

前言

QIAN YAN

《高中总复习优化设计》一直是按“1+2”模式编写的,即一册《优化设计》学生用书,附编一册学生训练用书的《优化训练》,共配编一册供教师使用的“教师用书”。这种延续了几年的“1+2”模式发挥了积极的作用,得到广大读者的充分肯定与认同。但是,同时也有不少读者指出,处于从属地位的《优化训练》题型比较单一,功能不够完备,难以很好地适应高考改革对于备考训练的要求。这一意见引起了我们的极大重视。经过深入研究和反复论证,我们决定将从属于《优化设计》的《优化训练》分离出来,专题策划,独立编写,形成一个科学完备的训练体系。这就成了今天与广大读者见面的《高中总复习优化训练》“1+1”系列。

那么《高中总复习优化训练》继承了《高中总复习优化设计》的哪些传统优势,自身又发展了什么样的新特色呢?

《高中总复习优化训练》继承了《高中总复习优化设计》新颖、优化、科学、实用的传统优势:

新颖:反映“3+X”考试的最新信息,从新颖别致的角度,精选基础性、综合性、多元性的例题和试题,体现培养创新思维和实践能力的要求。

优化:放眼整体,全程优化,创造性地设计各分册的内容框架。既考虑本学科的系统完整,又兼顾跨学科的综合沟通。

科学:在对近年来高考总复习实践进行深入分析研究的基础上,全面吸收率先实行综合考试地区的高考备考成功经验,内容设置、体例编排更为科学,体现了最新复习导向。

实用:作为专项的、独立的训练用书,从方式、内容、时间控制等多角度进行综合设计、优化取舍,更适合教师整体操作、学生个体使用。

《高中总复习优化训练》新的策划理念与编写特色:

着眼点前瞻性与着手点准确性的有机结合。着眼点的前瞻性追求的是与高考改革方向的一致。着手点的准确性追求的是对高考命题意图的准确把握。二者的有机结合体现在题型与内含、题量与时限、思维与方法、机智与技巧等方面的配置、照应体系上。优化训练在对能力的检测中体现对基础的巩固,在基础层级、学科内综合训练中蕴含着高层级能力、跨学科综合应用能力要求。

《高中总复习优化训练》以一周1次或2次45分钟的[基础训练]为最频繁、最基础性设置,涵盖学科单元或单元组合的主干知识;以一周1次或两周1次90分钟的[单元测试]为中量级、提高性设置,凸现每章或每编重点、要点,演练学科内综合;以一月1次或数月1次高考时限的[高考模拟训练]为适量级、应用性设置,展现学科间辐射、交汇现象,体验和提升应用能力。这种以“基础练”、“综合练”、“模拟练”为结构板块,以日练、周练、月练为延伸链条,以45分钟、90分钟、高考时限为旋升半径的备考练习体系,包揽了内容与形式、要求与方法、时间与思维的练习三大要素,形成了一个以适应综合考试为目的的“三维”综合练习体系。



本书是以“试验修订教材”为蓝本编写的。本书以教材章节为“基础训练”依托,设计 91 套训练试题,涵盖了中学阶段所涉及的数学概念、定理、公式等基础知识和基本能力要素,对教材中反映数学理论本质属性、蕴含重要数学思想的例题、习题进行类比、延伸、迁移、拓广,适用于随堂练习或小型集中练习;以教材大章为综合练习单元,设计“单元测试”14 套,适用于集中练习或阶段测试。本书还以最新高考试卷试题结构、顺序为模板,编写了 6 套“高考模拟训练”卷,密切联系社会现实,体现时代特色,全面训练解题方向和策略,锤炼数学抽象思维的准确性、深刻性、逻辑性、完整性和灵活性,突出培养应用数学意识和创新能力,适用于阶段测试或模拟考试。全书训练类型齐全,梯度清晰,功能完备,实用、方便。

本书是为了帮助教师把握《高中总复习优化训练》的设计思想和意图,促进对该书的有效使用而专门编写的。本书对《高中总复习优化训练》中试题进行了详细解析及思路点拨,并附有大量备课资料和必要的教学建议,内容更加丰富全面,将会使教师的教学指导与备课更加得心应手。

本书编者身处中学数学教学、教研第一线,投身实践,潜心研究,精心设计,集全国各地先进经验于本书,希望能给广大师生高三总复习提供有效、有益的参考。受编者水平和编写时间所限,书中难免有疏忽与不妥,敬请广大读者批评赐教。

编者

2002 年 6 月


 MU
 LU
 目
 录

一、集合与简易逻辑	
1.1 集合	(001)
1.2 一元二次不等式	(002)
1.3 简易逻辑	(003)
单元测试(一)	(004)
二、函数	
2.1 映射与函数	(006)
2.2 函数的单调性	(007)
2.3 函数的奇偶性	(008)
2.4 反函数	(009)
2.5 指数与指数函数	(010)
2.6 对数与对数函数	(011)
2.7 函数的应用	(012)
单元测试(二)	(014)
三、数列	
3.1 数列	(016)
3.2 等差数列(一)	(017)
3.3 等差数列(二)	(018)
3.4 等比数列(一)	(019)
3.5 等比数列(二)	(021)
3.6 数列的实际应用	(022)
单元测试(三)	(023)
高考模拟训练(一)	(025)
四、三角函数	
4.1 任意角的三角函数	(028)
4.2 同角关系、诱导公式	(029)
4.3 两角和与差的三角函数	(030)
4.4 倍角公式	(032)
4.5 弦切函数的图象和性质	(033)
4.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	(034)
4.7 已知三角函数值求角	(036)
单元测试(四)	(037)

