p>q$,$s>t$,$m\in R^+$,先猜测 $t-mp$ 与 $s-mq$ 的大小,再用文字符号加以推理说明.

分析:猜测可通过特殊值法来推测,再用不等式的性质来证明.

解:取 $p=2$,$q=-2$,$s=4$,$t=3$,$m=1$,则 $t-mp=3-2=1$,$s-mq=4-(-2)=6$,猜测:$t-mp<s-mq$

学生补白

证明:∵ $m\in R^{+}$,$-m\in R^{-}$

又 $p>q$,∴ $-mp<-mq$ ……①

又 $s>t$,则 $t<s$ ……②

①+②得:$t-mp<s-mq$

小结:在判断某一个结论时,首先可用不完全归纳法加以猜测,然后再用定理、性质加以证明,这是解决较复杂问题的有效方法.

【例 3】设 $60<a\leqslant 84$,$28<b\leqslant 33$,求 $2a+b$,$a-3b$ 及 $\frac{b}{a}$ 的范围.

分析:只有同向不等式才能相加,两端都大于 0 的同向不等式才能相乘.

解:∵ $60<a\leqslant 84$, ∴ $120<2a\leqslant 168$,

又 $28<b\leqslant 33$, ∴ $148<2a+b\leqslant 201$,

又 $28<b\leqslant 33$, ∴ $-99\leqslant -3b<-84$,

∴ $-39<a-3b<0$.

又 $60<a\leqslant 84$, $\frac{1}{84}\leqslant\frac{1}{a}<\frac{1}{60}$,

∴ $\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<\frac{11}{20}$.

小结:1. 正确运用不等式的性质变形;2. 对分式形的式子的范围的求解需先求出作分母的式子的倒数的范围,再用同向不等式相乘;3. 同向不等式相乘中如有一个不带等号,结果不带等号.

【例 4】设实数 A、B、C 满足等式⊛$B+C=3A^2+6-4A$,△$C-B=4-4A+A^2$,先猜测 A、B、C 的大小关系,再用文字符号推理猜测其正确性.

分析:先对 A 取某一个特殊值来猜测,然后再推理.

解:取 $A=1$,则 $B+C=5$,$C-B=1$,则 $B=2$,$C=3$,则 $C>B>A$.

证明:由△得 $C-B=(A-2)^2\geqslant 0\Rightarrow C\geqslant B$.

由⊛-△得 $B=A^2+1$.

∴ $B-A=A^2-A+1=\left(A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

∴ $B>A$, ∴ $C\geqslant B>A$.

通过推理,上述猜测不够准确,说明不完全归纳法具有一定的局限性.

小结:本题说明我们不能单一信奉特殊值法,要将不完全归纳法与普遍推理有机结合起来才最妙.

【例 5】已知 $a>b>0$,$c<d<0$,比较 $\frac{b}{a-c}$ 与 $\frac{a}{b-d}$ 的大小.

分析:首先找 $b-d$ 与 $a-c$ 的关系.

解:∵ $c<d<0$, 则 $-c>-d>0$,

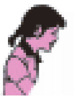
又 $a>b>0$,

∴ $a-c>b-d>0$,

∵ $\frac{1}{b-d}>\frac{1}{a-c}>0$,

∴ $\frac{a}{b-d}>\frac{b}{a-c}$, ∴ $\frac{b}{a-c}<\frac{a}{b-d}$.

小结:若用不等式性质解题,遇上有分式,先考虑分母如何尽快得到.



课后练习

基础题

一．选择题

1. 若 $a>b,c>d$，则下列各不等式中不成立的是(　　)

(A)$ac-ad>bc-bd$　　(B)$a>b-c+d$

(C)$a>b+c-d$　　(D)$ac-bc>ad-bd$

2. 当 $0<x<y<1$，下列不等式中正确的是(　　)

(A)$(1-x)^{\frac{1}{y}}>(1-x)^{y}$　　(B)$(1+x)^{x}>(1+y)^{y}$

(C)$(1-x)^{y}>(1-x)^{\frac{y}{2}}$　　(D)$(1-x)^{x}>(1-y)^{y}$

3. 对于实数 u,v,w 下列命题成立的是(　　)

