前　言

QIAN YAN

《高中总复习优化设计》一直是按“1+2”模式编写的，即一册《优化设计》学生用书，附编一册学生训练用书的《优化训练》，共配编一册供教师使用的“教师用书”。这种延续了几年的“1+2”模式发挥了积极的作用，得到广大读者的充分肯定与认同。但是，同时也有不少读者指出，处于从属地位的《优化训练》题型比较单一，功能不够完备，难以很好地适应高考改革对于备考训练的要求。这一意见引起了我们的极大重视。经过深入研究和反复论证，我们决定将从属于《优化设计》的《优化训练》分离出来，专题策划，独立编写，形成一个科学完备的训练体系。这就成了今天与广大读者见面的《高中总复习优化训练》“1+1”系列。

那么，《高中总复习优化训练》继承了《高中总复习优化设计》的哪些传统优势，自身又发展了什么样的新特色呢？

《高中总复习优化训练》继承了《高中总复习优化设计》新颖、优化、科学、实用的传统优势：

新颖：反映“3+X”考试的最新信息，从新颖别致的角度，精选基础性、综合性、多元性的例题和试题，体现培养创新思维和实践能力的要求。

优化：放眼整体，全程优化，创造性地设计各分册的内容框架。既考虑本学科的系统完整，又兼顾跨学科的综合沟通。

科学：在对近年来高考总复习实践进行深入分析研究的基础上，全面吸收率先实行综合考试地区的高考备考成功经验，内容设置、体例编排更为科学，体现了最新复习导向。

实用：作为专项的、独立的训练用书，从方式、内容、时间控制等多角度进行综合设计、优化取舍，更适合教师整体操作、学生个体使用。

《高中总复习优化训练》新的策划理念与编写特色：

着眼点前瞻性与着手点准确性的有机结合。着眼点的前瞻性追求的是与高考改革方向的一致。着手点的准确性追求的是对高考命题意图的准确把握。二者的有机结合体现在题型与内含、题量与时限、思维与方法、机智与技巧等方面的配置、照应体系上。优化训练在对能力的检测中体现对基础的巩固，在基础层级、学科内综合训练中蕴含着高层级能力、跨学科综合应用能力要求。

《高中总复习优化训练》以一周1次或2次45分钟的[基础训练]为最频繁、最基础性设置，涵盖学科单元或单元组合的主干知识；以一周1次或两周1次90分钟的[单元测试]为中量级、提高性设置，凸现每章或每编重点、要点，演练学科内综合；以一月1次或数月1次高考时限的[高考模拟训练]为适量级、应用性设置，展现学科间辐射、交汇现象，体验和提升应用能力。这种以“基础练”、“综合练”、“模拟练”为结构板块，以日练、周练、月练为延伸链条，以45分钟、90分钟、高考时限为旋升半径的备考练习体系，包揽了内容与形式、要求与方法、时间与思维的练习三大要素，形成了一个以适应综合考试为目的的“三维”综合练习体系。

本书是以“修订教材”为蓝本编写的。本书以教材章节为“基础训练”依托，设计85套训练试题，涵盖了中学阶段所涉及的数学概念、定理、公式等基础知识和基本能力要素，对教材中反映数学理论本质属性、蕴含重要数学思想的例题、习题进行类比、延伸、迁移、拓广，适用于随堂练习或小型集中练习；以教材大章为综合练习单元，设计“单元测试”10套，适用于集中练习或阶段测试。本书还以最新高考试卷试题结构、顺序为模板，编写了6套“高考模拟训练”卷，密切联系社会现实，体现时代特色，全面训练解题方向和策略，锤炼数学抽象思维的准确性、深刻性、逻辑性、完整性和灵活性，突出培养应用数学意识和创新能力，适用于阶段测试或模拟考试。全书训练类型齐全，梯度清晰，功能完备，实用、方便。

本书是为了帮助教师把握《高中总复习优化训练》的设计思想和意图，促进对该书的有效使用而专门编写的。本书对《高中总复习优化训练》中试题进行了详细解析及思路点拨，并附有大量备课资料和必要的教学建议，内容更加丰富全面，将会使教师的教学指导与备课更加得心应手。

本书编者身处中学数学教学、教研第一线，投身实践，潜心研究，精心设计，集全国各地先进经验于本书，希望能给广大师生高三总复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限，书中难免有疏忽与不妥，敬请广大读者批评赐教。

编　者

2002年6月

目录 MU LU

一、函数、指数函数、对数函数

1.1 集合的概念 ……………… (001)
1.2 集合的运算 ……………… (002)
1.3 映射与函数的定义域 ……………… (003)
1.4 函数的值域 ……………… (004)
1.5 函数的奇偶性 ……………… (005)
1.6 函数的单调性 ……………… (006)
1.7 反函数 ……………… (007)
1.8 幂函数、分数指数与根式 ……………… (008)
1.9 指数函数与对数函数 ……………… (009)
1.10 指数方程与对数方程 ……………… (010)
1.11 二次函数、二次不等式及二次方程 ……………… (011)
1.12 函数的图象 ……………… (012)
1.13 函数的最值问题 ……………… (013)
1.14 函数的实际应用 ……………… (014)
单元测试(一) ……………… (016)

二、三角函数

2.1 任意角的三角函数 ……………… (018)
2.2 同角关系、诱导公式 ……………… (019)
2.3 三角函数的图象 ……………… (021)
2.4 三角函数的性质 ……………… (023)
单元测试(二) ……………… (024)

三、两角和与差的三角函数

3.1 两角和与差的三角函数 ……………… (027)
3.2 倍角、半角公式、万能公式 ……………… (028)
3.3 和差化积及三角变换 ……………… (030)
3.4 解三角形 ……………… (031)
单元测试(三) ……………… (033)

四、反三角函数和最简单的三角方程

4.1 反三角函数 ……………… (035)
4.2 最简单的三角方程 ……………… (036)
代数上册模拟训练 ……………… (037)

五、不等式

目录 MU LU

5.1 不等式的概念和性质 …… (040)
5.2 两个基本不等式 …… (041)
5.3 证明不等式的方法(一)(比较法) …… (043)
5.4 证明不等式的方法(二)(综合法与分析法) …… (044)
5.5 证明不等式的方法(三)(换元法、反证法、放缩法、判别式法、数学归纳法) …… (045)
5.6 有理不等式的解法 …… (047)
5.7 无理不等式与绝对值不等式的解法 …… (048)
5.8 指数、对数不等式的解法 …… (050)
5.9 含参数的不等式的解法 …… (051)
5.10 不等式的实际应用 …… (052)
5.11 不等式的综合应用 …… (054)
单元测试(四) …… (055)