MU
LU
目
录

五、平面向量	
5.1 向量的加减法	(040)
5.2 实数与向量的积	(041)
5.3 平面向量的坐标运算	(042)
5.4 线段的定比分点	(043)
5.5 平面向量的数量积及运算律	(044)
5.6 平面向量的数量积的坐标表示	(045)
5.7 平移	(047)
5.8 正余弦定理	(048)
5.9 解斜三角形	(049)
单元测试(五)	(050)
高考模拟训练(二)	(052)
六、不等式	
6.1 不等式的性质	(055)
6.2 算术平均数与几何平均数	(056)
6.3 不等式的证明(一)	(057)
6.4 不等式的证明(二)	(058)
6.5 不等式的解法(一)	(059)
6.6 不等式的解法(二)	(060)
6.7 绝对值不等式	(061)
6.8 不等式的实际应用	(062)
单元测试(六)	(063)
七、直线和圆的方程	
7.1 直线的倾斜角和斜率	(066)
7.2 直线的方程	(067)
7.3 两条直线的位置关系	(068)
7.4 简单的线性规划(一)	(069)
7.5 简单的线性规划(二)	(071)
7.6 曲线和方程	(072)
7.7 圆的方程	(074)
单元测试(七)	(075)
八、圆锥曲线方程	
8.1 椭圆及其标准方程	(077)


 MU
 LU
 目
 录

8.2 椭圆的简单几何性质	(078)
8.3 双曲线及其标准方程	(079)
8.4 双曲线的简单几何性质	(081)
8.5 抛物线及其标准方程	(082)
8.6 抛物线的简单几何性质	(083)
单元测试(八).....	(084)
高考模拟训练(三).....	(086)
九、直线、平面、简单几何体	
9.1 平面的基本性质	(090)
9.2 空间的平行直线与异面直线	(091)
9.3 线面平行与面面平行(一)	(092)
9.4 线面平行与面面平行(二)	(094)
9.5 线面垂直(一)	(095)
9.6 线面垂直(二)	(097)
9.7 空间向量及其运算	(098)
9.8 空间向量的坐标运算	(099)
9.9 线面角与二面角(一)	(101)
9.10 线面角与二面角(二).....	(102)
9.11 距离.....	(103)
9.12 棱柱与棱锥(一).....	(105)
9.13 棱柱与棱锥(二).....	(106)
9.14 球.....	(108)
单元测试(九).....	(109)
十、排列、组合和概率	
10.1 分类计数原理与分步计数原理.....	(112)
10.2 排列、组合	(113)
10.3 二项式定理.....	(114)
10.4 随机事件的概率.....	(115)
10.5 互斥事件有一个发生的概率.....	(117)
10.6 相互独立事件同时发生的概率.....	(118)
单元测试(十).....	(119)
高考模拟训练(四).....	(121)

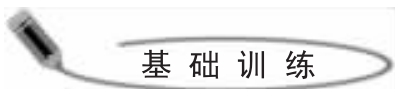
MU
目 录
 LU

十一、概率与统计	
11.1 随机变量	(125)
11.2 统计	(126)
单元测试(十一)	(127)
十二、极限	
12.1 数学归纳法	(129)
12.2 数列的极限	(130)
12.3 函数的极限	(131)
12.4 函数的连续性	(132)
单元测试(十二)	(133)
十三、导数与微分	
13.1 导数的概念	(136)
13.2 几种常见函数的导数	(137)
13.3 两函数的和、差、积、商的导数	(138)
13.4 复合函数的导数	(139)
13.5 *微分的概念与运算	(141)
13.6 导数的应用	(142)
单元测试(十三)	(144)
十四、*积分	
14.1 *不定积分	(146)
14.2 *不定积分的运算法则	(147)
14.3 *定积分的概念与运算	(149)
14.4 *定积分的应用	(150)
单元测试(十四)	(152)
十五、复数	
15.1 复数的有关概念及几何意义	(155)
15.2 复数的代数形式及其运算	(156)
高考模拟训练(五)	(157)
高考模拟训练(六)	(160)



一、集合与简易逻辑

1.1 集合



一、选择题

- ⇒1. (1)集合 $\{0\}$ 与 \emptyset 的关系是..... ()
 (A) $\{0\} = \emptyset$ (B) $\{0\} \in \emptyset$
 (C) $\{0\} \subseteq \emptyset$ (D) $\{0\} \supseteq \emptyset$

答案:(D)

- ⇒2. 已知 $A \subseteq \{a, b, c\}$ 且 $A \subseteq \{a, b, e, f\}$,则满足上述条件的集合 A 有..... ()
 (A) 3个 (B) 4个
 (C) 7个 (D) 15个

答案:(B)

- ⇒3. 已知 $U = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$, $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 + x - 2 = 0\}$, $C = \{x | -2 \leq x < 1\}$,则..... ()

- (A) $C \subseteq A$ (B) $C \subseteq \complement_U A$
 (C) $\complement_U B = C$ (D) $\complement_U A = B$

答案:(D)

- ⇒4. 已知集合 $M = \{x | x \leq 1\}$, $P = \{x | x > t\}$.若 $M \cap P \neq \emptyset$,则 t 应满足的条件是... ()
 (A) $t > 1$ (B) $t \geq 1$ (C) $t < 1$ (D) $t \leq 1$

答案:(C)

- ⇒5. 下列说法正确的是..... ()
 (A) 任一集合必有真子集
 (B) 任一集合必有两个子集
 (C) 若 $A \cap B = \emptyset$,则 A, B 中至少有一个为空集
 (D) 若 $A \cap B = B$,则 $B \subseteq A$

答案:(D)

- ⇒6. 若 $M = \{x | \frac{x}{2} \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{n | \frac{n+1}{2} \in \mathbf{Z}\}$,则 $M \cup N$ 等于..... ()
 (A) \emptyset (B) M (C) \mathbf{Z} (D) $\{0\}$

答案:(C)

二、填空题

- ⇒7. 设 $M = \{x | x \geq 1\}$, $N = \{x | 0 \leq x < \sqrt{5}\}$, \mathbf{R} 为实数集,则 $\complement_{\mathbf{R}}(M \cap N) =$ _____.

答案: $\{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq \sqrt{5}\}$

- ⇒8. 若 $A = \{(x, y) | x + z = 3\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 3\}$,则 $A \cap B =$ _____.

答案: $\{(2, 1)\}$

- ⇒9. 由函数 $\varphi(x)$ 构成的集合 A 满足条件:当 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ 时, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq 5|x_1 - x_2|$.若 $g(x) = x^2 + 3x - 2$,则 $g(x)$ 与 A 的关系是_____.