(A)若 $u>v$，且 $w>v$，则 $u>w$

(B)若 $w>v$，且 $u>v$，则 $uw>vw$

(C)若 $u>v$，则 $uw>vw$

(D)若 $u>-v$，则 $w-u<w+v$

4. 角 α,β 是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内任意两个不同的角，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是(　　)

(A)$-\pi<\alpha-\beta<\pi$　　(B)$-\pi<\alpha-\beta<0$

(C)$0<|\alpha-\beta|<\pi$　　(D)$0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$

5. 若 $m>n,\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$，则(　　)

(A)$m>0,n<0$　　(B)$m>0,n>0$

(C)$m<0,n>0$　　(D)$m<0,n<0$

6. 若 $a>b$，则给出下列不等式：①$(ac)^2\geqslant(bc)^2$；②$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$；③$ac^2>bc^2$；④$\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$，则成立的有(　　)

(A)①　(B)②　(C)②③　(D)①③④

二、填空题

7. 若 $d>c,a+b=c+d,a+d<b+c$，则 a,b,c,d 的大小关系是________.

8. $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 的充分必要条件是________.

9. 若 x,y,z,w 是四个实数，且满足 $xz>0,xyw<0,xyzw>0,y+w<0$，则 x,y,z,w 各实数的正负符号是________.

10. 若 $a<b<0$，则 a^2b ______ ab^2，写出上述命题的否命题为______，其否命题为______(填：真，假).

综合题

三、解答题

11. 已知函数 $f(x)=\log_a x$，且 $x\in[a^2,a]$，试比较 $f(x^2)$，$f(\log_a x)$，$[f(x)]^2$ 的大小.

12. 已知取实数值的两个函数 $f(x),g(x)$ 满足 $|f(x)|>|g(x)|$，且 $g(x)\neq0$，试判断 $\frac{K}{f(x)}$ 与 $\frac{K}{g(x)}(K>0)$ 的大小.

13. 已知二次数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数，且图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,-t)$，若 $x=1$ 时，其函数值 $f(1)\in[-4,-1]$，当 $x=2$ 时，其函数值 $f(2)\in[-1,5]$，试证明当 $x=3$ 时的函数值 $f(3)\in[-1,20]$.

创新题

14. (1)考察 a^2+b^2+2 与 $2(a+b)$，$a^2+b^2+c^2+3$ 与 $2(a+b+c)$ 的关系，从中找出规律，说明 $a_1{}^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+n$ 与 $2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的关系(其中 $n\in N^*$)

(2)若 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 且 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边，则 $\triangle ABC$ 的形状如何？若 $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$，且 a,b,c,d 是四边形 $ABCD$ 的四边，则该四边形 $ABCD$ 的形状如何？总结规律，若 $a_1{}^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1$，且 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 是某凸 n 边形的边，则该凸 n 边形的形状如何？

15. 已知 $x_n=2+4+6+\cdots+2n,y_n=1+2+4+\cdots+2^{n-1}(n\in N^*)$. 请你猜想 x_n 与 y_n 的大小关系，不必证明(如有同学对证明有兴趣，请你自行设计证明方案，或参看数学归纳法，二项式定理等知识来寻求证明方法)，但需要用函数图象加以说明.

第 3 课时　6.1 不等式的性质(三)

课堂札记

学生补白

要点与焦点

不等式性质

性质 4：若 $a>b$ 且 $c>0\Rightarrow ac>bc$；
若 $a>b$ 且 $c<0\Rightarrow ac<bc$(可乘性)
推论 1. $a>b>0$ 且 $c>d>0\Rightarrow ac>db$；
2. $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$($n\in N$ 且 $n>1$)
(重点、高考热点)

性质 5：
$a>b>0\Rightarrow$
$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in N$ 且 $n>1$)
(难点、高考热点)

$a>b\Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}$($n\in N$)
或 $a>b>0$ 且 $d>c>0\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

反证法：步聚①反设结论不成立
②由假设出发推出矛盾
(高考热点)　③由矛盾判断结论不成立

(多在选择题、填空题、计算题出现)

