前 言

QIAN YAN

随着 2002 年我国高等学校招生全面实行“3+X”考试,新一轮高考改革的第一步目标已经实现。我国基础教育和高考改革持续深入的崭新局面,为我们编写 02—03 年新版《高中总复习优化设计》系列丛书提供了广阔的背景。在积极组织市场调查研究,认真学习高考改革精神和深入研究高考“3+X”命题特点的基础上,我们进一步加大了对本系列丛书的结构调整力度,更加突出优化、设计、新颖等基本特色和精品意识,力求新版图书在保持传统特色的同时,与时俱进,为广大考生提供更新更好的“优化设计”。

新颖:反映“3+X”考试的最新信息,从新颖、别致的角度,选择基础性、综合性、多元性的例题和试题,体现创新思维和实践能力的要求。

优化:放眼整体,全程优化,创造性地设计各分册的内容框架。既考虑讲解的启发作用,又突出训练的主体功能;既考虑本学科的系统完整,又兼顾跨学科的综合沟通。

科学:在对近年高考备考实践进行深入分析研究的基础上,全面吸收了率先实行综合考试地区的备考成功经验,以知识整合、技能演练、能力提升等为内在线索进行栏目、板块的设置、编排,体现了最新复习导向。

实用:本书的传统特色之一是“以讲带练”。本次修订从训练的方式、内容、时间控制等多角度进行综合设计、优化取舍,更适合教师整体操作和学生个体使用。

本分册以“统编教材”为蓝本,以数学高考“更加注重对能力和素质的考查;命题遵循中学教学大纲但不拘泥于大纲;试题中增加应用性和能力性题目”的指导思想为依据,立足教材,编织知识网络;突出基础,蕴含数学思想;培养创新意识,强调应用能力。全书体现了数学高考能力立意方向,反映了时代特色,适用于 2003 年高考第一阶段备考复习。

本书在原有栏目的基础上增设了以下栏目:

[内容综述]对本章主要内容和重点、难点、热点进行阐释,以便读者进一步明确并强化对上述内容的理解与掌握。

[学法指导]概述本章涉及的基本数学思想和方法,介绍复习本章内容的基本方略,指明复习中应注意的问题。

[基础水平测试]学习者通过试做基础水平测试题,可以充分了解本人当前水平和薄弱环节,准确定位本章复习重点、难点,是制定个性化复习计划的有效途径。

本书在试题选择上有以下特色:

一、各章节围绕要点、考点选择题目，有梯度编排，归结于考点综合，脉络分明，利于构建数学认知结构。

二、应用能力、综合考试的根基还是学科基础，作为基础学科的数学也是如此。本书突出第一轮复习特点，做足‘基础’文章，每章节必有以教材习题为原型的改编题目，将蕴含在基础知识中的数学思想和数学基本方法印证于解题过程之中，以巩固基础、深化理解、正向迁移。

三、各章节均编排了一些立意鲜明、背景新颖、设问灵活的习题，同时加大了探索性、应用性题型的数量，以升华读者的学科综合素质，提高以数学为载体，将知识迁移到不同情境去的能力。

四、注重错题分析，以提高辨误、归纳能力。

本书还在编写中努力体现数学与传统和现代科技的交融，注意培养后续学习的潜能。

本书是为了帮助教师把握《高中总复习优化设计》的设计思想和意图，促进对该书的有效使用而专门编写的。本书对《高中总复习优化设计》中试题进行了详细解析及思路点拨，并附有大量备课资料和必要的教学建议，内容更加丰富全面，将会使教师的教学指导与备课更加得心应手。

本书编者身处中学数学教学第一线，投身实践，潜心研究，精心设计，集全国各地先进经验于本书，希望能给广大师生高三总复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限，书中难免有疏忽与不妥，敬请广大读者批评赐教。

编　者

2002 年 6 月

目录 MU LU

第一章 函 数

第二章 三角函数

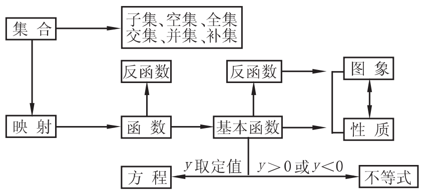
目录 MU LU

目录

MU LU

第一章 函 数

知 识 结 构



考核内容与要求

1. 集合:应理解集合、子集、全集、交集、并集、补集的概念,正确识别并能正确使用有关的术语和符号,正确判断元素与集合、集合与集合之间的关系,准确熟练地求出若干个集合的交集、并集、补集.

2. 映射与函数:理解映射与函数的概念及意义,掌握求函数的表达式、定义域、值、值域、最值的方法,理解函数与图象的对应关系,掌握作函数图象的基本方法,能够绘出基本函数的图象,能应用函数思想解决实际应用方面的问题.

3. 单调性、奇偶性:理解基本概念,能正确判断给定函数的单调区间、单调性或奇偶性,会求较简单函数的单调区间.

4. 反函数:掌握基本概念,会求给定函数的反函数以及反函数的定义域、值域. 会利用奇偶性或互反函数的图象关系作函数的图象.

5. 二次函数、幂函数、指数函数与对数函数:掌握这些基本函数的性质、运算法则和技巧,熟悉各类函数的图象并能利用图象解决与函数有关的问题.

6. 指数方程与对数方程:会解较简单的指数方程与对数方程.

内 容 综 述

本章重点:(1)理解集合、子集、交、并、补集的涵义及符号,正确进行交、并、补的运算. (2)理解并掌握所学过的几类基本函数的图象和性质,能熟练画出各类基本函数的图象,并能结合图象研究其性质. (3)能解较简单的指数方程与对数方程,对含字母系数的函数、方程能正确进行分类讨论.

本章难点:(1)反函数、周期函数、复合函数的概念及有关符号,求函数的单调区间(特别是复合函数)及函数的最值. (2)含字母系数的函数与方程的讨论.

高考命题趋势

函数及函数思想与方法是历年高考的热点. 客观题中,常考查函数的定义域、值域、解析式或图象,函数的单调性、奇偶性、周期性也是高考的热点. 对函数的考查,由考查具体函数向考查抽象函数发展,由考查知识型向考查能力型发展,在解答题中,多以方程和二次函数为背景,综合考查函数、方程和不等式的知识,重视考查推理能力,此类试题,一般要经过变形转化,化归为二次函数问题解决. 函数方面的应用题也是近几年高考的热点.

学 法 指 导

函数是中学数学的重要内容之一,贯彻于中学数学的各个部分,是中学数学主线,它不仅应用广泛,而且是学习高等数学的基础.

学习本章内容,应重点掌握以下几点:

1. 正确理解集合的有关概念,明确集合中的元素必须是确定的、无序的、互异的;掌握表示集合的几种方法:列举法、描述法和图示法;准确使用有关符号$\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\subset$,$=$表示元素与集合、集合与集合间的关系;会求给定集合的交集、并集、补集;能运用集合的观点处理代数、三角、解析几何的问题.