答案: $g(x) \in A$

三、解答题

- ⇒10. 若 $a \in \mathbf{R}, A = \{1, 3, a\}, B = \{1, a^2 - a + 1\}$, $A \cup B = A$,求 a 的值.

解: $\because A \cup B = A \therefore B \subseteq A$

则可能有两种情况:

$$a^2 - a + 1 = 3 \text{ 或 } a^2 - a + 1 = a$$

当 $a^2 - a + 1 = 3$ 时,解得 $a = -1$ 或 $a = 2$

当 $a^2 - a + 1 = a$ 时,解得 $a = 1$

经检验 $a = -1$ 或 $a = 2$ 满足题意.

提示:确定集合中的元素,必须首先考虑元素之间的互异性,结合条件去求解,注意检验.

- ⇒11. 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$,若 $A \cup B = A$,求 a 的取值范围.

解: $A = \{0, -4\}$,又 $A \cup B = A \therefore B \subseteq A$

$\therefore B$ 可能有三种情况.若 $B = \emptyset$,

$$\text{则 } \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0 \therefore a < -1$$

若 $B = \{0\}$ 或 $\{-4\}$,

$$\text{则 } \Delta = 0 \therefore a = -1$$

$$\text{若 } B = \{0, 4\}, \text{则 } \begin{cases} -2(a+1) = -4 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases} \therefore a = 1$$

综上, $a \leq -1$ 或 $a = 1$.



本套题的重点是集合的概念和运算.难点是集合语言与集合思想的运用.需注意的问题有:①集合中元素的特征,②两大关系的区分:一是元素对集合的从属关系,二是集合与集合之间的包含关系.③解有关集合问题时,常将集合化简成转化为熟知的代数、三角、几何问题.化归思想是本节最突出的思想方法.而韦恩图和数轴的使用体现了数形结合的思想.

备课札记



1.2 一元二次不等式

基础训练

一、选择题

⇨1. 若 $|x| < \frac{1}{2}$ 和 $|x| > \frac{1}{3}$ 同时成立, 则 x ()

(A) $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$

(D) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

答案: (C)

⇨2. 不等式 $|2x-1| < 3, x \in \mathbf{Z}$ 的解集为 ()

(A) $\{1, 0\}$

(B) $\{1, 2, 0, -1\}$

(C) $\{0, 1, 2\}$

(D) $\{-1, 0, 1\}$

答案: (A)

⇨3. 使 $\sqrt{2x^2-x-1}$ 有意义的实数 x 的取值为 ()

(A) $x \geq 1$

(B) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

(C) $x \geq 1$ 或 $x \leq -\frac{1}{2}$

(D) $x \leq -\frac{1}{2}$

答案: (C)

⇨4. 不等式 $(x^2-4)(x-6)^2 \leq 0$ 的解集为 ()

(A) $\{x|x \geq 2\}$

(B) $\{x|-2 \leq x \leq 2$ 或 $x=6\}$

(C) $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$

(D) $\{x|x \leq -2$ 或 $x \geq 2\}$

答案: (B)

⇨5. 不等式 $ax^2+ax-4 < 0$ 的解集为 \mathbf{R} , 则 a 的取值为 ()

(A) $-16 \leq a < 0$

(B) $a > -16$

(C) $-16 < a \leq 0$

(D) $a < 0$

答案: (C)

⇨6. 当 $a < 0$ 时关于 x 的不等式 $x^2-4ax-5a^2 > 0$ 的解集是 ()

(A) $\{x|x > 5a$ 或 $x < -a\}$

(B) $\{x|x < 5a$ 或 $x > -a\}$

(C) $\{x|-a < x < 5a\}$

(D) $\{x|5a < x < -a\}$

答案: (B)

二、填空题

⇨7. 设 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x|x^{-1} \leq 1\}, B = \{x|x^2 - 4 \leq 0\}$ 则 $A \cap (\complement_U B) =$ _____.

答案: $\{x|x < -2$ 或 $x > 2\}$

⇨8. 如果无论 x 取何实数, 二次三项式 $x^2 - 2x + m$ 的值恒大于 0, 则 m 的取值范围是 _____.

答案: $m > 1$

⇨9. 不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集是 $\{x|2 < x < 3\}$, 则 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 的解集是 _____.

答案: $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$

三、解答题

⇨10. 求不等式 $x^2 - 5|x| + 6 > 0$ 的解集.

解: $\{x|x > 3$ 或 $x < -3$ 或 $-2 < x < 2\}$

⇨11. 已知集合 $A = \{x|x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求 m 的取值范围.

解: 当 $A = \emptyset$ 时, $\Delta = (m+2)^2 - 4 < 0$

$\therefore -4 < m < 0$

当 $A \neq \emptyset$ 时 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq 0$

综上, m 的取值范围是 $m > -4$.

⇨12. 解不等式: $2x^2 + ax + 2 > 0$.

解: 当 $a > 4$ 或 $a < -4$ 时, 不等式解集为

$\{x|x > \frac{-a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}$ 或

$x < \frac{-a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}\}$

当 $a = \pm 4$ 时, 不等式解集为 $\{x|x = -\frac{a}{4}\}$

当 $-4 < a < 4$ 时, 不等式解集为 \mathbf{R} .

评析

本套题的重点是含绝对值的不等式及一元二次不等式的解法. 难点是含有字母参数的不等式的解法, 因此要注意对参数变量进行讨论. 对不等式进行等价变形是解决不等式问题最应注意的事项, 另外还有二次项系数含有字母时, 须考虑二次项系数能否为 0. 等价转化是本节最突出的思想方法.