拓展与点悟

1. 运用性质 4 和性质 5 时，要加倍注意不等式成立的条件，在变形过程中一定要考虑已知条件中的式子或字母是大于 0，等于 0，还是小于 0，如：模式 1：不等式的两端同时乘以一个正数，不等式的不等号不改变方向. 模式 2：不等式的两端同时乘以一个负数，不等式的不等号改变方向. 模式 3：不等式的两端不能同时乘以一个为 0 的数. 模式 4：不等式的两端都大于零的两个不等式相乘，所得不等式的不等号不改变方向. 在已知条件没有具备运用性质 4 和性质 5 的条件时，必须先把不等式进行等价变形，变成具备性质 4 和 5 的条件时，再用这两个性质，如：$a<b<0$ 且 $c<d<0$，则将它们变为 $-a>-b>0$ 且 $-c>-d>0$ 时才能用性质 4 得到 $ac>bd$. 特别在分式不等式的变形过程中尤为注意. 如：若 $\frac{m^2}{2m+3}<1$，则 $m^2<2m+3$ 显然是错误的，因 $2m+3$ 可能取负值.

2. 反证法可用在各种题型中，反设结论要注意如下情形：①$a>b$ 的反面是 $a\leqslant b$；②对于 $[m,n]$中任意 x 总有 $f(x)<0$ 恒成立，反面则是：在$[m,n]$中存在一个 x_0 使得 $f(x_0)\geqslant 0$ 成立. ③“至少有一个”的反面是：“没有一个”等.

举一反三

【例 1】下列命题：①若 $x>y$，且 x 与 y 同号，则 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$；②若 $\frac{1}{x}>1$，则 $x<1$；③$x\geqslant y$，$xz\geqslant yz$，则 $z\geqslant 0$；④若 $x>y$，$n\in N$，则 $x^{2n+1}>y^{2n+1}$，其中真命题的个数为(　　)

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

分析：根据已知条件考虑所出现的式子的正负号或者是为 0.

解：①∵ $xy>0$ 则 $\frac{1}{xy}>0$，又 $x>y$，则 $\frac{x}{xy}>\frac{y}{xy}\Rightarrow\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ 则①为真.

②由$\frac{1}{x}>1$知$x>0$与$x<1$不相符，则②为假.

③$xz\geqslant yz$，即$z(x-y)\geqslant 0$，显然$z\geqslant 0$或$x-y\geqslant 0$，当$x-y=0$时，z可取任意实数，故③为假.

④由$x>y$知，x、y、0之间有三种可能性，即$x>y\geqslant 0$，$x\geqslant 0>y$，$0\geqslant x>y$，当$x>y\geqslant 0$时由性质4有$x^{2n+1}>y^{2n+1}$，当$x\geqslant 0>y$，显然有$x^{2n+1}>y^{2n+1}$，当$0\geqslant x>y$时，$-y>-x$，由性质4推论2有$(-y)^{2n+1}>(-x)^{2n+1}$，即$-y^{2n+1}>-x^{2n+1}$即$x^{2n+1}>y^{2n+1}$，故④为真.

小结：1. 善于根据已知条件判定字母或式子是正、是负或是0；2. 善于分类运用性质变形.

【例2】先研究下列命题，不正确者举例说明，并且在不改变结论的前提下把假命题改为真命题：

①若$a>b$，则$ac\leqslant bc$；

②若$ac^2>bc^2$，则$a^2>b^2$；

③若$a>b$，则$\lg(a+1)>\lg(b+1)$；

④若$a>b$，$c>d$，则$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

分析：关键由已知寻找问题中的字母或式子是正、是负还是0.

①假·例：$c=2$时，$2a>2b$.

改正：若$a>b$且$c\leqslant 0$，则$ac\leqslant bc$；

②假·例：$a=1$，$b=-2$，$ac^2>bc^2$，但$a^2<b^2$

改为：$ac^2>bc^2$且，$b>0$，则$a^2>b^2$；

③假·例：$b=-2$时，$\lg(b+1)=\lg(-1)$没有意义.

改为：$a>b$且$b>-1$，则$\lg(a+1)>\lg(b+1)$

④假·例：$a=1$，$b=-1$，$c=-2$，$d=-3$时，$\frac{a}{d}=-\frac{1}{3}<\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$，改为：$a>0>b$且$c>d>0$，$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$；

改为$a>b>0$，且$c>d>0$时，$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

小结：这是一个研究性问题，解决这类问题需举特殊例子说明，该题考查同学们多向思维和研究方法及知识的掌握.