2. 正确理解映射、函数、反函数等有关概念、表示方法;会求函数的定义域,掌握求函数值域的常用方法;会求函数的反函数,掌握互为反函数的两函数图象间的关系;能根据函数解析式、图象研究函数的单调性、奇偶性、周期性,并能利用函数的性质绘出函数图象;会用运动、变化的观点分析具体问题中变量间的函数关系.

3. 熟练掌握二次函数、幂函数、指数函数和对数函数的概念、图象、性质,并能综合运用. 会用同底法、对数法、换元法等方法解指数、对数方程.

4. 定义域是函数的三要素之一,在研究函数问题时,一定要在定义域的范围内进行,这一点尤为重要. 数形结合是一种重要的数学思想,函数的图象能形象直观地反映出函数中变量间的变化关系,能帮助我们正确地理解题意、分析问题,迅速地找到解题思路. 所以在解决函数有关问题时,应

备课札记

备课札记

先绘出函数图象，充分利用图象帮助解题．方程、不等式、函数三者之间有着紧密的联系，要学会利用函数研究方程、不等式的基本方法．

教学建议

函数是中学数学中最重要的内容之一，应主要从定义、图象、性质三方面加以研究和考查，在复习时要全面掌握、透彻理解每一个知识点．

（一）复习要点及建议

1．准确把握集合及函数方面的数学符号及数学语言．

2．深刻理解一些常见函数（幂、指数、对数函数，一、二次函数等）的性质，熟悉它们的解析式与图象，以及解析式与图象之间的有机联系，把握数形之间的相互利用．

3．掌握函数图象变换的常用方法（平移、翻转等）．

4．对于二次函数问题应特别引起重视，复习时应适当加深加宽，不能停留在浮浅的基础阶段．

5．含参数函数的讨论是函数问题中的重点，复习时应适当加强这方面的训练，做到条理清楚、分类明确、不重不漏．

6．利用函数理论解应用题也应引起足够的重视．

（二）思想方法

数学中的四大思想——函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、等价转换思想在函数一章中全都得到了充分体现，本章更应突出数形结合思想与分类讨论思想，通过对例题、习题的理解，重点培养这两方面的能力．

（三）复习方法建议

1．集合是近代数学中最基本的概念之一，集合观点渗透于中学数学内容的各个方面，应能熟练进行对集合语言与几何语言之间的互化，掌握一般的集合运算法则．

2．函数中的最值问题在高考中多次出现，是高考中的重要题型之一，应能掌握几种求最值的常用方法，如配方法、判别式法、均值定理法等，而对于二元函数，应化成一元函数求最值．

3．含参数函数的讨论问题是高考热点问题，应高度重视，复习时宜适当加强，进行多种类型的训练，但不宜过于繁杂．

4．指数方程、对数方程类问题一般难度都不大，只要能掌握一些常规解法即可，不必过深要求．

5．关于函数性质问题的考查，在高考中，使用具体函数的越来越少，而使用抽象的函数符号的越来越多，面对这种形势，在复习函数性质时，应注意将具体函数的有关知识进行延伸，以适应高考的要求．

6．应重点放在对学生的逻辑思维、推理的培养上，尽量减少繁杂的运算．

7．应用题在高考中已形成规模，应注意提高分析问题的能力．

基础水平测试

一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

▶1．已知 $I=A\cup B=\{1,3,5,7,9\}$，且 $A\cap\overline{B}=\{3,7\}$，$\overline{A}\cap B=\{9\}$，则 $A\cap B$ 等于 …………………………………………（　　）

A．$\{1,3,7\}$　　B．$\{1,5\}$

C．$\{3,7,9\}$　　D．$\{3,7\}$

解析：画韦恩图．

答案：B

▶2．给定映射 $f:(x,y)\longrightarrow(2x+y,xy)$，点 $(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})$ 的原象是 ……………………（　　）

A．$(\frac{1}{6},-\frac{1}{36})$

B．$(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{4},\frac{2}{3})$

C．$(\frac{1}{36},-\frac{1}{6})$

D．$(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2}{3},\frac{1}{4})$

解析：$\begin{cases}2x+y=\frac{1}{6}\\ xy=-\frac{1}{6}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$

答案：B

▶3．设 $a=\log_{0.3}4$，$b=\log_4 3$，$c=0.3^{-2}$，则 a、b、c 的大小关系是 ………………………（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$c<b<a$　　D．$b<a<c$

解析：$a<0$，$0<b<1$，$c>1$．

答案：A

▶4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $g(x)=f(x+a)-f(x-a)(0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2})$ 的定义域是 …………………………………………（　　）

A．$[-a,1-a]$　　B．$[-a,1+a]$

C．$[a,1-a]$　　D．$[a,1+a]$

答案：C

▶5．与函数 $y=x$ 有相同图象的一个函数是 ………………………………………………（　　）

A．$y=\sqrt{x^2}$

B．$y=a\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$

C．$y=\frac{x^2}{x}$

D．$y=\log_a a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$

答案:D

▶6. 已知函数 $f(x)=\frac{2}{x^2}+\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 且 $f(-1)\approx1.62$,则 $f(1)$ 约等于……… ( )

A. 0.38 B. 1.62 C. 2.38 D. 2.62

解析:可判断 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数

$\therefore f(1)=2+\lg(1+\sqrt{1+1})=4-[2+\lg(-1+\sqrt{1+1})]\approx4-1.62=2.38$.

答案:C

△二、填空题(每小题6分,共24分)

▶7. 若 $f(x)=1+\lg(x+2)$,则 $f^{-1}(3)=$________.

解析:$f^{-1}(3)$ 即是原函数值为3时的自变量的值,$\therefore 1+\lg(x+2)=3$,$\therefore x=98$.

答案:98

▶8. 一批机器设备价值 a 万元,由于使用磨损,每年比上一年价值降低 $b\%$,则 n 年后,这些机器的价值为________.

答案:$a(1-b\%)^n$

▶9. 函数 $y=\log_2(-x^2+x)$ 的单调递增区间为________.

解析:由 $-x^2+x>0$ 得 $0<x<1$.

设 $u=-x^2+x$,则 u 在 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时为增函数,$x\in[\frac{1}{2},1)$ 时 u 为减函数;又 $y=\log_2u$ 为增函数,$\therefore y=\log_2(-x^2+x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{2}]$.

答案:$(0,\frac{1}{2}]$

▶10. 已知 $f(x)$ 是定义在R上的偶函数,且 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$,若当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时,$f(x)=x$,则 $f(5.5)=$______.

解析:由已知 $f(x+4)=f[(x+2)+2]$

$=-\frac{1}{f(x+2)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$.

$\therefore f(5.5)=f[(-2.5)+8]=f(-2.5)$

$=f(2.5)=2.5$.

答案:2.5

△三、解答题(每小题20分,共40分)

▶11. 已知 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$,$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(1)求 $f^{-1}(x)$ 的表达式,并判断它的奇偶性;

(2)若 $f^{-1}(x)\cdot g(x)=1$,求 x 的值.