六、数列、极限、数学归纳法

6.1 数列的概念 …… (058)
6.2 等差、等比数列的基本概念及运算 …… (059)
6.3 等差、等比数列的性质及应用 …… (060)
6.4 等差、等比数列的综合应用 …… (061)
6.5 数列求和 …… (063)
6.6 数列的极限 …… (064)
6.7 数列极限的应用 …… (065)
6.8 数学归纳法 …… (066)
6.9 数列的综合应用 …… (068)
6.10 数列的实际应用 …… (069)
单元测试(五) …… (070)

七、复　数

7.1 复数的有关概念及几何意义 …… (073)
7.2 复数的代数形式及其运算 …… (074)
7.3 复数的三角形式及其运算 …… (075)
7.4 复数的模与辐角 …… (076)
7.5 复数的几何意义及其应用 …… (078)
7.6 复平面上的轨迹问题 …… (079)
7.7 复数与方程 …… (080)
单元测试(六) …… (081)

目录

LU MU

八、排列、组合、二项式定理

8.1 加法原理与乘法原理 …… (083)
8.2 排列、组合 …… (084)
8.3 二项式定理及应用 …… (085)
代数下册模拟训练 …… (086)

九、直线与平面

9.1 平面的基本性质 …… (089)
9.2 空间两条直线 …… (090)
9.3 空间直线与平面 …… (091)
9.4 空间平面与平面 …… (093)
9.5 三垂线定理及逆定理 …… (094)
9.6 空间角 …… (096)
9.7 空间距离 …… (097)
9.8 折叠、最值的应用 …… (099)
单元测试(七) …… (100)

十、多面体与旋转体

10.1 棱柱 …… (104)
10.2 棱锥、棱台 …… (105)
10.3 圆柱、圆锥、圆台 …… (107)
10.4 球、组合体 …… (108)
单元测试(八) …… (110)
立体几何模拟训练 …… (112)

十一、直线

11.1 有向线段、定比分点 …… (116)
11.2 直线方程 …… (117)
11.3 两条直线的位置关系 …… (119)
11.4 直线方程的应用 …… (120)
单元测试(九) …… (121)

十二、圆锥曲线

12.1 曲线和方程、充要条件 …… (124)
12.2 圆 …… (125)
12.3 椭圆的定义 …… (126)
12.4 椭圆的性质 …… (128)

目录

LU MU

12.5 双曲线的定义 …… (129)
12.6 双曲线的性质 …… (130)
12.7 抛物线 …… (132)
12.8 直线和圆锥曲线的位置关系 …… (133)
12.9 平移、对称问题 …… (135)
12.10 轨迹问题 …… (136)
12.11 圆锥曲线的最值、参数范围问题 …… (138)
单元测试(十) …… (139)

十三、参数方程、极坐标

13.1 参数方程及参、普互化 …… (142)
13.2 极坐标方程及极、直互化 …… (143)
13.3 直线与椭圆参数方程的应用 …… (144)
解析几何模拟训练 …… (146)
高考模拟训练(一) …… (149)
高考模拟训练(二) …… (152)
高考模拟训练(三) …… (156)
高考模拟训练(四) …… (159)

备课札记

一、函数、指数函数、对数函数

1.1　集合的概念

基 础 训 练

一、选择题

⇨1. 已知集合 $M=\{-1,1,2\}$，集合 $N=\{y|y=x^2,x\in M\}$，则 $M\cap N$ 是……………（　　）

(A)$\{1,2,4\}$　　(B)$\{1,4\}$

(C)$\{1\}$　　(D)$\varnothing$

答案：(C)

⇨2. 下列表述：(1)$\varnothing=\{0\}$，(2)$\mathbf{R}=\{$实数集$\}$，(3)$\{(x,y)|x=1,y=2\}=\{x=1,y=2\}$，(4)$\{x|y=\sqrt{x-1}\}=\{y|y=x^2+1\}$，其中正确的表述有…………………………（　　）

(A)0 个　(B)1 个　(C)2 个　(D)3 个

答案：(B)

⇨3. 设 $M=\{(x,y)|x=m\}$，$N=\{(x,y)|y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)\}$，则 $M\cap N$ ………（　　）

(A)只有一个元素　(B)无穷多个元素

(C)0 个或 1 个元素　(D)不确定

答案：(C)

⇨4. 数集 $M=\{x|x=k+\frac{1}{4},k\in\mathbf{N}\}$，$N=\{x|x=\frac{k}{2}-\frac{1}{4},k\in\mathbf{N}\}$，它们之间的关系是 ………………………………………（　　）

(A)$M=N$　(B)$M\supset N$　(C)$M\subset N$　(D)$M\subseteq N$

答案：(C)

⇨5. 为适应素质教育的需要，某校专设了以下三门选修课：①文学欣赏；②音乐欣赏；③科研成就展望。已知甲班全体学生每人至少选修了三门课程之一，其中选修①的有 30 人，选修②的有 20 人，选修③的有 29 人，若同时选修①、②的有 9 人，同时选修①、③的有 15 人，同时选修②、③的有 12 人，而同时选修①、②、③的有 7 人，则这个班共有学生 ………………………………………（　　）

(A)50 人　(B)52 人　(C)54 人　(D)57 人

答案：(A)

⇨6. 设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集为 $M-P=\{x|x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$等于 ……………………（　　）

(A)P　(B)$M\cap P$　(C)$M\cup P$　(D)M

答案：(B)

二、填空题

⇨7. 若 $A=\{2,3,4,9\}$，且 $m\in A$，$n\in A$，则 $\{x|x=\log_m n\}$中有________个元素.

答案：9

⇨8. 全集 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，则$\overline{A\cup B}=$________.

答案：$\{(2,3)\}$

⇨9. 设 S 为非空集合，且 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，那么满足性质“若 $a\in S$，则 $6-a\in S$”的集合 S 的个数是________.

答案：7

三、解答题

⇨10. 已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$，$B=\{a,ac,ac^2\}$，若 $A=B$，求 c 的值.