【例3】已知$a,b,c,d,\in R$，记$S=ac+bd$，$T=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. 求证：$S$不大于$T$.

分析：由题知，S可正可负，但$T\geqslant 0$. 由此必须分情况求解.

证明：①若$S\leqslant 0$，显然$S\leqslant T$.

②若$S>0$则，反设$S>T$，则有$ac+bd>\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}>0$. 由性质4的推论2有$(ac+bd)^2>(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，即$2abcd>a^2b^2+b^2c^2$. ∴ $(ad-bc)^2<0$与$(ad-bc)^2\geqslant 0$矛盾.

小结：1. 运用性质4的推论必须要求不等式的两端都大于0，不符合运用推论条件的，考虑分类讨论.

2. 题中具有诸如"至多"、"至少"、"均不"、"均是"、"不都"、"任何"、"唯一"、"不大于"等特征的字眼的题目，可考虑反证法.

3. 该题还有多种其它方法，同学们自行完成.

【例4】已知，$m,n\in N^*$，且$n>1$，$a>b>0$，$d>c>0$比较$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}}$与$\left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{m}{n}}$的大小，先猜测，再证明.

解：取$a=3$，$b=2$，$d=2$，$c=1$，

则，$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{m}{n}}=3^{\frac{m}{n}}$，

$\left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{m}{n}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{m}{n}}=1$，

由指数函数$y=a^x$的性质有$3^{\frac{m}{n}}>1$，猜测：$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}}>\left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{m}{n}}$.

证明：∵ $d>c>0$，∴ $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0$；又$a>b>0$，∴ $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}>0$又$m$、$n\in N^*$，且$n>1$，

∴ $\left(\frac{a}{c}\right)^m>\left(\frac{b}{d}\right)^m>0$，

∴ $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{c}\right)^m}>\sqrt[n]{\left(\frac{b}{d}\right)^m}$，∴ $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{m}{n}}>\left(\frac{b}{d}\right)^{\frac{m}{n}}$.

小结：先猜测再证明是一种有效的研究方法.

学生补白

课后练习

基础题

一、选择题

1. 下列命题中正确的是 ( )

(A) $a>b\Rightarrow a^2>b^2$　　(B) $a>b\Rightarrow a^3>b^3$

(C) $a>b\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$　　(D) $a+c>b+c\Rightarrow|a|>|b|$

2. 已知 $m>n$，且 $m+n<0$ 则 ( )

(A) $|m|>|n|$　　(B) $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

(C) $|m|<|n|$　　(D) $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

3. 设 $x<y<0$ 则下列命题为真的是 ( )

(A) $x^2<xy<0$　　(B) $x^2>xy>y^2$

(C) $x^2<y^2$　　(D) $x^2>y^2>xy$

4. 若开口向上的抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f(0)<0$，$f(1)=0$，则下列不等式中恒成立的是 ( )

(A) $ab>bc$　(B) $ac>bc$　(C) $2a>c-b$　(D) $a|b|>c|b|$

5. 若 a,b,c 是实数；且 c 为最小者，a,b,c 成等差数列，则 $\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$ 为 ( )

(A)非 0　(B)正数　(C)负数　(D)非负数

6. 若 $d>0,d\neq1,m,n\in N^*$，则 $1+d^{m+n}$ 与 d^m+d^n 的大小关系是 ( )

(A) $1+d^{m+n}>d^m+d^n$　　(B) $1+d^{m+n}<d^m+d^n$

(C) $1+d^{m+n}\geqslant d^m+d^n$　　(D)不能确定

二、填空题

7. 若 $x^2<y^2$ 则 $|x|$____$|y|$.

8. 下列命题为真的是________.

①若 $a>b$，则 $a\lg\frac{1}{2}>b\lg\frac{1}{2}$；

②若 $a>b>0,c>d>0$ 则 $a^2-\sqrt{d}>b^2-\sqrt{c}$；

③若 $a>b$，且 a、$b\in R$ 则 $\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$；

④若 $\alpha\in[-\pi,\frac{2\pi}{3}]$，则 $1-\sin\alpha>0$；

⑤ $a-b<c,b>c$ 则 $a-2b>0$；

⑥若 a、$b\in R^+$，则 $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

9. 若 a,b,c,d 满足：条件① $a>b>0$，②条件 $d<c<0$，则 $\frac{\sqrt{a}}{c}$ 与 $\frac{\sqrt{b}}{d}$ 的大小关系是________.