解:(1)设 $y=f(x)$,则 $\sqrt{x^2+1}+x=e^y$,

$\therefore \sqrt{x^2+1}=e^y-x$,两边平方解得

$x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$,即 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$f^{-1}(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$=-f^{-1}(x)$

$\therefore f^{-1}(x)$ 是奇函数.

(2)由 $f^{-1}(x)\cdot g(x)=1$ 得 $\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})=1$

$\therefore e^{4x}-4\cdot e^{2x}-1=0$,

$\therefore e^{2x}=\frac{4\pm\sqrt{2c}}{2}$(舍负,$\because e^{2x}>c$)

$\therefore e^{2x}=2+\sqrt{5}$,$\therefore x=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

▶12. 设 $f(x)=2(\log_2x)^2+2a\log_2x+b$,已知 $x=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 有最小值 -8.

(1)求 a 与 b 的值;

(2)在(1)的条件下,求 $f(x)>0$ 的解集 A;

(3)集合 $B=\{x\,|\,|x-t|\leqslant\frac{1}{2},x\in\mathbf{R}\}$,且 $A\cap B=\varnothing$,求实数 t 的取值范围.

解:(1) $f(x)=2(\log_2x-\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{2}$,由已知:当 $x=\frac{1}{2}$,即 $\log_2x=-1$ 时,即 $\frac{a}{2}=-1$,$a=-2$ 时,$b-\frac{a^2}{2}=b-2=-8$,$\therefore b=-6$

$\therefore a=-2,b=-6$

(2)由 $f(x)=2(\log_2x)^2+4\log_2x-6>0$ 得 $\log_2x>1$ 或 $\log_2x<-3$.

$\therefore x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{8}$

$\therefore A=\{x|x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{8}\}$

(3) $B=\{x|t-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant t+\frac{1}{2}\}$,$\because A\cap B=\varnothing$

$\therefore$①当 $B=\varnothing$ 时,$t-\frac{1}{2}>t+\frac{1}{2}$ 这是不可能的.

②当 $B\neq\varnothing$ 时,$A\cap B=\varnothing$ 满足 $t+\frac{1}{2}\leqslant0$ 或

$\begin{cases}t-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{8}\\t+\frac{1}{2}\leqslant2\end{cases}$,解得 $\frac{5}{8}\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$ 或 $t\leqslant-\frac{1}{2}$.

§1.1 集合的概念

复习目标

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能够掌握有关的术语和符号,能正确地表

备课札记

备课札记

示一些较简单的集合.

回顾性题组

▶1. 已知全集 $M=\{a|\frac{6}{5-a}\in \mathbf{N}$ 且 $a\in \mathbf{Z}\}$，则 M 等于 ……………………………………（　　）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{1,2,3,6\}$　　D. $\{-1,2,3,4\}$

解析：由 $\frac{6}{5-a}\in \mathbf{N}$ 知 $5-a=1,2,3,6$，由 $a\in \mathbf{Z}$ 可得 $a=-1,2,3,4$.

答案：D

▶2. 若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，并且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数有 ……………………………………（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析：由 $A\cup B=\{1,3,x\}$ 知 B 中的 $x^2=3$ 或 $x^2=x$，若 $x^2=3$ 得 $x=\pm\sqrt{3}$，若 $x^2=x$ 得 $x=0$ 或 $x=1$（舍去）　∴x 可取 $0,\pm\sqrt{3}$ 三个数.

答案：C

▶3. 设集合 $M=\{1,2\}$，$N=\{2,3\}$，则满足 $P\subset(M\cup N)$ 的集合 P 的个数是 ………（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

解析：$M\cup N=\{1,2,3\}$，P 是 $M\cup N$ 的真子集，∴P 有 2^3-1 个.

答案：B

▶4. 如果 M、N 为非空集合，那么 $M\cup N=M$，是 $N\subset M$ 的 ……………………………（　　）

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：$M\cup N=M\Rightarrow N\subseteq M$　$N\subset M\Rightarrow M\cup N=M$.

答案：C

样板性题组

▶1. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，求集合 A、B.

解：用韦恩图（文氏图）将题中给出的数填入相应的位置，3、5、7 三数只能填到图 1—1 中 $A\cap\overline{B}$ 处，所以 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

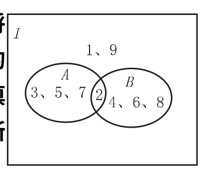


图 1—1

评述：当集合中的元素是单个的数或事物而进行集合运算时，常借助韦恩图；当集合是数的范围时的集合运算常借助于数轴.

▶2. 已知 $A=\{x|x^2-2x+a\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，且 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围.

解：可得 $B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，对于 A，分以下三种情况：(1) $\Delta<0\Rightarrow a>1$，此时 $A=\varnothing$，满足 $A\subset B$；(2) $\Delta=0\Rightarrow a=1$，此时 $A=\{1\}$，满足 $A\subset B$；(3) $\Delta>0\Rightarrow a<1$，此时 $A=\{x|1-\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-a}\}$，$A\not\subset B$.

综上知所求 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

评述：涉及集合的运算时，要注意 $\varnothing$ 的情况.

▶3. 已知 $A=\{x|x^3+3x^2+2x>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$ 且 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x|x>-2\}$，求 a、b 的值.

解：$A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>0\}$，设 $B=[x_1,x_2]$，由 $A\cap B=(0,2]$，知 $x_2=2$，

且 $-1\leqslant x_1\leqslant 0$　　①

由 $A\cup B=(-2,+\infty)$ 知 $-2\leqslant x_1\leqslant -1$　　②

由①、②知 $x_1=-1$，$x_2=2$，

∴$a=-(x_1+x_2)=-1$，$b=x_1x_2=-2$.

评述：本题应熟悉集合的交与并的涵义. 熟练掌握在数轴上表示区间（集合）的交与并的方法.

巩固性题组

▶1. 填空题

(1) 数集 $\{2a,a^2-2a\}$ 中，a 的取值范围是________.

解析：根据集合中元素的互异性，

由 $2a\neq a^2-2a\Rightarrow a\neq 0$ 且 $a\neq 4$.

答案：$(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$

(2) 已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{x|mx-3=0\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为________.

解析：若 $m=0$，则 $B=\varnothing$，满足 $A\cup B=A$；若 $m\neq 0$，则 $B=\{\frac{3}{m}\}$，要使 $A\cup B=A$，应 $\frac{3}{m}=1$ 或 3. 可得 $m=3$ 或 1，故所求 m 的值为 0，1，3.

答案：0，1，3

(3) 若已知 $B=\{a,b,c,d,e\}$，$C=\{a,c,e,f\}$，且集合 A 满足 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，则集合 A 的个数是______.

解析：因集合 B 与 C 的公共元素有 a、c、e，故集合 $\{a,c,e\}$ 以及它的所有子集均可作集合 A，所以 A 的个数是 $2^3=8$.