解：由元素的互异性知：$a\neq0,b\neq0,c\neq0,c\neq1$，若 $a+b=ac,a+2b=ac^2$，则 $2ac=a+ac^2$，

$\therefore c^2-2c+1=0$　$\therefore c=1$(不合题意，舍去).

$\therefore a+b=ac^2$　$\therefore 2ac^2=a+ac$，

$\therefore 2c^2-c-1=0$　$\therefore c=-\frac{1}{2}$或 $c=1$(舍去).

⇨11. 已知 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$N=\{0,|x|,y\}$，且 M、N 均为三元素集合，试求集合 $C=\{x+y|M=N\}$.

解：由 $\lg(xy)$知 $xy>0$，$\therefore x\neq0,y\neq0$，

$\therefore\lg(xy)=0$，即 $xy=1$.

若 $y=1$，则 $x=1=xy$(舍去).

若$|x|=1$，$\because x\neq1$，$\therefore x=-1$，

此时 $x=y=-1$　$\therefore x+y=-2$.

即 $C=\{-2\}$.

评　析

本部分应重点掌握集合及其有关概念、相互关系、术语符号等. 能正确地表示出一些较简单的

集合.解题时要熟练掌握集合的图形表示(即韦恩图或称文氏图)、数轴表示等基本方法.注意元素的确定性、互异性和无序性的应用.

备课札记

1.2　集合的运算

基础训练

一、选择题

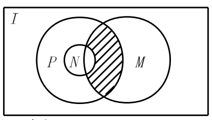
⇨1. 已知 I 是全集,若非空集合 A、B 满足 $A\subset B$,则下列集合中为空集的是 ……… (　　)

(A)$A\cap\overline{B}$　　(B)$\overline{A}\cap\overline{B}$

(C)$\overline{A}\cap B$　　(D)$A\cap B$

答案:(A)

⇨2. 设 I 为全集,M、N、P 都是它的子集,则图中阴影部分表示的集合是 …………… (　　)



(A)$M\cap(N\cup P)$

(B)$(M\cap(\overline{N}\cap P)$

(C)$(\overline{M}\cap\overline{N})\cap P$

(D)$(M\cap N)\cup(M\cap P)$

答案:(B)

⇨3. 集合 $A=\{$等腰三角形|一条边长为 4,一内角为 $50°\}$的元素个数是 …………… (　　)

(A)2　(B)3　(C)4　(D)无数

答案:(C)

⇨4. 同时满足$\{1\}\subset A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是 …………………………………… (　　)

(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

答案:(C)

⇨5. 设全集 $I=\mathbf{R}$,$M=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$,$N=\{x|\sqrt{x+1}\leqslant 2\}$,则 $\overline{M}\cap N$ 为 …… (　　)

(A)$\{-1\}$

(B)$\{x|-1\leqslant x<2\}\cup\{x|2<x\leqslant 3\}$

(C)$\{x|-1<x\leqslant 3\}$

(D)$\{x|-3\leqslant x\leqslant -1\}$

答案:(B)

⇨6. 全集为 $\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\sin x$,$g(x)=\cos x$,集合 $M=\{x|f(x)\neq 0\}$,集合 $N=\{x|g(x)\neq 0\}$,那么集合$\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$等于 ……………………………………… (　　)

(A)$\overline{M}\cap\overline{N}$　　(B)$\overline{M}\cap N$

(C)$\overline{M}\cup N$　　(D)$\overline{M}\cup\overline{N}$

答案:(D)

二、填空题

⇨7. 已知集合 A 和集合 B 各有 8 个元素,$A\cap B$ 有 4 个元素,则 $A\cup B$ 有________个元素.

答案:12

⇨8. 已知 $A\cap\{-1,0,1\}=\{0,1\}$,且 $A\cup\{-2,0,2\}=\{-2,0,1,2\}$,则满足上述条件的集合 A 共有________个.

答案:4

⇨9. 已知集合 $A=\{x||x-2|>a\}$,$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$,若 $B\subset\overline{A}$,则 a 的取值范围是________.

答案:$a\geqslant 3$

三、解答题

⇨10. 若 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{0,4,5\}$,$I=\{x||x-1|\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}$,求 $\overline{A}$,$\overline{A}\cup B$,$A\cap\overline{B}$ 及 A 的子集的个数.

解:$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0,1,2,3\}$,

$I=\{x||x-1|\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$,

$\therefore\overline{A}=\{-3,-2,4,5\}$,

$\overline{A}\cup B=\{-3,-2,0,4,5\}$,

$\overline{B}=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$,

$A\cap\overline{B}=\{-1,1,2,3\}$,

A 子集个数为 2^5 个.

⇨11. 已知 $I=\{x|x^2<50,x\in\mathbf{N}\}$,$\overline{M}\cap Q=\{1,6\}$,$M\cap\overline{Q}=\{2,3\}$,$\overline{M}\cap\overline{Q}=\{5\}$,求 M、Q.

解:$I=\{x|x^2<50,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$\because\overline{M}\cap Q=\{1,6\}$,$\overline{M}\cap\overline{Q}=\{5\}$.

$\therefore\overline{M}=\{1,5,6\}$,$\therefore M=\{2,3,4,7\}$.

$\because M\cap\overline{Q}=\{2,3\}$,$\overline{M}\cap\overline{Q}=\{5\}$,

$\therefore\overline{Q}=\{2,3,5\}$　$\therefore Q=\{1,4,6,7\}$.

评　析

关于集合的运算,应先确定属于哪类集合(数集、点集或某类图形),再把各集合化成最简形式,然后进行运算.集合问题多与函数、方程、不等式有关,要注意各类知识的融汇贯通.