1.3 简易逻辑

基础训练

一、选择题

- ⇒1. 给定命题 $p: 2$ 是质数; $q: 3$ 是合数, 那么下列结论正确的是 ()
- (A) “ p 或 q ”是真命题
 (B) “ p 且 q ”是真命题
 (C) “非 p ”是真命题
 (D) “非 q ”是假命题
 答案: (A)
- ⇒2. 给定原命题: “全等三角形的面积相等”则下列判断正确的是 ()
- (A) 逆命题真, 否命题假, 逆否命题真
 (B) 逆命题假, 否命题假, 逆否命题真
 (C) 逆命题真, 否命题真, 逆否命题假
 (D) 逆命题真, 否命题真, 逆否命题真
 答案: (B)
- ⇒3. 给定原命题: “若 $a^2 + b^2 = 0$ 则 a, b 全为零”, 下面正确的是 ()
- (A) 逆命题: 若 a, b 全不为 0, 则 $a^2 + b^2 \neq 0$
 (B) 否命题: 若 $a^2 + b^2 \neq 0$, 则 a, b 全为 0
 (C) 逆否命题: 若 a, b 不全为 0, 则 $a^2 + b^2 \neq 0$
 (D) 以上都不对
 答案: (C)
- ⇒4. “ $A=60^\circ$ ”是“ $\triangle ABC$ 为等边三角形”的 ()
- (A) 充分不必要条件
 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件
 (D) 既不充分又不必要条件
 答案: (B)
- ⇒5. $p: |2x-1| < 1, q: x^2 + 4x + 3 < 0$, 则 p 是 q 的 ()
- (A) 充分不必要条件
 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件
 (D) 既不充分又不必要条件
 答案: (D)
- ⇒6. 下列各组复合命题中“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, “非 p ”为真, 则有 ()
- (A) $p: 3$ 是偶数, $q: 4$ 是奇数
 (B) $p: \pi < 3, q: 5 > 3$
 (C) $p: a \in \{a, b\}, q: \{a\} \subseteq \{a, b\}$
 (D) $p: Q \subseteq R, q: N = Z$
 答案: (B)

二、填空题

- ⇒7. $p: x \sqrt{3-2x} = x^2, q: 3-2x = x^2$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
 答案: 既不充分又不必要
- ⇒8. 已知 p 和 q 是两个命题, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 则 q 是 p 的 _____ 条件. $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 _____ 条件.
 答案: 必要不充分 必要不充分

三、解答题

- ⇒9. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.
- (1) 若 $q < 1$, 则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根.
 (2) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$.
 解: (1) 逆命题: 若方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根, 则 $q < 1$ 为假命题.
 否命题: 若 $q \geq 1$, 则方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 无实根为假命题.
 逆否命题: 若方程 $x^2 + 2x + q = 0$ 无实根, 则 $q \geq 1$ 为真命题.
- (2) 逆命题: 若 $a = 0$ 或 $b = 0$, 则 $ab = 0$ 为真命题.
 否命题: 若 $ab \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 为真命题.
 逆否命题: 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ 为真命题.
- ⇒10. 已知关于 x 的一元二次方程,
- $$mx^2 - 4x + 4 = 0 \quad ①$$
- $$x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0 \quad ② (m \in \mathbf{Z})$$
- 求方程①和②的根都是整数的充要条件.
 解: 方程①有实根的充要条件是:
 $\Delta_1 \geq 0$ 得 $m \leq 1$
 方程②有实根的充要条件是:
 $\Delta_2 \geq 0$ 得 $m \geq -\frac{5}{4}$
 $\therefore -\frac{5}{4} \leq m \leq 1$, 而 $m \in \mathbf{Z}$ 故 m 的值为 $-1, 0, 1$ 当 $m = -1$ 时方程①无整数根, 当 $m = 0$ 时方程②无整数根, 当 $m = 1$ 时方程①②均有整数根, 从上面可知, ①和②均有整数根 $\Rightarrow m = 1$. 反之, $m = 1$ 时①和②显然都有整数根.
 总之, 方程①和②的根都是整数的充要条件是 $m = 1$.

备课札记



评析

本套题重点是复合命题的真值表与四种命题

及相互关系. 难点是灵活运用充分条件、必要条件和充要条件解决实际问题. 高考热点是四种命题的相互关系及正确判定两个命题之间的充要关系. 加强对逻辑连结词“或”“且”“非”的理解, 明晰定义内涵, 搞清因果关系是本节应该注意的问题.

备课札记

单元测试(一)

(时间: 90分钟 满分: 100分)

一、选择题(每小题3分, 共36分)

⇒1. 若 $B = \{0, 1, 3, 5, 6\}$, $C = \{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$, 则满足 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$ 的集合 A 有 … ()

- (A) 4个 (B) 7个
(C) 8个 (D) 16个

答案: (C)

⇒2. 已知 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid |x+2| \geq 1\}$ $B = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$ 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 等于 …………… ()

- (A) $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$
(B) $\{x \mid x \leq -3 \text{ 或 } x > -2\}$
(C) $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$
(D) $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$

答案: (C)

⇒3. 方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负根的充要条件是 …………… ()

- (A) $0 < m < 1$ 或 $m < 0$
(B) $0 < m < 1$
(C) $m < 1$
(D) $m \leq 1$

答案: (D)

⇒4. 已知 $A = \{(x, y) \mid x - 2y = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = 0, x \neq 2\}$ 则 $A \cup B$ 等于 …… ()

- (A) $\{(x, y) \mid (x-2y)(y-1) = 0\}$
(B) $\{(x, y) \mid (x-2y)(y-1) = 0, x \neq 2\}$
(C) $\{(2, 1)\}$
(D) \emptyset

答案: (A)

⇒5. 设集合 $A = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 … ()

- (A) $a < 2$ (B) $a > -2$
(C) $a > -1$ (D) $-1 < a \leq 2$

答案: (C)

⇒6. 已知 p, q, r 且 p 是 q 的必要条件, r 是 q 的充分而不必要条件, 则 r 是 p 的 () 条件.