答案：8

▶2. 选择题

(1) 已知全集 $I=A\cup B=\{1,3,5,7,9\}$，且 $A\cap\overline{B}=\{3,7\}$，$\overline{A}\cap B=\{5,9\}$，则 $A\cap B$ 为 ……………………………………………（　　）

A. $\{1,3,7\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{3,7\}$

解析：由已知得 $3,7\in A$；$3,7\notin B$；$5,9\in B$；5，

$9\notin A$. ∵$1\in I$,若 $1\in A$. 由则 $1\notin A\cap\overline{B}$ 得 $1\notin\overline{B}$,故知 $1\in B$,∴$A=\{1,3,7\}$,$B=\{1,5,9\}$,∴$A\cap B=\{1\}$.

答案:B

(2)已知集合 $M=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$,$N=\{\theta|\tg\theta<\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$,那么 $M\cap N$ 为区间 ……………………………… ( )

A. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$

C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　D. $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

解析:由三角函数图象可知 $M=\{\theta|\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\}$,$N=\{\theta|\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\}$,所以 $M\cap N=\{\theta|\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\}$.

答案:A

(3)定义集合 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$,若 $M=\{1,2,3,4,5\}$,$N=\{2,3,6\}$,则 $N-M$ 等于 ……………………………………… ( )

A. M　　B. N

C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{6\}$

解析:$A-B$ 的含义是从集合 A 中去掉 B 中的元素剩余的 A 中的元素组成的集合,

∴$N-M=\{6\}$.

答案:D

▶3. 已知集合 $A=\{x|-2k+6<x<k^2-3\}$,$B=\{x|-k<x<k\}$,若 $A\subset B$,求实数 k 的取值范围.

解:由 $A\subset B$,知 $B\neq\varnothing$,即 $-k<k\Rightarrow k>0$

(ⅰ)若 $A=\varnothing$,即 $-2k+6\geqslant k^2-3\Rightarrow k^2+2k-9\leqslant0\Rightarrow-1-\sqrt{10}\leqslant k\leqslant-1+\sqrt{10}$,要使 $A\subset B$,须 $0<k\leqslant-1+\sqrt{10}$

(ⅱ)若 $A\neq\varnothing$,要使 $A\subset B$,

须$\begin{cases}-k<k\\-k\leqslant-2k+6\\k^2-3\leqslant k\\-2k+6<k^2-3\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}k>0\\k\leqslant6\\\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\k<-1-\sqrt{10}\text{或}k>-1+\sqrt{10}\end{cases}$

解得 $-1+\sqrt{10}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}$,

由(ⅰ)、(ⅱ)知所求 k 的取值范围是 $(0,\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$.

▶4. 设 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y|y=3x+10,x\in A\}$,$C=\{z|z=5-x,x\in A\}$,且 $B\cap C=c$,求实数 a 的取值范围.

解:$A=\{x|-3\leqslant x\leqslant a\}$,知 $a\geqslant-3$. 由 $-3\leqslant x\leqslant a$ 知 $1\leqslant3x+10\leqslant3a+10$. 于是 $B=\{y|y=3x+10,x\in A\}=\{y|1\leqslant y\leqslant3a+10\}$,由 $-3\leqslant x\leqslant a$. 知 $5-a\leqslant5-x\leqslant8$,

∴$C=\{z|z=5-x,x\in A\}=\{z|5-a\leqslant z\leqslant8\}$

由 $B\cap C=c$ 知 $C\subseteq B$,∴$\begin{cases}3a+10\geqslant8\\5-a\geqslant1\\a\geqslant-3\end{cases}$,

∴$-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant4$.

小结归纳

1. 明确集合中元素的确定性、互异性和无序性,并注意此性质在解题中的应用.

2. 要熟练掌握集合的图形表示(即韦恩图或称文氏图)、数轴表示等基本方法.

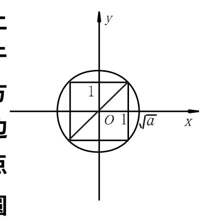
3. 理解集合的基本概念、相互关系、术语符号等,能正确地表示出一些较简单的集合.

备课资料

一、备选题

▶1. 设 $P=\{(x,y)||x|\leqslant1,|y|\leqslant1\}$,$Q=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a,a>0\}$,要使 $P\cap Q=P$,求 a 的取值范围.

解:集合 P 是坐标平面上以原点为中心,边平行于坐标轴且边长为 2 的正方形围成的区域(包括边界),而集合 Q 是以原点为圆心,以 $\sqrt{a}$ 为半径的圆域(包括边界).(如图)要使 $P\cap Q=P$,只能 $\sqrt{a}\geqslant\sqrt{2}$,即 $a\geqslant2$.



评述:要理解集合与图形间的关系.

▶2. 设 $I=\mathbf{R}$,$A=\{x|x^2-x-2<0\}$,$B=\{x||x|=y+1,y\in A\}$,求 $\overline{B}$,$A\cap B$,$A\cup B$,$A\cup\overline{B}$,$A\cap\overline{B}$,$\overline{A\cup B}$,$\overline{A}\cap\overline{B}$.

解:可得 $A=(-1,2)$. 对于 B:由 $-1<y<2$ 得 $0<y+1<3$,即 $0<|x|<3$,

故有 $B=(-3,0)\cup(0,3)$. 在数轴上标出区间,

可得 $\overline{B}=(-\infty,-3]\cup\{0\}\cup[3,+\infty)$;

$A\cap B=(-1,0)\cup(0,2)$;$A\cup B=(-3,3)$;

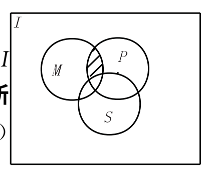
$A\cup\overline{B}=(-\infty,-3]\cup(-1,2)\cup[3,+\infty)$;

$A\cap\overline{B}=\{0\}$;

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

二、高考类题浅析

▶1. 如图,I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是…… ( )



备课札记

备课札记

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\overline{S}$

D. $(M\cap P)\cup\overline{S}$ （1999 年·全国高考）

答案：C

▶2. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是 ……………………………………（　　）

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

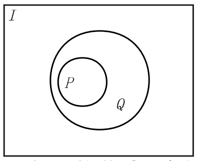
（2000 年·全国高考）

解析：用列举法分别写出集合 A 与 B 中的所有元素，易见 $A\cup B$ 中共有 16 个元素.

答案：C

▶3. 设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subset Q\subset I$，若求含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是______.（2000 年·上海春季高考）

解析：(1)如韦恩图所示，则 $\overline{Q}\cap P=\varnothing$.



(2)构造满足条件的集合，实例论证

$I=\{1,2,3\}$，$P=\{1\}$，$Q=\{1,2\}$，则 $\overline{Q}=\{3\}$，$\overline{P}=\{2,3\}$，易见 $\overline{Q}\cap P=\varnothing$.