1.3 映射与函数的定义域

备课札记

基础训练

一、选择题

⇨1. 设 $f:A\to B$ 是集合 A 到 B 的映射,则下列命题中正确的是 …………………………（　　）

(A)A 中的每一个元素在 B 中的象必不同

(B)B 中的每一个元素在 A 中的原象必惟一

(C)A 中的每一个元素在 B 中必有象

(D)B 中的每一个元素在 A 中必有原象

答案:(C)

⇨2. 下列各组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,表示同一个函数的是 …………………………（　　）

(A)$f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

(B)$f(x)=x,g(x)=\frac{x^2}{x}$

(C)$f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=\sqrt{x^2}$

(D)$f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$

答案:(D)

⇨3. 设 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$,则 $f(\frac{1}{x})$是 ……（　　）

(A)$f(x)$　　(B)$-f(x)$

(C)$\frac{1}{f(x)}$　　(D)$\frac{1}{f(-x)}$

答案:(A)

⇨4. 若函数 $y=f(x)$的定义域是$[-4,2]$,则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$的定义域是 ……………………………………（　　）

(A)$[-6,2]$　　(B)$[-2,2]$

(C)$[-6,-4]$　　(D)$[2,4]$

答案:(B)

⇨5. $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$,当 $x<0$ 时,

$f[g(x)]$等于 …………………………（　　）

(A)$-x$　(B)$-x^2$　(C)x　(D)x^2

答案:(B)

⇨6. 已知 $f(x)$满足 $f(a)+f(b)=f(ab)$,且 $f(5)=m,f(7)=n$,则$f(175)$等于…………（　　）

(A)$m+n$　　(B)$2n+m$

(C)$2m+n$　　(D)m^2+n

答案:(C)

二、填空题

⇨7. 点(x,y)在映射 f 下的象是$(2x-y,2x+y)$,则$(4,6)$在 f 下的原象是________.

答案:$(\frac{5}{2},1)$

⇨8. 若函数 $y=\frac{2x-5}{x-1}$的值域是$\{y|y\leqslant 0\}$,这个函数的定义域是________.

答案:$(1,\frac{5}{2}]$

⇨9. 已知 A、B 中各有 2 个元素,则 $A\to B$ 可能建立的映射的个数有________个.

答案:4

三、解答题

⇨10. 求函数 $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$的定义域.

解:$\begin{cases}1+\frac{1}{x}\neq 0\\ x\neq 0\\ 1-\sqrt{1-x}\neq 0\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1]$.

⇨11. 求函数 $y=\log_{(2x-1)}\sqrt{3x-2}$的定义域.

解:$\begin{cases}2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\\ 3x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$.

评　析

本部分重点是映射与函数的概念,函数定义域的求法.难点是映射的概念,应注意:对于含有字母的函数求定义域,或已知其定义域求字母参数的取值范围,必须对字母的取值情况进行讨论.

备课札记

1.4 函数的值域

基础训练

一、选择题

⇨1. 如果实数 x、y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$，那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 …………………… (　　)

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)$\sqrt{3}$

答案：(D)

⇨2. 函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $[2,\pi]$，它的最大值比最小值大 1，则 a 为 …………… (　　)

(A)$\frac{\pi}{2}$　(B)$\frac{2}{\pi}$

(C)$\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2}{\pi}$　(D)$\pi-2$

答案：(C)

⇨3. 已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2kx+k)$ 的值域为 R，则 k 的取值范围是 ……………… (　　)

(A)$0<k<1$　(B)$0\leqslant k\leqslant 1$

(C)$k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 1$　(D)$k=0$ 或 $k\geqslant 1$

答案：(C)

⇨4. 若函数 $y=\frac{x^2-x+3}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则它的值域是 ……………………… (　　)

(A)$(-\infty,1-2\sqrt{3}]\cup[1+2\sqrt{3},+\infty)$

(B)$[1+2\sqrt{3},+\infty)$

(C)$(-\infty,1-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3}-1,+\infty)$

(D)$[2\sqrt{3}-1,+\infty)$

答案：(D)

⇨5. 若 $0<a<1$，则 $y=\log_a(x^2-4x+5)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值是 ……………… (　　)

(A)0　(B)$\log_a 5$　(C)$\log_a 2$　(D)$\log_a 3$

答案：(A)

⇨6. 已知 $0<x\leqslant\frac{1}{4}$，则 $y=\frac{1}{x}-x$ 的最小值是 …………………………………………… (　　)

(A)-2　(B)2

(C)$\frac{15}{4}$　(D)不存在

答案：(C)

二、填空题

⇨7. 函数 $y=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ 的最小值为________.

答案：2

⇨8. 函数 $y=\frac{1}{x}+x$，$(x\in[\frac{1}{4},4])$ 的值域为________.

答案：$[2,\frac{17}{4}]$

⇨9. 函数 $y=\frac{1}{2x-1}$ 的值域是____________.

答案：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

三、解答题

⇨10. 求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域.

解：$\because x\in[0,1]$，

$\therefore$ 令 $x=\sin^2\theta$ $(\theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$，

则 $y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$.

$\because \frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore y\in[1,\sqrt{2}]$.

⇨11. 求 $y=\frac{\sin x}{2-\sin x}$ 的值域.

解：$y=\frac{\sin x}{2-\sin x}\Rightarrow\sin x=\frac{2y}{y+1}$.

$\because \sin x\in[-1,1]$.

$\therefore -1\leqslant\frac{2y}{y+1}\leqslant 1$，

解得 $-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$.

⇨12. 已知 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，试求 $y=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

解：令 $t=\sqrt{1-2f(x)}\geqslant 0$，则 $f(x)=\frac{1-t^2}{2}$.

$\because f(x)\in[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，$\therefore t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

$\because y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$，

又 $\because 1>\frac{1}{2}$

$\therefore y$ 在 $t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ 上是增函数，

$\therefore y\in[\frac{7}{9},\frac{7}{8}]$.

评　析

求值域的常用方法有配方法、判别式法、利用单调性、不等式法、换元法、利用有界性、数形结合法等，求出函数值域时，不但要重视对应法则，而且要特别注意定义域对值域的制约作用.

1.5 函数的奇偶性

备课札记

基础训练

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\frac{x(x-1)}{x-1}$ 是…………… (　　)

(A)奇函数

(B)既是奇函数又是偶函数

(C)偶函数

(D)既不是奇函数又不是偶函数

答案:(D)

2. 函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数,则下列各点中一定在 $y=f(x)$ 图象上的点是 ……………………………………………… (　　)

(A)$(-a,-f(a))$　　(B)$(\frac{1}{a},-f(-\frac{1}{a}))$

(C)$(a,f(-a))$　　(D)$(-a,-f(-a))$

答案:(C)

3. $f(x)$ 是 R 上的奇函数,且当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$,那么当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)$ 等于 ………………………… (　　)

(A)$-x(1+\sqrt[3]{x})$　　(B)$x(1+\sqrt[3]{x})$

(C)$-x(1-\sqrt[3]{x})$　　(D)$x(1-\sqrt[3]{x})$

答案:(D)

4. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$,且 $f(-2)=10$,那么 $f(2)$ 等于 …………………… (　　)

(A)-26　　(B)-8

(C)-10　　(D)10

答案:(A)

5. 若 $a>0,a\neq1,F(x)$ 是偶函数,则 $G(x)=F(x)\cdot\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的图象 ……………………………………………… (　　)

(A)关于 x 轴对称

(B)关于 y 轴对称

(C)关于原点对称

(D)关于直线 $y=x$ 对称

答案:(C)

6. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$,在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,若 $f(1)<f(\lg x)$,那么 x 的取值范围是 ……………………………… (　　)

(A)$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(B)$(0,\frac{1}{10})\cup(10,+\infty)$

(C)$(0,\frac{1}{10})$

(D)$(0,+\infty)$

答案:(B)

二、填空题

7. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$,又是以 2 为周期的周期函数,则 $f(1)+f(2)+f(3)$ 的值是________.