综合题

三、解答题

10. 若 $x=0.8^{0.5},y=0.5^{0.8},z=\log_{0.5}2$ 试比较 x、y、z 的大小.

11. 设数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 $q\neq1$，试求 $\{a_n\}$ 为递增数列的充分必要条件.

12. 设 p,q,s 三个实数满足以下四个条件：① $q<0$；② $|s|>|q|>|p|$；③ $p\neq0$；④ $s\sqrt{\frac{pq^2}{s}}=q\sqrt{ps}$，试判断 p、q、s 三个数的大小关系.

13. 设 $M=3a^2+5ab-2b^2,N=6ab-3b^2$，求证：$M\geqslant N$.

14. 用反证法证明，当 $|a|>|b|,b\neq0$ 时，$\sqrt{|a|-|b|}>\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}$.

创新题

15. 4 枝牡丹花与 5 枝玫瑰花的价格之和小于 22 元，而 6 枝牡丹花与 3 枝玫瑰花的价格之和大于 24 元，则 2 枝牡丹花与 3 枝玫瑰花的价格比较，哪种花贵一些？

16. 预算用 2000 元购买单价为 50 元的篮球和 20 元排球，希望使篮、排球的总数尽可能的多，但排球数不少于篮球数，且不多于篮球数的 1.5 倍，问篮球买多少？

第 4 课时　6.2 算术平均值与几何平均值

课堂札记

学生补白

要点与焦点

重要不等式

（高考热点）→ $a,b\in R$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 当且仅当 $a=b$ 时取"$=$".

（重点中之重点）

（高考热点）→ $a,b\in R^+$，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$当且仅当 $a=b$ 时取"$=$".（平均值不等式）

→ $a\geqslant b>0$，则 $a\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}\geqslant b$.（高考热点）（多在选择题、证明题，求最值问题中出现）

→ 若 $ab=P$（常数），当且仅当 $a=b$ 时，$a+b$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；若 $a+b=S$（常数），当且仅当 $a=b$ 时，ab 有最大值$\frac{1}{4}S^2$.（难点）　（高考热点）

拓展与点悟

1. 重要不等式的变形使用：$a^2+1\geqslant 2a$；$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$；$b\leqslant\left(\frac{1+b}{2}\right)^2$ 等.

2. 注意不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的成立条件是 a、b 是正实数. 此不等式取"$=$"的充要条件是"$a=b$".

3. 问题中出现"和与积"相关联的式子时，一般用到上述重要不等式或配方法.

4. 证明三项或三项以上的不等式时，常反复使用上述不等式（如 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$），得出多个式子，再将所得式子相乘或相加可得结果，如例 1、例 2.

5. 求最值的一个重要方法是使用平均值不等式：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，运用时其条件必须满足：①$a,b\in R^+$；②$a$ 与 b 的和为定值或 a 与 b 的积为定值；③当且仅当 $a=b$ 时，不等式等号成立，这三点简称为"一正二定三相等，积定和最小，和定积最大."如例 3.

6. 常与对数、指数、三角函数、反三角函数联系在一起，或比较大小或求最值.

7. 运用"1 的代换"技巧. 如例 4.

8. 若 $a\geqslant b>0$，则有$\frac{1}{a}\leqslant\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\leqslant\frac{2}{a+b}\leqslant\left(\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2\leqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\leqslant\frac{1}{b}$.

举一反三

【例 1】设 x、y、z 是不全相等的正实数，求证：$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}\geqslant\sqrt{2}(x+y+z)$

分析：由于式子中有平方和则运用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的公式.

解：∵　$x>0$，$y>0$，$z>0$，

学生补白

又 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，

∴ $2x^2+2y^2\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$，

∴ $\sqrt{2(x^2+y^2)}\geqslant |x+y|$，

∴ $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$，

同理：$\sqrt{y^2+z^2}\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$，　　$\sqrt{z^2+x^2}\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(z+x)$，

三式相加得：

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}\geqslant\sqrt{2}(x+y+z)$.