▶4. 设全集 $I=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是 ………（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

（2000 年·京、皖春季高考）

解析：思路 1：根据补集的定义，先求 $\overline{M}=\{b,e\}$，$\overline{N}=\{a,c\}$，再求 $\overline{M}\cap\overline{N}=\varnothing$.

思路 2：根据并集的定义，先求 $M\cup N=\{a,c,d\}\cup\{b,d,e\}=I$. 根据反演律. $\overline{M}\cap\overline{N}=\overline{M\cup N}=\varnothing$.

思路 3：此题根据集合文氏图，给出全集 I 与 M、N 的关系图. 从而得出结论.

答案：A

§1.2　集合的运算

复　习　目　标

理解并掌握集合交、并、补的运算法则，能够运用集合语言与集合思想解决有关问题.

回 顾 性 题 组

▶1. 集合 $M=\{x|x^2+2x-a=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $\varnothing\subset M$，则实数 a 的范围是 ……………………（　　）

A. $a\leqslant -1$　　B. $a\leqslant 1$

C. $a\geqslant -1$　　D. $a\geqslant 1$

解析：$\because\varnothing\subset M$，$\therefore M$ 至少含有一个元素. 故应 $\Delta=4+4a\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -1$

答案：C

▶2. 全集 $I=\mathbf{R}$，$M=\{x|y=\log_{\frac{1}{4}}x\}$，$N=\{y|y=2^x\}$，则 $M\cap\overline{N}$ 等于 …………………（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $\varnothing$

C. $[0,+\infty)$　　D. $\mathbf{R}$

解析：$M=(0,+\infty)$，$N=(0,+\infty)$，$\overline{N}=(-\infty,0]$

答案：B

▶3. 已知集合 $A\subseteq\{2,3,7\}$，且 A 中至多有一个奇数，则这样的集合共有……………（　　）

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

解析：分含 1 个奇数和不含奇数.

答案：D

▶4. 已知全集 $I=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$，$M=\{x|\lg(x-2)\leqslant 0\}$，$N=\{x|\frac{2-x}{x-3}\geqslant 0\}$，则 $\overline{M}\cup\overline{N}$ 等于 ……………………………………（　　）

A. $(2,3)$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{3\}$

解析：$I=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$，$M=\{x|2<x\leqslant 3\}$，$N=\{x|2\leqslant x<3\}$，故 $\overline{M}=\{2\}$，$\overline{N}=\{3\}$. 故 $\overline{M}\cup\overline{N}=\{2\}\cup\{3\}=\{2,3\}$，也可用 $\overline{M}\cup\overline{N}=\overline{M\cap N}$求得.

答案：B

▶5. 若 $I=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 9\}$，$M=\{(x,y)||x|<1,|y|<1\}$，$N=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 5\}$. 则 $M\cap\overline{N}=$________.

解析：可通过图示.

答案：$\varnothing$

样 板 性 题 组

▶1. 设集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$，若 $B\neq\varnothing$，且 $B\subseteq A$，求 a、b 的值.

解：对于 B，解得 $x=a\pm\sqrt{a^2-b}$. 当 $B=\{1\}$ 时，方程有二等根 1，此时 $\Delta=a^2-b=0$，可得 $a=1,b=1$；当 $B=\{-1\}$时，方程有二等根 -1，且$\Delta=0$，可得 $a=-1,b=1$；当 $B=\{-1,1\}$时，方程有二异根，可得 $a=0,b=-1$.

▶2. 集合 $A=\{x|x^2+px-2=0\}$，$B=\{x|x^2-x+q=0\}$，若 $A\cup B=\{-2,0,1\}$，求 p、q 的值.

解：显然 $0\notin A$. 故必有 $0\in B$，从而推出 $q=0$，所以 $B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$，知 $A=\{-2\}$或 $A=\{-2,1\}$. 若 $A=\{-2\}$，说明方程 $x^2+px-2=0$ 有两个相等实根 -2，而 $(-2)\times(-2)=4\neq -2$，矛盾，故 $A\neq\{-2\}$. 若 $A=\{-2,1\}$，则 $-p=-2+1$，得 $p=1$，所以 $p=1,q=0$.

▶3. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 a、$k\in N$，$x\in A$，$y\in B$，$f: x\to y=3x+1$ 是 A 到 B 上的一个函数，求 a、k 的值.

解：$x=1$ 时有 $y=4$；$x=2$ 时有 $y=7$；$x=3$ 时应有 $y=10\in B$.

$\because a^4\neq 10(\because a\in \mathbf{N})$　$\therefore a^2+3a=10$.

解得 $a=2$ 或 $a=-5$（不合题意，舍去）；

$x=k$ 时 $y=3k+1=a^4=16\Rightarrow k=5$.

$\therefore a=2,k=5$.

评述：本题考查集合的无序性、互异性及对函数对应法则的理解.

▶4. 已知集合 $A=\{x|(\frac{1}{2})^{x^2-x-6}<1\}$，$B=\{x|\log_4(x+a)<1\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：由 $(\frac{1}{2})^{x^2-x-6}<1$ 得 $x<-2$ 或 $x>3$.

$\therefore A=\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$

由 $\log_4(x+a)<1$ 得 $-a<x<4-a$，

$\therefore B=\{x|-a<x<4-a\}$

$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore \begin{cases}-a\geqslant -2\\ 4-a\leqslant 3\end{cases}$，$\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$

评述：涉及集合的运算问题，常先将给定的集合进行化简，再借助数轴或韦恩图.

▶5. 已知 $\mathbf{R}$ 为全集，$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

（2001 年·上海春季高考）

解：由已知 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant \log_{\frac{1}{2}}4$.

$\because y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，

$\therefore 3-x\leqslant 4$.

由 $\begin{cases}3-x\leqslant 4,\\ 3-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<3$.

$\therefore A=\{x|-1\leqslant x<3\}$.

由 $\frac{5}{x+2}\geqslant 1$，解得 $-2<x\leqslant 3$.

$\therefore B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$.

于是 $\overline{A}=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}$.

故 $\overline{A}\cap B=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

巩固性题组

▶1. 设全集 $U=\{(x,y)|x,y\in \mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-4}{x-1}=3\}$，$N=\{(x,y)|y=3x+1\}$，则 $\overline{M}\cap N=$________.

解析：M 是直线 $y=3x+1$ 上的点集去掉 $(1,4)$，$\therefore \overline{M}$ 是直线外的点和直线上的 $(1,4)$ 点组成的集合，N 是直线 $y=3x+1$ 上的点集，

$\therefore \overline{M}\cap N=\{(1,4)\}$.

答案：$\{(1,4)\}$

▶2. 已知 $M=\{x|\frac{x+1}{2}\in \mathbf{N}\}$，$P=\{x|x=3k,k\in \mathbf{N}\}$，$I=\mathbf{N}$，则 $\overline{M}\cap P=$________.

解析：$M=\{x|x=2m-1,m\in \mathbf{N}\}$，为正奇数集合. 则 $\overline{M}$ 为正偶数集合.