答案:0

8. 已知 $f(x)=x^2(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$,则代数式 $f[\lg(\lg3)]+f[\lg(\log_3 10)]$ 的值为________.

答案:0

9. 已知 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x)=\begin{cases}x+1(-1\leqslant x\leqslant0)\\ \_\_\_\_(0<x\leqslant1).\end{cases}$

答案:$-x+1$

三、解答题

10. 设 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数,$F(x)=af(x)+bg(x)+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最大值 5,求它在 $(-\infty,0)$ 上的最小值.

解:令 $x\in(-\infty,0)$,则 $-x\in(0,+\infty)$.

$F(-x)=af(-x)+bg(-x)+2=$

$-af(x)-bg(x)+2\leqslant5$,得

$af(x)+bg(x)\geqslant-3$.

$F(x)=af(x)+bg(x)+2\geqslant-3+2=-1$,

$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 -1.

11. 已知函数 $f(x)=\log_a\frac{2x+b}{2x-b}(a>1,b<0)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明.

解:(1)由 $\frac{2x+b}{2x-b}>0$,得 $(2x+b)(2x-b)>0$.

由 $b<0$ 得 $x<\frac{b}{2}$ 或 $x>-\frac{b}{2}$,

∴定义域为 $(-\infty,\frac{b}{2})\cup(-\frac{b}{2},+\infty)$.

(2)$f(x)$ 为奇函数.

$f(-x)=\log_a\frac{-2x+b}{-2x-b}=\log_a\frac{2x-b}{2x+b}$

$=\log_a(\frac{2x+b}{2x-b})^{-1}=-\log_a\frac{2x+b}{2x-b}$,

即 $f(-x)=-f(x)$,

∴ $f(x)$ 为奇函数.

评　析

判断函数的奇偶性,首先应考虑定义域是否关于原点对称,然后再观察 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.有时可直接根据图象的对称性来判断函数的奇偶性.

备课札记

1.6 函数的单调性

基础训练

一、选择题

⇨1. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数且最小值为 5，那么 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上是 …………………………………… (　　)

(A)增函数且最小值是 -5

(B)增函数且最大值是 -5

(C)减函数且最小值是 -5

(D)减函数且最大值为 -5

答案：(B)

⇨2. 函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的递减区间是 ………………………………………………… (　　)

(A)$(-\infty,-3]$　　(B)$[-1,+\infty)$

(C)$(-\infty,-1]$　　(D)$[1,+\infty)$

答案：(A)

⇨3. 偶函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内单调递减，若 $a=f(-1)$，$b=f(\log_{0.5}\frac{1}{4})$，$c=f(\frac{1}{2})$，则 a、b、c 的大小顺序是 ……………………… (　　)

(A)$a>b>c$　　(B)$c>a>b$

(C)$b>a>c$　　(D)$c>b>a$

答案：(B)

⇨4. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(\frac{1}{3})=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集是 ………… (　　)

(A)$(0,\frac{1}{2})$　　(B)$(2,+\infty)$

(C)$(\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$　　(D)$(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

答案：(D)

⇨5. $f(x)$ 在区间 M 上是减函数，且 $f(x)>0$，则下列函数在区间 M 上是增函数的是 ………………………………………… (　　)

(A)$y=2^{f(x)}$　　(B)$y=(\frac{1}{2})^{f(x)}$

(C)$y=\sqrt{f(x)}$　　(D)$y=\log_2[f(x)]$

答案：(B)

⇨6. 已知函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$g(x)=(\frac{1}{3})^x$，那么在 $(-\infty,+\infty)$ 上正确的是 ………… (　　)

(A)$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增函数

(B)$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是减函数

(C)$f(x)$ 为增函数而 $g(x)$ 为减函数

(D)$f(x)$ 减函数而 $g(x)$ 增函数

答案：(C)

二、填空题

⇨7. $\log_a(3a-1)$ 恒为正数，那么 a 的取值范围是________.

答案：$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup(1,+\infty)$

⇨8. 设 α 为锐角，则函数 $y=\log_{\cos\alpha}|x^2-x-12|$ 的递减区间是________.

答案：$(-3,\frac{1}{2}]$ 及 $(4,+\infty)$

⇨9. 定义在 $[1,3]$ 上的函数 $f(x)$ 为减函数，则满足 $f(1-a)-f(3-a^2)>0$ 的实数 a 的取值范围是________.

答案：$(-1,0]$

三、解答题

⇨10. 证明函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

证明：设 $x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$=(x_1-x_2)\frac{x_1\cdot x_2-1}{x_1\cdot x_2}$.

$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$.

$\because x_1,x_2\in(0,1)$，

$\therefore 0<x_1\cdot x_2<1$，

$\therefore x_1x_2-1<0$，

$\therefore (x_1-x_2)\frac{x_1\cdot x_2-1}{x_1\cdot x_2}>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，即得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数.

⇨11. 求函数 $f(x)=(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 的单调区间，并指出相应区间上 $f(x)$ 的增减性.

解：令 $t=\log_{\frac{1}{2}}x$，则 $f(x)=t^2+t+1$，

对称轴：$t=-\frac{1}{2}$.

$t\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 时，$f(x)$ 单调递减；

$t\in[-\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增.

由 $\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant-\frac{1}{2}$ 得 $x\geqslant\sqrt{2}$，由 $\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant-\frac{1}{2}$ 得 $0<x\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,\sqrt{2}]$ 时 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in[\sqrt{2},+\infty)$ 时 $f(x)$ 单调递增.

评　析

讨论函数的单调性必须在定义域内进行. 因

此,讨论函数的单调性,必须先确定函数的定义域,然后根据定义进行判定.讨论复合函数单调性时,最容易出错的是忽视函数的定义域.