小结：**遇到多个式子相加时，通常运用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 或 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 得出几个式子再相加.**

【例 2】如果 a,b 为正数，则 $(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)(a^4+b^4)\geqslant 16a^5b^5$.

分析：运用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

证明：∵ $a+b\in R^+$，

∴ $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

$a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$a^3+b^3\geqslant 2ab\sqrt{ab}$，

$a^4+b^4\geqslant 2\sqrt{a^4b^4}=2a^2b^2$.

以上四式相乘得：

$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)(a^4+b^4)\geqslant 16a^5b^5$.

小结：**遇到和积的式子通常用平均值及等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 进行和积转化.**

【例 3】动点 $p(x,y)$ 到定点 $A(-1,0)$ 与 $B(0,2)$ 的距离相等，求 4^x+16^y 的最小值.

分析：要求和的最小值，一般用平均值不等式.

解：由题意知：$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$，

得：$2x+4y=3$，

又 $4^x>0, 16^y>0$，

∴ $4^x+16^y=2^{2x}+2^{4y}\geqslant 2\sqrt{2^{2x}\cdot 2^{4y}}$

$=2\sqrt{2^{2x+4y}}=2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$.

当且仅当 $2^{2x}=2^{4y}$ 即 $x=2y$，$x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{3}{8}$ 时取"＝".

∴ 4^x+16^y 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

小结：**幂的运算先将幂化成同底数的幂的形式进行运算，遇上求和或积的最值通常用平均值不等式.**

【例 4】已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，若 x_1、x_2 都大于 0，且满足 $2x_1+x_2=1$，求 $f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值.

分析：为了避免两次使用平均值不等式，**采用"1 的代换"技巧.**

解法一：∵ $x_1>0, x_2>0$，又 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

$$=\frac{2x_1+x_2}{x_1}+\frac{2x_1+x_2}{x_2}$$

$$=2+\frac{x_2}{x_1}+1+\frac{2x_1}{x_2}$$

$$=3+\frac{x_2}{x_1}+\frac{2x_1}{x_2}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{2x_1}{x_2}}=3+2\sqrt{2}.$$

当且仅当 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{2x_1}{x_2}$ 即 $x_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\sqrt{2}-1$ 时，取"＝"，

∴ $f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

解法二：三角换元法，设 $2x_1=\sin^2\alpha$，$x_2=\cos^2\alpha$，

则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$=2\csc^2\alpha+\sec^2\alpha$

$=2(1+\cot^2\alpha)+(1+\tan^2\alpha)$

$=3+2\cot^2\alpha+\tan^2\alpha\geqslant 3+2\sqrt{2\cot^2\alpha\tan^2\alpha}$

$=3+2\sqrt{2}$.

当且仅当 $2\cot^2\alpha=\tan^2\alpha$ 即 $\tan\alpha=\sqrt{2}$时，

即 $x_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\sqrt{2}-1$ 时，取“=”.

∴ $f(x_1)+f(x_2)$最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

小结：如本例所给式子的两个变量的系数分别不同时，为了避免出错，通常用“1 的代换”技巧或三角换元法.

【例 5】设 a，h 分别是△ABC 的底边和高，且满足 $ah+4a+h=12$，求△ABC 的面积 S 的最大值.

分析：$S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ah$，而式子中已有 ah，则把 $4a+h$ 转为 ah 形式.

解：∵ $a,h>0$，

∴ $4a+h\geqslant 2\sqrt{4ah}=4\sqrt{ah}$，

∴ 原式变为 $ah+4\sqrt{ah}\leqslant 12$，

即：$(\sqrt{ah})^2+4\sqrt{ah}-12\leqslant 0$，

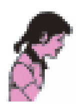
∴ $-6\leqslant\sqrt{ah}\leqslant 2$，又 $\sqrt{ah}>0$，

∴ 当 $4a=h$ 时，有 $a=-3$（舍去），即当 $a=1$ 时，取“=”此时，$\sqrt{ah}$有最大值为 2.

∴ 当 $a=1$，$h=4$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 的面积最大值为 2.