答案：$\{x|x=6n,n\in \mathbf{N}\}$

▶3. 设 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

解：若 $A=\varnothing$，满足 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，应 $\Delta<0\Rightarrow -4<p<0$；若 $A\neq\varnothing$，要使 $A\cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，应 $\Delta\geqslant 0$ 且 $p+2\geqslant 0\Rightarrow p\geqslant 0$，

综上可得 $p>-4$.

▶4. 已知 $A=\{x|\log_2(x^2-2x-3)>\log_2 5\}$，$B=\{x|x^2-ax-2a^2\leqslant 0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：可得 $A=\{x|x<-2$ 或 $x>4\}$，$a>0$ 时，得 $B=\{x|-a\leqslant x\leqslant 2a\}$，由 $-a<-2$ 或 $2a>4$ 得 $a>2$；$a<0$ 时，得 $B=\{x|2a\leqslant x\leqslant -a\}$，

由 $2a<-2$ 或 $-a>4$ 得 $a<-1$.

▶5. 已知 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，$Q=\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\}$，且 $P\cap Q=Q$，求 m 的取值范围.

解：点集 P 表示平面上以 $O_1(-2,3)$ 为圆心，2 为半径的圆所围成的区域（包括圆周），点集 Q 表示平面上以 $O_2(-1,m)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部. 要使 $P\cap Q=Q$，应 $\odot O_2$ 内含或内切于 $\odot O_1$. 故有：$|O_1O_2|^2\leqslant (R_1-R_2)^2$，

即 $(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant (2-\frac{1}{2})^2$.

解得 $3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

评述：本题选题目的为：熟悉用集合语言表述的几何问题；利用数形结合方法解题.

小结归纳

1. 对于集合问题，要首先确定属于哪类集合（数集、点集或某类图形），然后确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

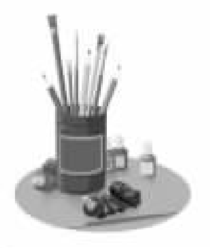
3. 含参数的集合问题，多根据集合元素的互异性来处理，有时需进行讨论.

4. 集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融汇贯通.

备课资料

一、备选题

备课札记



备课札记

▶1. 已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值.

解：$\begin{cases}a-3=-3\\a^2\neq 2a-1\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=-3\\a^2\neq a-3\\a+1\neq a^2+1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\a\neq 1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\a\neq 0\text{ 且 }a\neq 1\end{cases}$

$\Rightarrow a=-1$

▶2. 设 A 是数集，且满足条件：若 $a\in A$，$a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$，如果 $2\in A$，求 A.

解：$\because 2\in A$，$\therefore$ 由题设知 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$. 又由 $-1\in A\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$. 再由 $\frac{1}{2}\in A\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$. $\therefore A=\{-1,\frac{1}{2},2\}$

△二、小资料

新编全日制普通中学数学教学中，有关集合的常用符号，有些与通常写法相比，已发生了变化，应引起注意. 如：

1. $\{x\in A\mid p(x)\}$ 使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元素之集合.

2. **N** 非负整数集；自然数集（其中包括“0”）.

3. $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集.

§1.3 映射与函数

复 习 目 标

1. 了解映射的概念，能根据定义判断所给对应是否映射，会求映射中所指定的象或原象.

2. 理解函数的概念，掌握函数的三种表示方法.

回顾性题组

▶1. 下列从 A 到 B 的对应法则 f 是映射的为…………………………………………（　　）

A. $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}^+$，f：取绝对值

B. $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}$，f：开平方

C. $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}$，f：取对数

D. $A=\mathbf{Q}$，$B=\{$偶数$\}$，f：乘 2

答案：C

▶2. 点 (x,y) 在映射 f 下的象为 $(\frac{\sqrt{3}x+y}{2},\frac{-x+\sqrt{3}y}{2})$，则点 $(2,0)$ 在 f 作用下的原象为________.

解析：解方程组 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}x+y}{2}=2\\\frac{-x+\sqrt{3}y}{2}=0\end{cases}$

答案：$(\sqrt{3},1)$

▶3. 集合 $A=\{3,4\}$，$B=\{5,6,7\}$，那么可建立从 A 到 B 的映射个数是________，从 B 到 A 的映射个数是________.

解析：从 A 到 B 可分两步进行，第一步 A 中的元素 3 可有 3 种对应方法（可对应 5 或 6 或 7），第二步 A 中的元素 4 也有这 3 种对应方法，由乘法原理，不同的映射种数 $N_1=3\times3=9$；反之从 B 到 A：道理相同，有 $N_2=2\times2\times2=8$.

答案：9　8

▶4. 下列四组函数中，表示相同函数的一组是…………………………………………………（　　）

A. $y=2^{\log_2(x+1)}$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$

B. $y=\frac{x^2}{x}$ 和 $y=\log_3 3^x$

C. $y=(\frac{x+1}{\sqrt{x+1}})^2$ 和 $y=e^{\ln(x+1)}$

D. $y=(\sqrt{x})^2$ 和 $y=a^{\log_a x}(a>0$ 且 $a\neq1)$

答案：C

▶5. 若 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$________.

解析：令 $t=\sqrt{x}+1(t\geqslant1)$，则 $\sqrt{x}=t-1$，

$\therefore f(t)=(t-1)^2+2t-2$

即 $f(t)=t^2-1(t\geqslant1)$

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$

答案：$f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$

▶6. $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$，则 $f(\frac{1}{2})$ 等于 ……………………………（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 15　　D. 30

解析：令 $g(x)=\frac{1}{2}$，得 $x=\frac{1}{4}$. 把 $x=\frac{1}{4}$ 代入 $\frac{1-x^2}{x^2}$，得 $f(\frac{1}{2})=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{(\frac{1}{4})^2}=15$.

答案：C

样板性题组

▶1. 已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant0\\-1 & x<0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，并作图象.

评述：了解函数符号的意义，理解相互之间的关系.

答案：$f[g(x)]=\begin{cases}2x^2-1 & x\geqslant 0\\ -3 & x<0\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}(2x-1)^2 & x\geqslant\frac{1}{2}\\ -1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$ 图象略.

▶2. A、B 两地相距 150 公里，某汽车以每小时 50 公里的速度从 A 地到 B 地，在 B 地停留 2 小时之后，又以每小时 60 公里的速度返回 A 地. 写出该车离开 A 地的距离 s（公里）关于时间 t（小时）的函数关系，并画出图象.

解：由 $50t=150$ 得 $t_1=3$，

由 $60t=150$ 得 $t_2=\frac{5}{2}$.

∴当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时，$s=50t$；当 $3<t\leqslant 5$ 时，$s=150$；当 $5<t\leqslant 7.5$ 时，

$s=150-60(t-5)$，故所求函数关系式为：

$s=\begin{cases}50t & t\in[0,3]\\ 150 & t\in(3,5]\\ 150-60(t-5) & t\in(5,7.5]\end{cases}$

图象略.