备课札记

1.7 反函数

基础训练

一、选择题

⇨1. 函数 $y=\frac{x-2}{2x-1}(x\in\mathbf{R},x\neq\frac{1}{2})$ 的反函数是 …………………………………………… (　　)

(A) $y=\frac{x-2}{2x-1}(x\in\mathbf{R},x\neq\frac{1}{2})$

(B) $y=\frac{2x-1}{x-2}(x\in\mathbf{R},x\neq 2)$

(C) $y=\frac{x+2}{2x-1}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{2})$

(D) $y=\frac{2x-1}{x+2}(x\in\mathbf{R},x\neq -2)$

答案:(A)

⇨2. 已知函数 $f(x)=x^2+1$,那么 $f^{-1}(x)$ ………………………………………………… (　　)

(A) $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x-1}$　(B) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

(C) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$　(D)不存在

答案:(D)

⇨3. 若函数 $f(x)=3+2^{x-1}$ 的反函数图象过点 P,则 P 点坐标可能是 …………… (　　)

(A)(2,5)　(B)(1,3)

(C)(5,2)　(D)(3,1)

答案:(C)

⇨4. 函数 $f(x)=\frac{c}{ax+b}$,要使 $f(x)=f^{-1}(x)$,则 a、b、c 需满足条件 ………………… (　　)

(A) $b=c=0,a\neq 0$　(B) $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$

(C) $a=0,b\neq 0,c\neq 0$　(D) $b=0,a\neq 0,c\neq 0$

答案:(D)

⇨5. 若点(2,3)既在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图象上,又在它的反函数的图象上,则 a、b 的值分别为 ………………………………… (　　)

(A)不存在　(B)5,−19

(C)−5,19　(D)−5,−19

答案:(C)

⇨6. 函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$,下列关系中,正确的是 ………………… (　　)

(A) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 单调性相同,图象可能相同

(B) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 单调性相同,图象不可能相同

(C) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 单调性相反,图象不可能相同

(D)以上均不正确

答案:(A)

二、填空题

⇨7. 若 $f(x)=\sqrt{x^2-3}(x\leqslant -\sqrt{3})$,则 $f^{-1}(2)=$ ________.

答案:$-\sqrt{7}$

⇨8. 若 $y=\frac{1}{3}x+m$ 与 $y=nx-b$ 互为反函数,则 $m=$ ________,$n=$ ________.

答案:2　3

⇨9. 若函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的反函数是 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是________.

答案:[0,1]

三、解答题

⇨10. 求函数 $y=\frac{2x+1}{3-2x}(x\neq\frac{3}{2})$ 的反函数.

解:由 $y=\frac{2x+1}{3-2x}$ 得 $3y-2xy=2x+1$,

$\therefore (2y+2)x=3y-1$,$\therefore x=\frac{3y-1}{2y+2}$,

$\therefore y=\frac{2x+1}{3-2x}(x\neq\frac{3}{2})$ 的反函数为

$y=\frac{3x-1}{2x+2}(x\neq -1)$.

⇨11. 求函数 $y=-x^2+2x-4(x\leqslant 1)$ 的反函数.

解:$\because y=-(x-1)^2-3$,又 $x\leqslant 1$

$\therefore x=1-\sqrt{-y-3}$.

$\therefore$ 函数 $y=-x^2+2x-4(x\leqslant 1)$ 的反函数为

$y=1-\sqrt{-x-3}(x\leqslant -3)$.

⇨12. 求证:函数 $y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

提示:只需证明函数 $y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$ 的反函数是它本身.

评　析

反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域.因此,反函数的定义域不能单纯由其解析

备课札记

式确定,而应充分考虑原函数的值域,互为反函数的两个函数在各自相应区间上单调性是一致的.

1.8　幂函数、分数指数与根式

基础训练

一、选择题

1. 关于幂函数有下面四个命题,其中真命题是 ……………………………………………（　　）

(A)幂函数中不存在既不是奇函数又不是偶函数的函数

(B)如果一个幂函数有反函数,那么它一定为奇函数

(C)图象不经过点$(-1,1)$的幂函数,一定不是偶函数

(D)如果两个幂函数有三个公共点,那么这两个函数一定相同

答案:(C)

2. 幂函数$f(x)$的图象过点$(4,\frac{1}{2})$,那么$f^{-1}(8)$的值是 ……………………………………（　　）

(A)$2\sqrt{2}$　(B)64　(C)$\frac{\sqrt{2}}{4}$　(D)$\frac{1}{64}$

答案:(D)

3. 已知$f(x^6)=\log_2 x$,那么$f(8)$等于 ………………………………………………………（　　）

(A)$\frac{4}{3}$　(B)8　(C)18　(D)$\frac{1}{2}$

答案:(D)

4. 已知x_1是方程$x+\lg x=3$的根,x_2是方程$x+10^x=3$的根,则x_1+x_2等于 …（　　）

(A)6　(B)3　(C)2　(D)1

答案:(B)

5. 已知a、b、c依次为方程$2^x+x=0$,$\log_2 x=2$,$\log_{\frac{1}{2}} x=x$的实数根,则a,b,c之间的大小关系为 ……………………………………（　　）

(A)$b>a>c$　(B)$c>b>a$

(C)$a>b>c$　(D)$b>c>a$

答案:(D)

6. 已知$3^a=5^b=A$,且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$,那么$A$的值为 ……………………………………………（　　）

(A)15　(B)$\sqrt{15}$　(C)$\sqrt{5}$　(D)225

答案:(B)

二、填空题

7. 幂函数$y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$当$x\in(0,+\infty)$时为减函数,则实数m的值为________.

答案:$m=2$

8. 若幂函数$y=x^m$与$y=x^n$的图象在第一象限内的部分关于直线$y=x$对称,则m、n应满足的条件是________.

答案:$mn=1$

9. 方程$x^{\frac{1}{3}}=2\sin x$的实根个数为________.

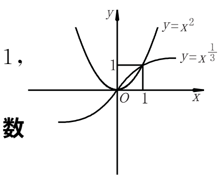
答案:7 个

三、解答题

10. 已知$x^2>x^{\frac{1}{3}}$,求x的取值范围.

解:结合图象知

$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.



注:熟练掌握各种函数的图象.