- (A) 充分而不必要
(B) 必要而不充分
(C) 充要

(D) 既不充分又不必要

答案: (A)

⇒7. 下列命题是真命题的有 …………… ()

- (A) $5 > 2$ 且 $7 < 3$
(B) $4 > 3$ 或 $3 < 4$
(C) $7 \geq 8$
(D) 方程 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 的判别式大于或等于 0

答案: (B)

⇒8. 设集合 $M = \{2, 3, a^2 + 1\}$, $N = \{a^2 + a - 4, 2a + 1, -1\}$ 且 $M \cap N = \{2\}$, 则 a 的取值集合是 …………… ()

- (A) $\{-3\}$ (B) $\{2, -3\}$
(C) $\{-3, \frac{1}{2}\}$ (D) $\{-3, 2, \frac{1}{2}\}$

答案: (C)

⇒9. 原命题: 若 $\neg p$, 则 $\neg q$, 则其逆命题是 …………… ()

- (A) 若 p 则 q (B) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$
(C) 若 q 则 p (D) 都不对

答案: (B)

⇒10. 不等式 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 的解集是 $\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$, 则 $a+b$ 等于 …………… ()

- (A) 10 (B) -10
(C) 14 (D) -14

答案: (D)

⇒11. 非空集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 且 S 还满足条件: 若 $a \in S$ 则 $6-a \in S$, 符合上述要求的集合 S 的个数是 …………… ()

- (A) 4 (B) 5
(C) 7 (D) 31

答案: (C)

⇒12. 已知集合 $M = \{x \mid x = a^2, a \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x \mid |x| < 5, x \in \mathbf{R}\}$, 那么集合 $M \cap N$ 的子集的个数是 …………… ()

- (A) 4 (B) 7
(C) 8 (D) 10

答案: (C)

二、填空题(每小题4分, 共16分)

⇒13. 若不等式 $(m+x)x^2 - (m-1)x + 3(m-1)$



<0 对任何实数 x 恒成立, 则 m 的取值范围是 _____.

答案: $m < -\frac{13}{11}$

⇒14. 设 $A = \{1, 2\}$ $B = \{x | x \leq A\}$, 用列举法写出集合 $B =$ _____.

答案: $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

⇒15. 满足条件 $\{1, 3\} \cup M = \{1, 3, 5\}$ 的所有集合 M 的个数是 _____.

答案: 4

⇒16. 已知集合 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ $B = \{y | y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$ 则 $A \cap B =$ _____.

答案: $\{y | y > 0\}$

三、解答题(共 48 分)

⇒17. (10 分) 已知 $A = \{x | \frac{3}{2-x} < 1\}$, $B = \{x | 4x + p < 0\}$ 若 $A \cap B = B$, 求实数 p 的取值范围.

解: $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$

$B = \{x | x < -\frac{p}{4}\}$

$\because A \cap B = B \therefore -\frac{p}{4} \leq -1 \therefore p \geq 4$

⇒18. (12 分) 已知 $A = \{x | |x-1| \geq a\}$, $B = \{x | -6 < x < 4\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$ 求 a 的取值范围.

解: 若 $a \leq 0$, 则 $A = \mathbf{R}$, 不满足 $A \cap B = \emptyset$

若 $a > 0$ $A = \{x | x \geq a+1 \text{ 或 } x \leq 1-a\}$

要使 $A \cap B = \emptyset$

则 $\begin{cases} 1-a \leq -6 \\ a+1 \geq 4 \end{cases} \therefore a \geq 7$

⇒19. (12 分) 已知集合 $A = \{x | x^3 + 3x + 2x > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, $A \cup B = \{x | x > -2\}$, 求 a, b 的值.

解: $A = \{x | x > 0 \text{ 或 } -2 < x < -1\}$,

$\because A \cap B = \{x | 0 < x \leq 2\}$

$\therefore B = \{x | 0 < x \leq 2\}$

又 $\because A \cup B = \{x | x > -2\}$

$\therefore B = \{x | -1 \leq x \leq 0\}$

$\therefore B = \{x | 0 < x \leq 2 \text{ 或 } -1 \leq x \leq 0\}$

即 $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$

$$\begin{cases} \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -1 \\ \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = 2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

⇒20. (14 分) 设 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2x - 3 > 0\}$, $C = \{x | x^2 - 3ax + 2a^2 < 0\}$, 求实数 a 的范围使 $C \subseteq (A \cap B)$.

解: $A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$

$B = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$

$A \cap B = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < -3\}$

$C = \{x | (x-2a)(x-a) < 0\}$

①当 $a > 0$ 时 $C = \{x | a < x < 2a\}$

$\therefore C \subseteq (A \cap B) \therefore a \geq 4$

②当 $a = 0$ 时, $C = \emptyset$ 满足 $C \subseteq (A \cap B)$

③当 $a < 0$ 时, $C = \{x | 2a < x < a\}$

$\therefore C \subseteq (A \cap B) \therefore a \leq -3$

综上, a 的范围是 $a \leq -3$ 或 $a = 0$ 或 $a \geq 4$.



本套题重点是集合的概念及运算, 四种命题及相互关系和充要条件. 高考中, 常以两种方式进行考查: 一是考查集合、命题关系、充要条件本身的知识; 二是考查集合语言与集合思想的运用. 即考查把集合作为工具在其他数学问题中的应用. 难点是二次不等式与二次函数、二次方程的关系. 特别是二次方程根的分布与二次函数之间的关系、二次函数在特定区间上的最值.

备
课
札
记



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



二、函数

2.1 映射与函数

基础训练

一、选择题

⇒1. 下列命题正确的个数有 ()

① $f(x) = \sqrt{-x^2 + x - 1}$ 是函数; ② 函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 的图象是直线; ③ 函数是其定义域到值域的映射; ④ $f(x) = 5(x \in \mathbf{R})$ 不是函数.

(A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

答案: (B)

⇒2. 已知 (x, y) 在映射 f 的作用下的象是 $(x+y, x-y)$, 则在 f 的作用下, $(1, 2)$ 的原象是 ()

(A) $(1, 2)$ (B) $(3, -1)$
(C) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (D) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

答案: (C)

⇒3. 与函数 $y = x$ 有相同图象的一个函数是 ()

(A) $y = \sqrt{x^2}$
(B) $y = \frac{x^2}{x}$
(C) $y = a^{\log_a x} (a > 0, a \neq 1)$
(D) $y = \log_a a^x (a > 0, a \neq 1)$

答案: (D)

⇒4. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $f(9) = 8$, 则 $f(3)$ 等于 ()

(A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) 4

答案: (D)

⇒5. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$

$\varphi(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

则当 $x < 0$ 时, $f[\varphi(x)]$ 为 ()

(A) $-x$ (B) $-x^2$ (C) x (D) x^2

答案: (B)

⇒6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $a \leq x \leq b$, 且 $b > -a > 0$ 则函数 $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ 的定义

域是 ()

(A) $-b \leq x \leq b$ (B) $a \leq x \leq b$
(C) $-a \leq x \leq b$ (D) $a \leq x \leq -a$

答案: (D)

二、填空题

⇒7. 集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ 那么可建立从 A 到 B 的映射的个数是 _____.