▶3. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)+f(x+2)=0$，当 $-1<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x-1$，求当 $1<x\leqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

解：设 $1<x\leqslant 3$，则 $-1<x-2\leqslant 1$，又对任意的 x，有 $f(x)+f(x+2)=0$，∴ $f(x+2)=-f(x)$，∴ $f(x-2)=-f[(x-2)+2]=-f(x)$；又 $-1<x-2\leqslant 1$ 时，$f(x-2)=2(x-2)-1=2x-5$，

∴ $f(x)=-f(x-2)=-2x+5(1<x\leqslant 3)$.

评述：将 $1<x\leqslant 3$ 转化成 $-1<x-2\leqslant 1$，再利用已知条件是解本题的关键.

▶4. $\triangle ABC$ 中，$|AB|=4$，$|AC|=2$，P、Q 分别是 AB、AC 上的动点，且满足 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，若设 $|AP|=x$，$|AQ|=y$.

(1)写出 x 的取值范围；

(2)求 $y=f(x)$ 的解析式；

(3)作出 $y=f(x)$ 的图象.

解：(1)由已知 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ 得 $\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin A\Rightarrow xy=4$. 而 $|AB|=4$，$|AC|=2$，点 P、Q 分别在 AB、AC 上运动.

∴ $0<x\leqslant 4$，$0<y\leqslant 2$ 有 $xy\leqslant 2x$.

∴ $2x\geqslant 4$ 得 $x\in[2,4]$

(2) $y=\frac{4}{x}(2\leqslant x\leqslant 4)$.

(3)图象略.

评述：本题是函数在几何问题上的应用，应借助图形研究变量间的关系，以建立函数式，所写出的函数式不可忘记定义域.

巩固性题组

▶1. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$，映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是……………………………………（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解析：由 $2^n+n=20$ 求 n. 用代入法可知选 C.

答案：C

▶2. 设集合 A 中含 4 个元素，B 中含 3 个元素. 现建立从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$，且使 B 中每个元素在 A 中都有原象，则这样的映射有____个.

解析：先在 A 中的 4 个元素中任选两个构成一个"元素组"，现在 A 中看作只有 3 个元素（构成的"元素组"看作 1 个元素）. 再将 A 中的这 3 个元素进行全排列，以对应 B 中的 3 个元素，故不同的映射共有 $C_4^2P_3^3=36$（个）.

答案：36

▶3. 如图 1—2，$y=f(x)$ 的图象为圆心在原点的两段弧，则 $f(x)$ 的解析式应是____.

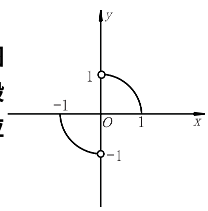


图 1—2

答案：$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (x>0)\\ -\sqrt{1-x^2} & (x<0)\end{cases}$

▶4. 已知 $f(x+1)=\begin{cases}\sin x & x\geqslant 0\\ \lg(-x) & x<0\end{cases}$，则 $f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)=$________.

解析：设 $t=x+1\Rightarrow x=t-1$ 可得：

$f(t)=\begin{cases}\sin(t-1) & t\geqslant 1\\ \lg(1-t) & t<1\end{cases}$

∴ $f(\frac{\pi}{2}+1)\cdot f(-9)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\lg 10=1$

答案：1

▶5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(ab)=f(a)+f(b)$，且 $f(2)=p$，$f(3)=q$，则 $f(36)=$________.

解析：$f(36)=f(6\times 6)=f(6)+f(6)=2f(6)=2f(2\times 3)=2[f(2)+f(3)]=2(p+q)$.

答案：$2(p+q)$

▶6. 如果函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(1+x)=-f(1-x)$，试求 $f(2)+f(-2)$ 的值.

解：∵对任何 $x\in\mathbf{R}$ 总有 $f(1+x)=-f(1-x)$.

∴当 $x=0$ 时应有 $f(1+0)=-f(1-0)$，

即 $f(1)=-f(1)$. ∴ $f(1)=0$，

又∵ $f(x)=(x+a)^3$

备课札记

备课札记

$\therefore f(1)=(1+a)^3$,

故有 $(1+a)^3=0\Rightarrow a=-1$

$\therefore f(x)=(x-1)^3$.

$\therefore f(2)+f(-2)=(2-1)^3+(-2-1)^3$

$=1^3+(-3)^3=-26$.

评述:正确理解函数符号所代表的意义,对所给出的符号函数应能作出正确的理解和判断,并进行熟练运算.

小结归纳

1. 理解映射的概念,即对于映射 $f:A\to B$,须①A、B 为非空集合,②A 中无"剩余"元素,即没有不参与对应的元素,③单值对应.

2. 理解函数与映射的关系. 函数的三要素为定义域、值域和对应法则,其中定义域与对应法则放在一起构成一个完整的函数,缺一不可.

3. 若函数在定义域的不同子集上对应法则不同,可用几个式子来表示函数,这种形式的函数叫分段函数,它是一类重要函数.

备课资料

一、备选题

▶1. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$,$g(x)=\begin{cases}x & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$,则 $f[g(x)]=$________.

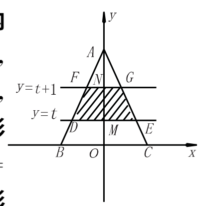
解析:$x\leqslant 0$ 时,$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]$

$=\frac{1}{2}[x-x]=0$,$x>0$ 时,

$f[g(x)]=\frac{1}{2}[x^2+|x^2|]=\frac{1}{2}[x^2+x^2]=x^2$.

答案:$f[g(x)]=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$

▶2. 如图,在坐标平面内 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0,2)$,$B(-1,0)$,$C(1,0)$,有一个随 t 变化的带形区域,其边界为直线 $y=t$ 和 $y=t+1$. 设此带形区域覆盖 $\triangle ABC$ 的面积为 S. 试求以 t 为自变量的函数 S 的解析表达式.



解:设直线 $y=t$ 与 $y=t+1$ 截 $\triangle ABC$ 所得线段为 DE 和 FG,与 y 轴交点为 M、N,则 $MN=1$.

(1)当 $t\leqslant -1$ 时,$S=0$

(2)当 $-1<t\leqslant 0$ 时,$0<t+1\leqslant 1$. 这时 S 是梯形 $BCGF$ 的面积,因 $FG=AN=2-(t+1)=1-t$.