11. 用函数单调性的定义证明:$f(x)=x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

证明:设$x_1<x_2$,$x_1\in\mathbf{R}$,$x_2\in\mathbf{R}$,

则$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3$

$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

$\because x_1-x_2<0$,$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$.

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$,

$\therefore f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.

注:掌握用定义来证明函数的单调性.

评　析

本套题对幂函数$f(x)=x^a$,a仅限于在集合$\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\}$中取值,重点是这些函数的图象和性质.

1.9 指数函数与对数函数

备课札记

基础训练

一、选择题

⇨1. 下列函数中，在区间$(0,1)$上为增函数的是……（ ）

(A)$y=x^{-\frac{3}{2}}$ (B)$y=\log_{\frac{2}{3}}x$

(C)$y=(\frac{3}{2})^x$ (D)$y=(\frac{2}{3})^x$

答案：(C)

⇨2. 把函数 $y=\log_a(x-1)(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象向右平移 2 个单位，则得到的图象一定过点……（ ）

(A)$(2,0)$ (B)$(0,0)$

(C)$(1,0)$ (D)$(4,0)$

答案：(D)

⇨3. 已知函数 $y=f(2^x)$的定义域为$[-1,1]$，则函数 $y=f(\log_2x)$的定义域为 ……（ ）

(A)$[-1,1]$ (B)$[\frac{1}{2},2]$

(C)$[1,2]$ (D)$[\sqrt{2},4]$

答案：(D)

⇨4. 已知 $\log_ax>\log_bx$，$a+b=1$，$x>1$，则 ……（ ）

(A)$0<a<b<1$ (B)$0<a<1<b$

(C)$0<b<a<1$ (D)$0<b<1<a$

答案：(A)

⇨5. 若函数 $f(x)=\log_{(a^2-1)}(2x+1)$在区间$(-\frac{1}{2},0)$内恒有 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是……（ ）

(A)$0<a<1$

(B)$-\sqrt{2}<a<-1$ 或 $1<a<\sqrt{2}$

(C)$a>1$

(D)$a<-\sqrt{2}$或 $a>\sqrt{2}$

答案：(B)

⇨6. 已知 $f(x)=\log_{\sin\alpha}(x^2-ax+3a)$（$\alpha$ 为锐角）在区间$[2,+\infty)$上是减函数，则实数 a 的取值范围是……（ ）

(A)$(-4,4)$ (B)$[-4,4)$

(C)$(-4,4]$ (D)$[-4,4]$

答案：(C)

二、填空题

⇨7. 已知 $y=\log_ax$，当 $x\in[2,+\infty)$时，总有$|y|>1$，则 a 的取值范围是________.

答案：$\frac{1}{2}<a<1$ 或 $1<a<2$

⇨8. 若函数 $f(x)=3^x$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f^{-1}(18)=a+2$，则函数 $g(x)=3^{ax}-4^x(x\in[0,1])$的值域为________.

答案：$[-2,0]$

⇨9. $f(x)$是周期为 2 的奇函数，当 $x\in[0,1)$时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(\log_{\frac{1}{2}}24)=$________.

答案：$-\frac{1}{2}$

三、解答题

⇨10. 设 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$，$(p>1)$.

(1)求 $f(x)$的定义域；

(2)$f(x)$是否存在最大值或最小值？如果存在，请把它求出来，如果不存在，请说明理由.

解：(1)由题意知，

$\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0,\\ x-1>0,\\ p-x>0,\end{cases}$ 从而得 $f(x)$的定义域为$(1,p)$.

(2)$f(x)=\log_2[(x+1)(p-x)]$

$=\log_2[-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}](1<x<p)$

① $\frac{p-1}{2}\leqslant1$，即 $1<p\leqslant3$ 时，$f(x)$无最值.

② $1<\frac{p-1}{2}<p$ 即 $p>3$ 时，$x=\frac{p-1}{2}$，$f(x)_{\max}=2\log_2(p+1)-2$，$f(x)$无最小值.

③ $\frac{p-1}{2}\geqslant p$，则 $p\leqslant-1$ 不可能.

⇨11. 是否存在实数 a，使函数 $f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$上是增函数. 若存在，说明 a 可取哪些值；若不存在，说明理由.

解：设 $g(x)=ax^2-x$，当 $a>1$ 时，要使 $f(x)$在$[2,4]$上递增，则 $g(x)=ax^2-x$ 在$[2,4]$亦增.

故$\begin{cases}\frac{1}{2a}\leqslant2,\\ g(2)=4a-2>0,\end{cases}$

解得 $a>\frac{1}{2}$，$\therefore a>1$.

当 $0<a<1$，$g(x)$在$[2,4]$须递减，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2a}\geqslant4\\ g(4)>0\end{cases}$ 无解.

综上，$a>1$.

备课札记

评 析

重点是掌握指数函数、对数函数的概念、图象、性质及其应用. 难点是含指数函数、对数函数的复合函数的最值问题. 高考热点是含字母的指数函数、对数函数的单调性的应用. 此部分的数学思想是数形结合、分类讨论. 解含指数函数、对数函数的复合函数的最值问题时一定要注意函数有意义的条件,来决定中间变量的取值范围.

1.10 指数方程与对数方程

基础训练

一、选择题

⇨1. 方程 $2+3^{x-1}=9^{x-\frac{1}{2}}$ 的解是 x 等于 ……………………………………………………… ( )

(A)0 (B)1 (C)2 (D)$\frac{1}{2}$

答案:(B)

⇨2. 方程 $2^x+x^{-\frac{1}{3}}=0$,$\log_2 x=2-x$,$\sin x=\cos x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ 的解分别为 α、β、γ,则下列正确的是 ……………………………………… ( )

(A)$\alpha<\beta<\gamma$ (B)$\gamma<\alpha<\beta$

(C)$\alpha<\gamma<\beta$ (D)$\gamma<\beta<\alpha$

答案:(C)

⇨3. 若 $a\in(0,1)$,则方程 $a^x=\log_a x$ 的解的个数 ……………………………………………… ( )

(A)0 个 (B)1 个

(C)2 个 (D)3 个

答案:(B)

⇨4. 方程 $\log_2(x^2-x)=1$ 的解集为 M,$2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4=0$的解集为 N,则 ……… ( )

(A)$M=N$ (B)$N\subset M$

(C)$M\subset N$ (D)$M\cap N=\varnothing$

答案:(A)

⇨5. 设方程$(\lg x)^2-\lg x-2=0$ 的两个根为 α、β,则 $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$ 的值等于 ………… ( )

(A)1 (B)-2.5 (C)3 (D)-4

答案:(B)

⇨6. 已知 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的解,x_2 是方程 $x+10^x=3$ 的解,则 x_1+x_2 等于 … ( )

(A)6 (B)3 (C)2 (D)1

答案:(B)

二、填空题

⇨7. 若关于 x 的方程 $5^x=\frac{a+3}{5-a}$有负根,则实数 a 的取值范围是________.