答案: 9

⇒8. 若 $f(2x+1) = x^2 - 2x$, 则 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

答案: $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{4}$

⇒9. $y = x + \sqrt{x-1}$ 的最小值是 _____.

答案: 1

⇒10. $y = 2x + 4\sqrt{1-x}$ 的值域是 _____.

答案: $(-\infty, 4]$

⇒11. $y = x - \sqrt{1-x^2}$ 的值域是 _____.

答案: $[-\sqrt{2}, 1]$

三、解答题

⇒12. 求函数 $y = \sqrt{ax+3}$ (a 是常数) 的定义域.

解: 要使函数有意义, 则 $ax+3 \geq 0$

当 $a > 0$ 时 $x \geq -\frac{3}{a}$

当 $a = 0$ 时 $x \in \mathbf{R}$

当 $a < 0$ 时 $x \leq -\frac{3}{a}$

注: 对含参数的一类函数解析式, 在解决有关问题时, 必须对参数字母进行讨论.

⇒13. 已知函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x+2$, 若方程 $f(x+a) = g(x)$ 有二不同实根, 求 a 的取值范围.

解: 数形结合法. 半圆 $y = \sqrt{1-(x+a)^2}$ 和直线 $y = x+2$ 有两个不同交点. 得 $2-\sqrt{2} < a \leq 1$

评析

本套题的重点是映射与函数的定义、记号, 难

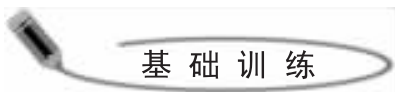


点是对定义的理解及对函数解析式的求解. 求解的方法主要有换元法和待定系数法. 要注意: 函数只与对应法则与定义域有关而与用什么字母表示变量无关. 对于复合函数 $y=f[g(x)]$, 应先由

$f(u)$ 成立的条件建立关于 u 的不等式, 再进一步确定 $g(x)$ 中 x 的取值范围, 即为 $y=f[g(x)]$ 的定义域. 实际问题确定的函数, 其定义域除使函数有意义外, 还要符合实际问题的要求.

备
课
札
记

2.2 函数的单调性



一、选择题

⇒1. 函数 $y=(m-1)x+3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 则 m 的取值范围是 ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0)$
(C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 1)$

答案: (C)

⇒2. 在 $(-\infty, 0)$ 上递减的函数是 ()

- (A) $y=\frac{x}{x-1}$ (B) $y=1-x^2$
(C) $y=2x+3$ (D) $y=x^2+2x$

答案: (A)

⇒3. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 内

..... ()

- (A) 至少有一实根
(B) 至多有一实根
(C) 没有实根
(D) 必有惟一实根

答案: (D)

⇒4. 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数的是 ()

- (A) $y=-(x+1)^2$ (B) $y=x^{\frac{2}{3}}$
(C) $y=(\frac{1}{2})^{x+1}$ (D) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$

答案: (A)

⇒5. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $a=f(-\sqrt{2}), b=f(\frac{\pi}{2}), c=f(\frac{3}{2})$ 的大小关系是

..... ()

- (A) $b < a < c$ (B) $a < c < b$
(C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

答案: (B)

⇒6. 函数 $y=\log_{\frac{3}{2}}(x^2+2x-3)$ 的增区间是

..... ()

- (A) $(1, +\infty)$ (B) $(-3, 1)$
(C) $(-\infty, -1)$ (D) $(-\infty, -3)$

答案: (D)

二、填空题

⇒7. 若 $f(x)=x^2+Px+3$ 在 $(-\infty, 1]$ 上递减, 则 P 的取值范围是

答案: $P \leq -2$

⇒8. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 的单调增区间是

答案: $[1, 3)$

⇒9. 函数 $y=\lg\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})$ 的递减区间为

答案: $[6k\pi-\frac{3}{4}\pi, 6k\pi+\frac{3}{4}\pi] (k \in \mathbb{Z})$

三、解答题

⇒10. 利用函数单调性的定义证明: $f(x)=\frac{x+a}{x+b}$

$(a < b)$ 在 $(-b, +\infty)$ 上单调递增.

证明: 设 $x_1, x_2 \in (-b, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \dots = \frac{(x_2 - x_1)(a - b)}{(x_1 + b)(x_2 + b)} < 0$$

⇒11. 判断函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上的

单调性.

解: 设 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1-1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x_2-1} - \sqrt{x_1-1}}{\sqrt{x_1-1} \cdot \sqrt{x_2-1}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1-1} \cdot \sqrt{x_2-1} \cdot (\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1})} > 0$$

∴ $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数.

⇒12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的偶函数, 且在 $[0, 1)$ 上为增函数, 若 $f(a-2) - f(4-a^2) < 0$, 求 a 的取值范围.

答案: $a \in (\sqrt{3}, 2) \cup (2, \sqrt{5})$



本套题目重点是理解函数单调性的定义, 难点是复合函数单调性的判断, 高考主要考查以下

三类问题:①求函数的单调区间.②用定义判断函数在给定区间上的单调性.③较简单的复合函数的单调性.研究函数的单调性,必须在定义域内进行.

行,因此,讨论函数的单调性,必须首先确定函数的定义域.对含有字母参数的函数式,在确定单调性时要运用分类讨论的思想方法进行讨论.