小结：在式子中和、积并存时，若求和则用平均值不等式将积化成和，若求积则用平均值不等式将和化成积.

学生补白



课后练习

基础题

一、选择题

1. 下列各式正确的是 （　　）

(A)若 $f(M)=\dfrac{M^2+5}{\sqrt{M^2+3}}$，则 $f(M)\geqslant 2\sqrt{2}$

(B)若 a、$b\in R^+$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$

(C)若 s、$t\in R$，则$\dfrac{s}{t}+\dfrac{t}{s}\geqslant 2$

(D)若 $x,y>0$，且 $2x+3y=2\sqrt{6}$，则 $xy\leqslant 1$

2. 已知 $0<b\leqslant c<a<1$，且 $f(x)=\log_a x$，$f(\mathrm{b})\cdot f(\mathrm{c})=1$，则 bc （　　）

(A)无最大值也无最小值

(B)无最大值而有最小值

(C)有最大值而无最小值

(D)既有最大值也有最小值

3. △ABC 的三内角 A、B、C、对应三边分别为 a、b、c，且满足 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，其周长为 2，则△ABC 的最大面积为 （　　）.

(A)$3+2\sqrt{2}$　　(B)$3-2\sqrt{2}$

(C)$3+\sqrt{2}$　　(D)$3-\sqrt{2}$

4. 已知 $f(x)=x$，且 x_1、x_2、x_3、x_4 为正实数，满足：$f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)+f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)=1$，$[f(x_3)]^2+[f(x_4)]^2=8$，则 x_1x_2 与 x_3x_4 的大小关系为 （　　）

(A)$x_1x_2>x_3x_4$　　(B)$x_1x_2\geqslant x_3x_4$

(C)$x_1x_2<x_3x_4$　　(D)$x_1x_2\leqslant x_3x_4$

5. 设 $x>0$，$y>0$，且$\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{y}=1$，则 xy 有 （　　）

(A)最大值 64　　(B)最小值$\dfrac{1}{64}$

(C)最小值$\dfrac{1}{2}$　　(D)最小值 64

二、填空题

6. 半径是$\dfrac{1}{2}$的圆内接三角形 ABC 的边 AB 过圆心，设 $AC=b$，$BC=a$，则$(1-ab)(1+ab)$的最小值是________.

7. 当 $x>0$ 时，则 $8-5x-\dfrac{16}{5x}$的最大值是________.

8. 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\tan(\pi-\theta)+\cot(\pi-\theta))$的最大值是________.

综 合 题

三、解答题

9. 用平均值不等式求 $y=-2x^2+4x+3$ 的最小值.

10. $A=\{x\mid f(x)=\log_a(x-2)\}$，$b\in A$，求 $y=\dfrac{b^2-2b+1}{b-2}$ 的最小值.

11. 已知 $x>0$，$y>0$，$f(x)=x$，且 $2f(x)+5f(y)=20$，求证：$\lg f(x)+\lg f(y)\leqslant 1$

创 新 题

12. 某生产饮料的企业准备投入适当的广告费对产品进行促销，在一年内预计年销量 Q(万件)与广告费 x(万元)之间的函数关系式为 $Q=\dfrac{3x+1}{x+1}(x\geqslant 0)$，已知生产此产品的年固定投入为 3 万元，每生产 1 万件此产品仍需再投入 32 万元，若每件销售价为“年每件成本的 150%”与“年平均每件所占广告费的 50%”之和.

(1)试将利润 W 万元表示为年广告费 x 万元的函数.(2)当年广告费投入多少万元时，企业年利润最大，最大利润为多少？

第 5 课时　6.2 平均值不等式的运用

课堂札记

要点与焦点

$a,b\in R$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取“=”

（高考热点）（重点）→ $a,b\in R^+$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当“$a=b$”时取“=”

（难点）→ $a,b\in R$，则 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时取“=”

（重点难点）

（多在选择题求最值题中出现）

学生补白

拓展与点悟

1. 上述不等式是求最值或者函数值域的一种常用的重要方法.

2. 要特别注意其变形的使用，如 $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，$x+\dfrac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}(x,a>0)$，$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2(x,y$ 同号$)$.

3. 运用平均值不等式时的注意事项和技巧，即：“一正二定三相等，拆项配系数”.