答案:$(-3,1)$

⇨8. 方程 $\log_{(x+1)}(2x^2-2x+1)=2$ 的解集为________.

答案:$\{4\}$

⇨9. 方程 $\log_5(x^2+2x-2)=0$,$2\log_5(x+2)-\log_5 y+\frac{1}{2}=0$,则 y 的值________.

答案:$9\sqrt{5}$

三、解答题

⇨10. 解方程 $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$.

解:整理得 $\log_2{}^2(2^x+1)+\log_2(2^x+1)-2=0$,令 $t=\log_2(2^x+1)$,则 $t^2+t-2=0$,解得 $t=1$ 或 $t=-2$,

即 $\log_2(2^x+1)=1$ 或 $\log_2(2^x+1)=-2$,

则 $2^x+1=2$ 或 $2^x+1=\frac{1}{4}$,

$2^x=1$ 或 $2^x=-\frac{3}{4}$(舍),∴$x=0$,

经检验 $x=0$ 是原方程的根

∴原方程的解为 0.

⇨11. 若关于 x 的方程 $9^x+16^x=k\cdot 12^x$ 有解,求 k 的取值范围.

解法一:整理方程得,$k=(\frac{3}{4})^x+(\frac{4}{3})^x$,则 $k\geqslant 2\sqrt{(\frac{3}{4})^x\cdot(\frac{4}{3})^x}=2$(当且仅当 $x=0$ 时,取"="号). ∴$k\in[2,+\infty)$

解法二:方程$(\frac{3}{4})^x+(\frac{4}{3})^x-k=0$ 有解$(k>0)$

令 $t=(\frac{3}{4})^x$,则 $t+\frac{1}{t}-k=0$,

即 $t^2-kt+1=0$.

$\Delta\geqslant 0$,解得,$k\leqslant -2$(舍)或 $k\geqslant 2$.

∴k 的取值范围是$[2,+\infty)$.

评 析

1. 指、对方程属于初等超越方程,可以化成代

数方程后求解.比较简单的指、对方程主要有以下几种类型:

(1)基本型:$a^x=b$,$\log_a x=b$.

(2)同底型:$a^{f(x)}=a^{g(x)}$,$\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

(3)换元型:设 $y=a^{f(x)}$ 或 $y=\log_a f(x)$,化成 y 的代数方程,解出 y 后转化成基本型.

2. $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$.

3. 注意分类讨论在解题中的应用.

备课札记

1.11 二次函数、二次不等式及二次方程

基础训练

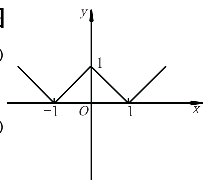
一、选择题

⇨1. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都有 $f(2+x)=f(2-x)$,如果方程 $f(x)=0$ 恰好有 4 个不同的实根,那么这些根之和是 …… ( )

(A)0 (B)2 (C)4 (D)8

答案:(D)

⇨2. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,那么 $f(x)$ 的解析式 $f(x)$ 等于 ……………… ( )



(A) $\sqrt{x^2-2x+1}$

(B) $\sqrt{x^2-2|x|+1}$

(C) $|x^2-1|$

(D) $x^2-2|x|+1$

答案:(B)

⇨3. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 的解析式是 …………………………………………… ( )

(A) $\frac{1}{1-x}$ (B) $\frac{1}{(1-x)^3}$

(C) $-x$ (D) x

答案:(D)

⇨4. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 x 都有 $f(1+x)=f(-x)$,那么 …… ( )

(A) $f(-2)<f(0)<f(2)$

(B) $f(0)<f(-2)<f(2)$

(C) $f(0)<f(2)<f(-2)$

(D) $f(2)<f(0)<f(-2)$

答案:(C)

⇨5. 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的所有实数 p,使不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 都成立的 x 的取值范围 …………………………………… ( )

(A) $(-\infty,3)$

(B) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

(C) $(-1,+\infty)$

(D) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

答案:(B)

⇨6. 若函数 $y=x^2-mx+m+4$ 的定义域是 **R**,值域为 $[1,+\infty)$,则 m 的取值范围是 …………………………………………… ( )

(A) $[-2,6]$

(B) $(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$

(C)集合 $\{-2,6\}$

(D) $(-2,6)$

答案:(C)

二、填空题

⇨7. 函数 $f(x)=x^2-bx+c$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$ 且 $f(0)=3$,则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系________.

答案:$f(b^x)<f(c^x)$

⇨8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与两坐标轴的交点分别为 $(-1,0)$ 和 $(0,-1)$,且顶点在 y 轴的右侧,则 b 的取值范围是________.

答案:$-1<b<0$

⇨9. 已知 α、β 是方程 $\lg(3x)\lg(5x)=k$ 的两个实根 $(k\in\mathbf{R})$,则 $\alpha\cdot\beta$ 的值是________.

答案:$\frac{1}{15}$

三、解答题

⇨10. 若关于 x 的方程 $2^{2x}+2^x\cdot a+a+1=0$ 有实根,求实数 a 的取值范围.

解:令 $2^x=t$,则 $t^2+at+a+1=0$,$a=-\frac{t^2+1}{t+1}$

令 $y=t+1$,则 $y\in(1,+\infty)$ 且 $t=y-1$.

$\therefore a=-\frac{y^2-2y+2}{y}=2-(y+\frac{2}{y})\leqslant 2-2\sqrt{2}$.

⇨11. 若 $f(x)=(x-1)(\log_3 a)^2-6x\log_3 a+x+1$ 在区间 $[0,1]$ 上恒为正数,求实数 a 的取值范围.

解:$f(x)=(\log_3{}^2 a-6\log_3 a+1)x-\log_3{}^2 a+1$

$\therefore\begin{cases}f(0)>0\\f(1)>0\end{cases}$,即 $\begin{cases}\log_3{}^2 a-1<0\\6\log_3 a-2<0\end{cases}$,

解得:$\frac{1}{3}<a<\sqrt[3]{3}$.