 备
课
札
记

2.3 函数的奇偶性

基础训练

一、选择题

⇒1. 若 $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(2, 5)$ 上 ()

- (A) 是增函数
(B) 是减函数
(C) 有增有减
(D) 不能确定增减性

答案: (B)

⇒2. 若函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 且 $x > 0$ 时 $f(x) = x(x+1)$, 那么当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 的解析式为 ()

- (A) $-x(x+1)$ (B) $x(-x+1)$
(C) $x(x-1)$ (D) $x(x+1)$

答案: (B)

⇒3. 若 $g(x), h(x)$ 都是奇函数, 函数 $f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x) + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上有最大值 5, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有 ()

- (A) 最小值 -5 (B) 最大值 -5
(C) 最小值 -1 (D) 最小值 -3

答案: (C)

⇒4. 函数 $f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$ 是 ()

- (A) 奇函数 (B) 偶函数
(C) $a > 1$ 时是奇函数 (D) 非奇非偶函数

答案: (D)

⇒5. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的奇偶性是 ()

- (A) 奇函数
(B) 偶函数
(C) 既是奇函数又是偶函数
(D) 非奇非偶函数

答案: (A)

⇒6. 下列判断中正确的是 ()

- (A) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ 是偶函数
(B) $f(x) = x^2 - 1$ $x \in [-2, 5]$ 是偶函数
(C) $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 是非奇非偶函数
(D) $f(x) = \sqrt{3-x^2} + \frac{9}{1-|x|}$ 是偶函数

答案: (D)

二、填空题

⇒7. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 0

⇒8. $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 $p = f(-\frac{3}{4})$ 与 $q = f(a^2 - a + 1)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的大小关系是 .

答案: $p \geq q$

⇒9. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + 3a + b$ 是偶函数, 且其定义域为 $[a-1, 2a]$ 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{3}$ 0

三、解答题

⇒10. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$, 且当 $x > 0$ 时 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解: $\because f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数 $\therefore f(0) = 0$

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 1 \\ = -x^3 + 2x^2 - 1$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\text{因此 } f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^3 - 2x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

⇒11. 已知 $f(x) = \frac{x|1-x^2|}{x^2-1}$

(1) 根据定义判断 $f(x)$ 的奇偶性.

(2) 作出函数的图象.

解: (1) 定义域 $\{x \mid x \in \mathbf{R}$

且 $x \neq 1\}$

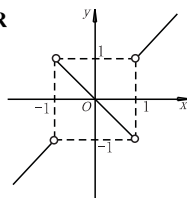
又 $\because f(-x) = -f(x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(x)$

$$= \begin{cases} -x & -1 < x < 1 \\ x & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

图象如右.





评析

本套题重点是深刻理解奇偶函数的定义. 高考主要从以下几个方面考查:

①根据定义或图象的对称性判定函数的奇偶性. ②利用函数的奇偶性求有关函数解析式或某一函数值. ③利用函数奇偶性和单调性的联系解决函数某些问题. 应注意的问题是奇偶性是函数在整个定义域上的性质, 考查奇偶性首先看定义域是否关于原点对称.

备
课
札
记

2.4 反函数



基础训练

一、选择题

- ⇒1. 已知函数 $y = \frac{2x-3}{5x+1} (x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{1}{5})$, 那么它的反函数为 ()
- (A) $y = \frac{x+3}{5x-2} (x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{2}{5})$
- (B) $y = \frac{x-3}{5x-2} (x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{2}{5})$
- (C) $y = -\frac{x+3}{5x-2} (x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{2}{5})$
- (D) $y = -\frac{x+3}{5x-2} (x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{2}{5})$

答案:(C)

- ⇒2. 函数 $y = \sqrt{x-1} + 2 (x \geq 1)$ 的反函数是 ()
- (A) $y = (x-2)^2 - 1 (x \geq 2)$
- (B) $y = (x-2)^2 - 1 (x \geq 1)$
- (C) $y = (x-2)^2 + 1 (x \geq 2)$
- (D) $y = (x-2)^2 + 1 (x \geq 1)$

答案:(C)

- ⇒3. 若函数 $y = f(x)$ 存在反函数, 则下列命题中不正确的是 ()
- (A) 函数 $y = f(x)$ 与函数 $x = f(y)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称
- (B) 若 $y = f(x)$ 是奇函数则 $y = f^{-1}(x)$ 也是奇函数
- (C) 若 $y = f(x)$ 是其定义域 $[a, b]$ 上的增函数, 则 $y = f^{-1}(x)$ 在 $[a, b]$ 上也是增函数
- (D) 函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图象重合

答案:(C)

- ⇒4. $f(x-1) = x^2 - 2x + 3 (x \leq 0)$, 则 $f^{-1}(x)$ 为 ()
- (A) $\sqrt{x-2} (x \geq 2)$
- (B) $1 - \sqrt{x-2} (x \geq 2)$
- (C) $-\sqrt{x-2} (x \geq 3)$
- (D) $\sqrt{x-2} (x \leq 2)$

答案:(C)

- ⇒5. 若函数 $y = f(x)$ 存在反函数, 则方程 $f(x) = C (C \text{ 为常数})$ ()
- (A) 有且只有一个实根
- (B) 至少有一个实根
- (C) 至多有一个实根
- (D) 没有实根

答案:(C)

- ⇒6. 下列哪一组的两个函数互为反函数 ()
- (A) $f(x) = \tan x, g(x) = \cot x$
- (B) $f(x) = \tan x, g(x) = e^x$
- (C) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$
- (D) $f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = 1 + \frac{1}{x}$

答案:(D)

二、填空题

- ⇒7. $y = a^{x-1} + 3 (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数的图象必经过 P 点, 则点 P 坐标为 _____.

答案:(4, 1)

- ⇒8. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \quad x \in (-\infty, -1]$ 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域为 _____.

答案: $[\sqrt{6}, +\infty)$

- ⇒9. 已知函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0, 1)$, 则函数 $f(x-4)$ 的反函数的图象必过定点 _____.

答案:(1, 4)

三、解答题

- ⇒10. 求函数 $y = \begin{cases} x^2 - 1 & (0 \leq x < 1) \\ x^2 & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$ 的反函数.

解: $y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & (-1 \leq x < 0) \\ -\sqrt{x} & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

- ⇒11. 已知 $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$, 求 $f^{-1}(\frac{1}{3})$ 的值.

解法一: 先求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$



备
课
札
记

$$= \log_2 \frac{x}{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

解法二: 据函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间的关系, 求 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 的值, 就是求 $f(x) = \frac{1}{3}$ 的 x 值.

$$\text{于是令 } \frac{2^x}{1+2^x} = \frac{1}{3} \text{ 解得 } x = -1$$

$$\therefore f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

提示: 方法二绕过了求反函数的复杂运算,

应学会这种方法.