$\therefore S=\frac{1}{2}(BC+FG)\cdot ON=-\frac{1}{2}(t-1)^2+2$

(3)当 $0<t\leqslant 1$ 时,$1<t+1\leqslant 2$,这时 S 是梯形 $DEGF$ 的面积. $DE=AM=2-t$,$FG=1-t$,有 $S=\frac{1}{2}[(2-t)+(1-t)]\cdot 1=\frac{3}{2}-t$

(4)当 $1<t\leqslant 2$ 时,$2<1+t\leqslant 3$,这时 $S=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AM=\frac{1}{2}(t-2)^2$

(5)当 $t>2$ 时 $S=0$. 综上讨论,得:

$$S=\begin{cases}0 & (t\leqslant -1)\\ -\frac{1}{2}(t-1)^2+2 & (-1<t\leqslant 0)\\ -t+\frac{3}{2} & (0<t\leqslant 1)\\ \frac{1}{2}(t-2)^2 & (1<t\leqslant 2)\\ 0 & (t>2)\end{cases}$$

二、小资料

▶1. 映射是一种对应关系,过去一直仅作为学习函数的基础,未作为考查内容,但近两年(1999 年与 2000 年)的高考题中却连续出现了映射问题,应引起重视.

▶2. 在新编教材中:

(1)全集用"U"表示,不再用"I".

(2)A 中子集 B 的补集(余集)用"$\complement_A B$"表示,不再用"$\bar{B}$".

(3)B 真包含于 A,也即 B 是 A 的真子集,记为"$B\subsetneqq A$",不再是"$B\subset A$".

(4)B 包含于 A,也即 B 是 A 的子集记为:"$B\subseteq A$",也可记为"$B\subset A$",也与以前有所不同.

§1.4 函数的解析式

复习目标

理解函数的概念,能根据函数所具有的某些性质或它所满足的一些关系,求出它的解析式,并掌握解析式的一些形式的变换.

回顾性题组

▶1. 设 $f(x)=2x+3$,$g(x+2)=f(x)$,则 $g(x)$ 等于 …………………………………… ( )

A. $2x+1$　　B. $2x-1$

C. $2x-3$　　D. $2x+7$

解析:由 $g(x+2)=f(x)\Rightarrow g(x+2)=2x+3$,换元:令 $t=x+2$,则 $x=t-2$ 代入可得 $g(t)=2t-1$.

答案:B

▶2. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+1$，则函数 $f(x)$ 的解析式为 ……………………………… ( )

A. $f(x)=x^2$

B. $f(x)=x^2+1(x\geqslant 1)$

C. $f(x)=x^2-2x+2(x\geqslant 1)$

D. $f(x)=x^2-2x(x\geqslant 1)$

解析：令 $\sqrt{x}+1=t$，则 $t\geqslant 1$，$x=(t-1)^2$

$\therefore f(t)=(t-1)^2+1\quad(t\geqslant 1)$.

答案：C

▶3. 若 $f(x)=x^2-mx+n$，$f(n)=m$，$f(1)=-1$，则 $f(-5)=$________.

解析：将 $f(n)=m$ 与 $f(1)=-1$ 并成方程组，解得 $m=1$，$n=-1$，可知 $f(x)=x^2-x-1$.

答案：29

▶4. 已知 $f(x)=ax^2+bx(ab\neq 0)$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1+x_2)=$______

解法一：由 $f(x_1)=f(x_2)$，

即 $ax_1^2+bx_1=ax_2^2+bx_2$

$\Rightarrow a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]=0$，$\because x_1\neq x_2$

$\therefore a(x_1+x_2)+b=0$

故有 $(x_1+x_2)[a(x_1+x_2)+b]=0$

即 $f(x_1+x_2)=0$

解法二：$\because f(x_1)=f(x_2)$，

$\therefore$ 点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$ 关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称，故 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

$\therefore f(x_1+x_2)=a(-\dfrac{b}{a})^2+b(-\dfrac{b}{a})=0$.

答案：0

▶5. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的最大值为 13，且 $f(3)=f(-1)=5$，求 $f(x)$ 的解析式.

解：$\because f(3)=f(-1)$，

$\therefore$ 抛物线 $y=f(x)$ 有对称轴 $x=1$，故可设 $f(x)=a(x-1)^2+13$，将点 $(3,5)$ 代入，求得 $a=-2$.

$\therefore f(x)=-2(x-1)^2+13=-2x^2+4x+11$.

▶6. 若 $f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{1-x}$. 求 $f(\cos^2 x)$.

解：令 $\dfrac{1}{x}=t$，可得 $f(t)=\dfrac{1}{t-1}(t\neq 0,t\neq 1)$，

得 $f(\cos^2 x)=-\csc^2 x(x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z})$

样板性题组

▶1. 若 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)+2f(\dfrac{1}{x})=3x$，求 $f(x)$ 的解析式.

解：以 $\dfrac{1}{x}$ 代替原式中的 x 得 $f(\dfrac{1}{x})+2f(x)=\dfrac{3}{x}$. 与原式联立，消去 $f(\dfrac{1}{x})$ 可得 $f(x)$.

$f(x)=\dfrac{2}{x}-x(x\neq 0)$.

▶2. 已知 $f(x)=x^2+4x+3$，$t\in\mathbf{R}$，函数 $g(t)$ 表示函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最小值，求 $g(t)$ 表达式.

解：由 $f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$，知图象关于 $x=-2$ 对称，结合图象知，当 $t>-2$ 时，$g(t)=f(t)=t^2+4t+3$；当 $t+1<-2$ 即 $t<-3$ 时，$g(t)=f(t+1)=t^2+6t+8$；而当 $-3\leqslant t\leqslant -2$ 时，$g(t)=-1$

$$\therefore g(t)=\begin{cases}t^2+6t+8 & t\in(-\infty,-3)\\ -1 & t\in[-3,-2]\\ t^2+4t+3 & t\in(-2,+\infty)\end{cases}$$

评述：根据条件求出函数表达式，是经常见到的问题. 这类问题常要与一些其他数学知识综合. 本题要求熟悉二次函数在某特定区间上的最值，通常要利用图象帮助分析.

▶3. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

解法一：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 得 $4a-b=0$①，又 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2\sqrt{2}$，$\therefore b^2-4ac=8a^2$②，由已知 $c=1$③. 由①②③得 $b=2$，$a=\dfrac{1}{2}$，$c=1$.

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$

解法二：由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 知 $y=f(x)$ 的图象的对称轴 $x=-2$，$\therefore$ 可设 $f(x)=a(x+2)^2+k$.（余略）

评述：二种方法均是用待定系数法求二次函数的解析式，可以看到充分挖掘题目的隐含条件及充分利用图形的直观性，是简化运算的有效手段.

▶4. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，若 $x\in(0,3)$ 时 $f(x)=2^x$，求当 $x\in(-6,-3)$ 时的解析式.

解：$\because f(3+x)=f(3-x)$

$\therefore y=f(x)$ 关于直线 $x=3$ 对称.

$\because x\in(0,3)$ 时 $f(x)=2^x$，

$\therefore x\in(3,6)$ 时应有 $f(x)=2^{6-x}$（可图示），

$\because y=f(x)$ 为奇函数.

$\therefore f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x)=-f(-x)=-2^{6+x}$.

$\therefore x\in(-6,-3)$ 时函数的解析式为

$f(x)=-2^{6+x}$.

巩固性题组

▶1. 若 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\dfrac{1-x^2}{x^2}\ (x\neq 0)$，

备课札记