评析

本套题重点是如何求反函数, 反函数和原函数的定义域和值域的对应关系. 需注意的问题有: ①当 f 是从定义域到值域的一一映射时才有反函数存在, ②互为反函数的两个函数具有相同的增减性, ③周期函数不存在反函数, ④偶函数不存在反函数, ⑤奇函数的反函数仍为奇函数, ⑥奇函数不一定存在反函数如 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$, ⑦定义域上的单调函数必有反函数.

2.5 指数与指数函数

基础训练

一、选择题

⇒1. 下列各式成立的是 ()

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$

(C) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

答案: (D)

⇒2. 与 $y = 2^x$ 的图象关于原点对称的图象的函数解析式为 ()

(A) $y = -2^{-x}$

(B) $y = 2^{-x}$

(C) $y = -2^x$

(D) $y = -2^{|x|}$

答案: (A)

⇒3. 函数 $y = 0.3^{|x|}$ 的值域是 ()

(A) $(0, +\infty)$

(B) $(-\infty, 1]$

(C) $(1, +\infty)$

(D) $(0, 1]$

答案: (D)

⇒4. 函数 $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 下面结论正确的是 ()

(A) 奇函数且在 \mathbf{R} 上增函数

(B) 偶函数且在 \mathbf{R} 上增函数

(C) 奇函数且在 \mathbf{R} 上减函数

(D) 偶函数且在 \mathbf{R} 上减函数

答案: (A)

⇒5. 已知函数 $f(x) = a^{1-x} (a > 0, a \neq 1)$ 当 $x > 1$

时恒有 $f(x) < 1$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是 ()

(A) 增函数

(B) 减函数

(C) 非单调函数

(D) 以上答案都不对

答案: (B)

⇒6. 函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$, 则 a 等于 ()

(A) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$ 或 2

(D) $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

答案: (A)

二、填空题

⇒7. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ 的单调递减区间是 _____.

答案: $[0, +\infty)$

⇒8. 若 $a = \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}$, $b = \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$, $c = \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 _____.

答案: $b < c < a$

⇒9. 函数 $y = 2^x + k - 1 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象不经过第四象限的充要条件是 _____.

答案: $k \geq 0$

三、解答题

⇒10. 比较 a^2 与 a^a 的大小. ($a > 0, a \neq 1$)

解: 对 a 分类讨论

当 $0 < a < 1$ 时, $a^2 < a^a$



当 $a=1$ 时, $a^2=a^a$
 当 $1 < a < 2$ 时, $a^2 > a^a$
 当 $a=2$ 时, $a^2=a^a$
 当 $a > 2$ 时, $a^2 < a^a$

⇒11. 设 $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 5, (0 \leq x \leq 2)$

求: $f(x)$ 的最大值和最小值.

解: $y = \frac{1}{2}(2^x - 3)^2 + \frac{1}{2}$

∵ $0 \leq x \leq 2 \quad \therefore 1 \leq 2^x \leq 4$

∴ 当 $2^x = 3$ 时即 $x = \log_2 \frac{3}{2}$ 时, $y_{\text{最小}} = \frac{1}{2}$

当 $2^x = 1$ 即 $x = 0$ 时, $y_{\text{最大}} = \frac{5}{2}$

⇒12. 设 $f(x) = \lg \frac{1+2^x+4^x \cdot a}{3} (a \in \mathbf{R})$, 如果当

$x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x)$ 有意义, 求 a 的取值范围.

解: $f(x)$ 有意义, 须满足

$\frac{1+2^x+4^x \cdot a}{3} > 0, x \in (-\infty, 1]$

解得 $a > -(\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{2})^x$, 当且仅当 a 大于

$\varphi(x) = -(\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{2})^x \quad x \in (-\infty, 1]$ 的

最大值时, a 大于 $-(\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{2})^x$ 恒成立,

而 $\varphi(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, ∴ $x=1$ 时 $\varphi(x)$ 最

大等于 $-\frac{3}{4}$, 于是 $a > -\frac{3}{4}$

提示: 本题采用命题转化思想: 将原命题转化为不等式进而转化为求指数函数的最值.



评 析

本套题的重点是指数函数的概念、图象和性质. 比较大小是高考中常见的题型. 底数相同, 指数不同时, 考虑指数函数单调性. 底、指都不同时, 要借助中介值, 还可考虑商值(差值)比较. 特别需注意的是指数函数的值域. 如方程 $f(a^x) = 0$ 有实根, 即方程 $f(y) = 0$ 有正根.

备
课
札
记

2.6 对数与对数函数



基础训练

一、选择题

⇒1. 函数 $y = \log_a x$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上总存在 $|y| > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $1 < a < 2$

(B) $\frac{1}{2} < a < 1$ 或 $1 < a < 2$

(C) $1 < a < 2$

(D) $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > 2$

答案: (B)

⇒2. 函数 $f(x) = \lg(a^x - b^x) (a, b \text{ 为常数}, a > 1 > b > 0)$ 若 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f(x) > 0$ 恒成立, 则

..... ()

(A) $a - b \geq 1$ (B) $a - b > 1$

(C) $a - b \leq 1$ (D) $a = b + 1$

答案: (A)

⇒3. 若 $f(x) = \log_{a^2-1}(2x+1)$ 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内

有 $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $0 < a < 1$

(B) $-\sqrt{2} < a < -1$ 或 $1 < a < \sqrt{2}$

(C) $a > 1$

(D) $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$

答案: (B)

⇒4. 若 $\log_a 2 < \log_b 2$, 则 ()

(A) $0 < a < b < 1$ (B) $0 < b < a < 1$

(C) $a > b > 1$ (D) $b > a > 1$

答案: (B)

⇒5. 若 $x > y > 1$ 且 $0 < a < 1$, 给出下面四个不等式

① $x^{-a} < y^{-a}$ ② $a^{-x} > a^{-y}$

③ $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y$ ④ $\log_a \frac{1}{x} > \log_a \frac{1}{y}$

其中正确的个数是 ()

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

答案: (D)

⇒6. 函数 $y = \log_2 |ax - 1| (a \neq 0)$ 的对称轴方程是 $x = -2$, 那么 a 等于 ()

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$

(C) 2 (D) -2

答案: (B)

二、填空题

